

Observatoire de Paris, Universités Paris 6, Paris 7 et Paris 11,
École Normale Supérieure
Master *Astronomie, Astrophysique et Ingénierie Spatiale*
Année M2 - Parcours Recherche

2013 - 2014

UE FC5

Relativité générale

Éric Gourgoulhon

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)

CNRS / Observatoire de Paris / Université Paris Diderot (Paris 7)

eric.gourgoulhon@obspm.fr

<http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>

Table des matières

1	Introduction	9
1.1	Motivations et objectifs du cours	9
1.2	Articulation avec les autres cours	10
1.3	Page web du cours	11
2	Cadre géométrique	13
2.1	Introduction	13
2.2	L'espace-temps relativiste	13
2.2.1	Les quatre dimensions	13
2.2.2	Notion de variété	14
2.2.3	Courbes et vecteurs sur une variété	16
2.2.4	Formes multilinéaires et tenseurs	22
2.3	Tenseur métrique	23
2.3.1	Définition	23
2.3.2	Composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique	25
2.3.3	Bases orthonormales	26
2.3.4	Genre des 4-vecteurs	28
2.3.5	Représentation graphique des vecteurs	28
2.3.6	Cône isotrope	31
2.3.7	Distance entre deux points	31
2.3.8	Bilan	32
2.4	Lignes d'univers	33
2.4.1	Trajectoires des photons et cône de lumière	33
2.4.2	Mouvement d'un point matériel	34
2.4.3	Temps propre	34
2.4.4	Quadrivitesse	36
2.4.5	Quadri-impulsion	37
2.5	Observateurs	38
2.5.1	Simultanéité et mesure du temps	38
2.5.2	Espace local de repos	40
2.5.3	Facteur de Lorentz	42
2.5.4	Mesures d'énergie et de quantité de mouvement	43
2.6	Principe d'équivalence et géodésiques	46
2.6.1	Principe d'équivalence	46

2.6.2	Équation des géodésiques	46
2.6.3	Géodésiques de longueur nulle	49
2.7	Exercices	51
3	Champ gravitationnel à symétrie sphérique (métrique de Schwarzschild)	53
3.1	Introduction	53
3.2	Métrique de Schwarzschild	54
3.2.1	Espace-temps statique et à symétrie sphérique	54
3.2.2	Expression de la métrique de Schwarzschild	55
3.2.3	Paramètre de compacité	56
3.2.4	Théorème de Birkhoff	58
3.2.5	Métrique de Schwarzschild en coordonnées isotropes	58
3.3	Géodésiques lumière radiales	60
3.3.1	Recherche des géodésiques lumière radiale	60
3.3.2	Coordonnées d'Eddington-Finkelstein	61
3.4	Décalage spectral gravitationnel (effet Einstein)	63
3.4.1	Symétries et quantités conservées le long des géodésiques	63
3.4.2	Effet Einstein	64
3.4.3	Effet Einstein comme dilatation des temps	68
3.4.4	Mise en évidence expérimentale et observationnelle	69
3.5	Orbites des corps matériels	71
3.5.1	Quantités conservées	72
3.5.2	Potentiel effectif	73
3.5.3	Orbites circulaires	76
3.5.4	Dernière orbite circulaire stable	78
3.5.5	Autres orbites	79
3.5.6	Avance du périastre	81
3.6	Trajectoires des photons	82
3.6.1	Potentiel effectif	82
3.6.2	Allure des trajectoires des photons	84
3.6.3	Déviations des rayons lumineux	86
3.6.4	Mirages gravitationnels	87
3.6.5	Retard de la lumière (effet Shapiro)	87
3.7	Exercices	91
4	Équation d'Einstein	93
4.1	Introduction	93
4.2	Dérivation covariante (connexion)	94
4.2.1	Gradient d'un champ scalaire	94
4.2.2	Dérivation covariante d'un vecteur	96
4.2.3	Extension à tous les tenseurs	99
4.2.4	Connexion compatible avec la métrique	100
4.2.5	Divergence d'un champ vectoriel	105
4.3	Tenseur de courbure	106

4.3.1	Transport parallèle non infinitésimal et courbure	106
4.3.2	Propriétés du tenseur de Riemann	110
4.3.3	Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein	111
4.4	Tenseur énergie-impulsion	112
4.4.1	Définition	112
4.4.2	Tenseur énergie-impulsion du fluide parfait	113
4.5	Équation d'Einstein	115
4.5.1	Énoncé	115
4.5.2	Limite newtonienne	116
4.6	Solutions statiques et à symétrie sphérique	116
4.6.1	Écriture de l'équation d'Einstein	116
4.6.2	Solution de Schwarzschild	118
4.6.3	Équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff	120
4.6.4	Pour aller plus loin...	122
4.7	Exercices	122
5	Trous noirs	123
5.1	Introduction	123
5.2	Singularité de coordonnées et singularité centrale	124
5.2.1	Nature de la singularité au rayon de Schwarzschild	124
5.2.2	Singularité centrale	127
5.3	Horizon des événements	127
5.3.1	Définition	128
5.3.2	Genre lumière de l'horizon des événements	129
5.4	Effondrement gravitationnel	131
5.5	Trous noirs en rotation	131
5.5.1	Solution de Kerr	131
5.5.2	Théorème d'unicité (absence de chevelure)	132
5.5.3	Horizon des événements	133
5.5.4	Ergosphère	133
5.6	Mouvement géodésique dans l'espace-temps de Kerr	135
5.6.1	Quantités conservées	135
5.6.2	Effet Lense-Thirring	136
5.6.3	Orbites circulaires dans l'espace-temps de Kerr	138
5.6.4	Processus d'extraction d'énergie de Penrose	139
5.7	Exercices	141
6	Ondes gravitationnelles	143
6.1	Introduction	143
6.2	Linéarisation de l'équation d'Einstein	144
6.2.1	Perturbation de la métrique de Minkowski	144
6.2.2	Équation d'Einstein linéarisée	146
6.3	Jauge de Lorenz et jauge TT	148
6.3.1	Changement de coordonnées infinitésimal	148

6.3.2	Point de vue « théorie de jauge »	149
6.3.3	Jauge de Lorenz	150
6.3.4	Jauge TT	151
6.4	Effets d'une onde gravitationnelle sur la matière	154
6.4.1	Équation du mouvement en coordonnées TT	154
6.4.2	Variation des distances	156
6.5	Génération d'ondes gravitationnelles	159
6.5.1	Formule du quadrupôle	159
6.5.2	Flux d'énergie	163
6.5.3	Luminosité gravitationnelle	163
6.5.4	Amplitude de l'onde gravitationnelle	165
6.6	Sources astrophysiques et détecteurs	165
7	Solutions cosmologiques	167
7.1	Introduction	167
7.2	Espaces maximalelement symétriques	168
7.2.1	Généralités	168
7.2.2	Espaces maximalelement symétriques de dimension 3	169
7.2.3	Espaces-temps maximalelement symétriques	173
7.3	Espace-temps de de Sitter	174
7.3.1	Définition	174
7.3.2	Plongement isométrique dans Minkowski 5-D	174
7.3.3	Géodésiques lumière	177
7.3.4	Horizon des particules et horizon des événements	178
7.3.5	Coordonnées de Lemaître	180
7.3.6	Coordonnées statiques	184
7.4	Espace-temps anti-de Sitter (AdS)	187
7.4.1	Définition	187
7.4.2	Immersion isométrique dans $\mathbb{R}^{2,3}$	188
7.4.3	Géodésiques lumière	190
7.4.4	Propriétés causales	191
7.5	Solutions de Friedmann-Lemaître	193
7.5.1	Espaces-temps spatialement homogènes et isotropes	193
7.5.2	Équations de Friedmann	196
7.5.3	Solutions de Friedmann-Lemaître	199
A	Relativité et GPS	203
A.1	Introduction	203
A.2	Principe du système GPS et nécessité d'une description relativiste	203
A.3	Traitement relativiste	205
A.3.1	Système de référence céleste géocentrique (GCRS)	205
A.3.2	Temps terrestre et temps atomique international	207
A.3.3	Le GPS comme système de détermination des coordonnées GCRS	208
A.3.4	Mise en œuvre effective du système GPS	211

B Problèmes	213
B.1 Décalage spectral au voisinage de la Terre	213
B.2 Équation de Killing	216
B.3 Trou de ver	217
B.4 Observateur accéléré et horizon de Rindler	218
B.4.1 Mouvement uniformément accéléré	218
B.4.2 Décalage spectral et effet Einstein	219
B.4.3 Coordonnées de Rindler	221
B.5 Expérience de Hafele & Keating	222
B.6 Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker	224
B.7 Modèle d'étoile incompressible	225
B.8 Vitesse du son relativiste	227
B.9 Photon émis par une étoile	229
B.10 Pression de radiation et effet Poynting-Robertson	230
B.11 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild	233
B.12 Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs	235
B.13 Tenseur de Killing et constante de Carter	237
B.14 Gravité de surface d'un trou noir	239
B.15 Déviation géodésique	243
C Solutions des problèmes	249
C.1 Décalage spectral au voisinage de la Terre	249
C.2 Équation de Killing	253
C.3 Trou de ver	255
C.4 Observateur accéléré et horizon de Rindler	260
C.4.1 Mouvement uniformément accéléré	260
C.4.2 Décalage spectral et effet Einstein	262
C.4.3 Coordonnées de Rindler	265
C.5 Expérience de Hafele & Keating	269
C.6 Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker	272
C.7 Modèle d'étoile incompressible	275
C.8 Vitesse du son relativiste	280
C.9 Photon émis par une étoile	284
C.10 Pression de radiation et effet Poynting-Robertson	286
C.11 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild	291
C.12 Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs	297
C.13 Tenseur de Killing et constante de Carter	302
C.14 Gravité de surface d'un trou noir	306
C.15 Déviation géodésique	314
D Codes Sage	327
D.1 Introduction	327
D.2 Tenseur de Riemann et équation d'Einstein	328
D.2.1 Définir les paramètres du calcul	328

D.2.2	Calcul du tenseur de Riemann	329
D.2.3	Équation d'Einstein	330
	Bibliographie	331
	Index	336

Chapitre 1

Introduction

version 2013-2014

Sommaire

1.1 Motivations et objectifs du cours	9
1.2 Articulation avec les autres cours	10
1.3 Page web du cours	11

1.1 Motivations et objectifs du cours

L'astrophysique relativiste occupe une part croissante dans l'astronomie contemporaine, notamment en regard de l'importante quantité de données générées par

- les observatoires satellitaires de haute énergie actuellement en orbite (XMM-Newton, Chandra, Integral, HETE-2, Swift, Fermi, NuSTAR) ou en projet (ASTROSAT (2014), ASTRO-H (2014), LOFT (2022 ?), ATHENA (2025 ?)),
- les observatoires de haute énergie au sol : HESS-2, AUGER, Antares, IceCube (en projet : CTA) ;
- les détecteurs d'ondes gravitationnelles actuellement en service (VIRGO et LIGO, au sol) ou en projet (LIGO au Japon, eLISA dans l'espace),
- les observations en optique/infrarouge d'effets relativistes : mirages gravitationnels, orbites stellaires au voisinage du trou noir central de notre Galaxie, courbes de luminosité des supernovæ Ia à grand décalage spectral, etc.
- les satellites dédiés à la cosmologie (WMAP, Planck, Euclid).

Toutes les sources observées par les instruments mentionnés ci-dessus sont soit cosmologiques, soit mettent en jeu des objets compacts (trous noirs, étoiles à neutrons). Dans les deux cas, la base théorique de leur étude est la relativité générale.

En plus des nombreuses applications à l'astrophysique, il convient de mentionner la première application de la relativité générale à la vie pratique (!), à savoir le système de

positionnement GPS. Ce dernier serait en effet inopérant si on se limitait à une description purement newtonienne du champ gravitationnel de la Terre, ainsi que nous le verrons dans l'Annexe A.

Le but de ce cours est d'introduire la relativité générale en 15 h, en mettant l'accent sur les applications astrophysiques. À cette fin, on évitera une exposition trop formelle et, sans s'interdire une certaine rigueur mathématique, on utilisera abondamment des figures et des exemples simples. En particulier, un rôle central sera donné à la métrique de Schwarzschild, qui est à la base de la description du champ gravitationnel des étoiles compactes et des trous noirs, mais aussi des étoiles de type solaire et des planètes lorsqu'on veut tenir compte des effets relativistes, comme pour le système GPS.

On espère qu'un étudiant qui aura suivi le cours, même s'il ne fait pas carrière en relativité, sera à même de comprendre une phrase comme « en faisant l'hypothèse qu'elle est due à un mouvement orbital, la périodicité de 17 minutes observée avec l'instrument NACO du VLT autour du trou noir central de la Galaxie montre que ce dernier doit être en rotation rapide » (page de garde de www.obspm.fr, novembre 2003 et *Nature* **425**, 934 (2003)).

Les exercices d'application du cours sont regroupés sous forme de problèmes dans l'Annexe B, les solutions figurant dans l'Annexe C.

1.2 Articulation avec les autres cours

L'analyse détaillée du transfert de temps avec des satellites en orbite terrestre et les applications GPS sont laissées aux cours FC1 (*Systèmes de référence et astronomie fondamentale*) et FC4 (*Physique fondamentale, métrologie et physique des GNSS*). On a simplement introduit ici les concepts généraux de facteur de Lorentz et de décalage gravitationnel vers le rouge et effectué quelques applications numériques pour les satellites GPS.

De même, le cours ne donne qu'une introduction au phénomène de déviation des rayons lumineux ; il ne traite pas en détail des mirages gravitationnels et de leurs applications, ces derniers points étant traités dans le cours Th5 (*Cosmologie et univers primordial*).

Les trous noirs détectés par différents instruments ne sont utilisés ici que comme illustration. La discussion des observations est laissée aux cours Th9 (*Objets compacts et phénomènes associés*) et Th10 (*Accrétion et jets*). Il en est de même du mécanisme de formation dans les supernovæ.

Le détail de la détection des ondes gravitationnelles par des interféromètres du type VIRGO ou eLISA est laissé au cours Th9 (*Objets compacts et phénomènes associés*), de même qu'une revue des différentes sources astrophysiques attendues et de leur forme d'onde.

Enfin, pour la cosmologie, le cours ne donne que la dérivation des solutions de Friedmann-Robertson-Walker. La discussion de leurs propriétés, le lien avec l'analyse du fond diffus cosmologique, ainsi que des modèles cosmologiques plus sophistiqués (inflation) sont laissés aux cours de cosmologie proprement dits (TC1 et Th5).

1.3 Page web du cours

La page web

<http://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>

contient des liens vers d'autres cours, des livres et des expériences consacrées à la relativité générale.

Chapitre 2

Cadre géométrique

version 2013-2014

Sommaire

2.1	Introduction	13
2.2	L'espace-temps relativiste	13
2.3	Tenseur métrique	23
2.4	Lignes d'univers	33
2.5	Observateurs	38
2.6	Principe d'équivalence et géodésiques	46
2.7	Exercices	51

2.1 Introduction

L'objectif de ce premier cours est d'introduire le cadre mathématique de la relativité générale. On privilégie une approche géométrique et picturale — basée sur l'algèbre linéaire telle qu'enseignée dans les deux premières années d'université ou de classes préparatoires — à une approche basée sur les systèmes de coordonnées. Pour ne pas être trop formel, le cours repose sur de nombreuses figures et des exemples issus de l'espace-temps de Minkowski. Une importance particulière est donnée à la notion de ligne d'univers.

2.2 L'espace-temps relativiste

2.2.1 Les quatre dimensions

La relativité a opéré la fusion de l'*espace* et du *temps*, deux notions qui étaient complètement distinctes en mécanique galiléenne. Il faut quatre nombres pour déterminer un événement dans le « continuum » d'espace et temps : trois pour sa localisation spatiale

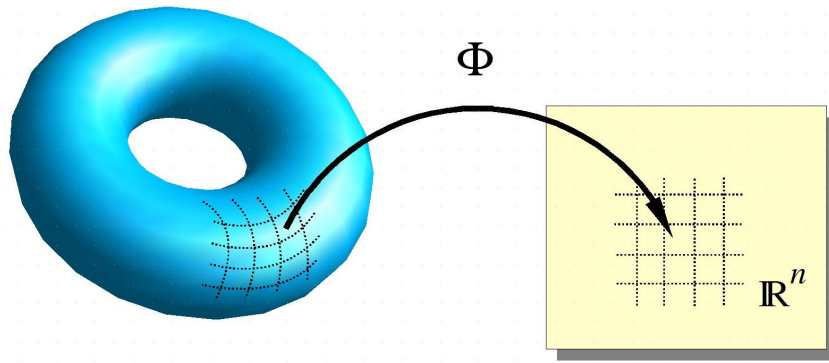


FIGURE 2.1 – Variété : vue de près, une variété ressemble à \mathbb{R}^n ($n = 2$ sur la figure), mais cela n'est plus nécessairement vrai au niveau global.

(par exemple ses coordonnées cartésiennes (x, y, z) ou sphériques (r, θ, ϕ)) et un pour sa date. La structure mathématique correspondant à ce « continuum » à quatre dimensions est celle de *variété*. Avant de décrire cette dernière, il convient d'éclaircir un point : vouloir former un continuum d'espace-temps signifie implicitement que les grandeurs d'espace et de temps se voient donner la même dimension physique. Par convention, nous choisirons cette dimension être celle d'une longueur (donc mesurée en mètres dans le Système International). Pour obtenir les temps dans la dimension usuelle, il faut donc introduire un facteur de conversion qui a la dimension d'une vitesse : il s'agit de la constante

$$c = 2.99792458 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}. \quad (2.1)$$

Au risque de tuer le suspense, disons tout de suite que cette constante correspondra à la vitesse de la lumière dans le vide telle que mesurée par un observateur localement inertiel.

2.2.2 Notion de variété

Une *variété* est un ensemble qui « ressemble localement » à \mathbb{R}^n (dans le cas présent $n = 4$). Plus précisément, une *variété de dimension 4* est un espace topologique \mathcal{E} tel qu'en chacun de ses points, on peut définir un voisinage homéomorphe à un ouvert de \mathbb{R}^4 ⁽¹⁾. En langage imagé, cela veut dire que sur toute partie pas trop grosse de la variété, on peut étiqueter les points par 4 nombres. Cela est représenté schématiquement sur la figure 2.1. On appelle *système de coordonnées* (ou *carte*) sur une partie ouverte \mathcal{U} d'une variété \mathcal{E} tout « étiquetage » des points de \mathcal{U} , c'est-à-dire tout homéomorphisme ²

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{U} \subset \mathcal{E} &\longrightarrow \Phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^4 \\ P &\longmapsto (x^0, x^1, x^2, x^3) \end{aligned} \quad (2.2)$$

1. La définition complète d'une variété fait intervenir deux propriétés supplémentaires qui permettent d'éviter des cas pathologiques : (i) l'espace topologique \mathcal{E} doit être séparé et (ii) il doit être doté d'une base dénombrable, c'est-à-dire d'une famille $(\mathcal{U}_k)_{k \in \mathbb{N}}$ d'ouverts tel que tout ouvert de \mathcal{E} puisse s'écrire comme l'union (éventuellement infinie) de membres de cette famille.

2. rappelons qu'un *homéomorphisme* entre deux espaces topologiques (ici $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ et $\Phi(\mathcal{U}) \subset \mathbb{R}^4$) est une bijection continue et dont l'application réciproque est également continue.

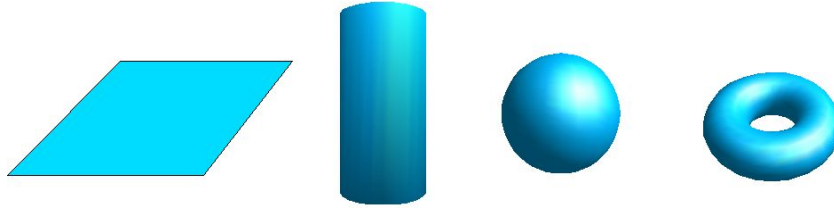


FIGURE 2.2 – Exemples de variétés de dimension 2 : de gauche à droite : plan, cylindre, sphère et tore.

Remarque : Il est conventionnel en relativité d'étiqueter les 4 coordonnées sur la variété d'espace-temps par (x^0, x^1, x^2, x^3) , plutôt que (x^1, x^2, x^3, x^4) , car en général la coordonnée x^0 est du genre temps et les trois autres du genre espace (ces termes seront définis plus bas). Nous utilisons ici cette convention, même si à ce stade de la discussion, les coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) sont tout à fait arbitraires. On peut donc juste voir cela comme la convention d'indice des tableaux du C/C++ ou de Python plutôt que celle du Fortran...

Il convient de souligner que la ressemblance locale avec \mathbb{R}^4 s'arrête à l'étiquetage des points et ne s'étend pas à la structure d'espace euclidien de \mathbb{R}^4 . En particulier le choix du système de coordonnées est complètement libre : si $(x^\alpha) = (x^0, x^1, x^2, x^3)$ est un système de coordonnées sur $\mathcal{U} \subset \mathcal{E}$ et F une application $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ bijective, continue et de réciproque continue, alors $(y^\alpha) = (y^0, y^1, y^2, y^3)$, avec $y^\alpha = F^\alpha(x^0, x^1, x^2, x^3)$, constitue un système de coordonnées tout à fait valide.

Des exemples de variété de dimension 2 sont donnés sur la Fig. 2.2. L'espace-temps de la relativité restreinte est constitué par la variété de dimension 4 la plus simple qui soit : \mathbb{R}^4 lui-même. Par contre, la variété utilisée pour décrire l'espace-temps en relativité générale peut être différente de \mathbb{R}^4 , en particulier si l'on considère un espace-temps contenant des trous noirs ou un modèle cosmologique.

Remarque : La définition de variété donnée ci-dessus est intrinsèque : elle ne suppose pas que \mathcal{E} soit plongé dans un espace plus grand. Ainsi on peut définir les variétés de dimension 2 montrées sur la Fig. 2.2 sans les considérer comme des sous-ensembles de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 (par exemple, la définition de la sphère comme l'ensemble des points (x, y, z) tels que $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ fait évidemment appel à \mathbb{R}^3).

On appelle *atlas* tout ensemble de couples $(\mathcal{U}_k, \Phi_k)_{1 \leq k \leq K}$ où $K \in \mathbb{N}^*$, \mathcal{U}_k est un ouvert de \mathcal{E} et Φ_k un système de coordonnées (carte) sur \mathcal{U}_k , tel que la réunion des \mathcal{U}_k couvre \mathcal{E} :

$$\bigcup_{k=1}^K \mathcal{U}_k = \mathcal{E}. \quad (2.3)$$

On dit alors que \mathcal{E} est une *variété différentiable* (resp. *variété de classe C^p*) ssi pour toute intersection non vide de deux cartes, \mathcal{U}_i et \mathcal{U}_j disons, l'application

$$\Phi_i \circ \Phi_j^{-1} : \Phi_j(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^4 \longrightarrow \Phi_i(\mathcal{U}_i \cap \mathcal{U}_j) \subset \mathbb{R}^4 \quad (2.4)$$

est différentiable (resp. de classe C^n). Notons que l'application ci-dessus va d'un ouvert de \mathbb{R}^4 vers un autre ouvert de \mathbb{R}^4 , si bien que la notion de différentiabilité invoquée à son égard n'est autre que celle des applications internes à \mathbb{R}^4 .

2.2.3 Courbes et vecteurs sur une variété

Courbes

Un concept géométrique élémentaire à la base de la physique est celui de *vecteur*. Ce concept est généralement introduit dans le cadre de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 . Il est immédiatement généralisable à l'espace \mathbb{R}^n ($n \in \mathbb{N}^*$). Sur une variété, on ne peut a priori pas définir les vecteurs comme des quantités reliant deux points, sauf pour des points infiniment proches : en raison de la courbure, le vecteur « sort » de la variété. En particulier l'addition de deux vecteurs issus de deux points différents serait problématique. Par contre, une notion géométrique bien définie sur une variété est celle de *courbe*. Nous allons l'utiliser pour définir les vecteurs comme des vecteurs tangents à une courbe donnée. Mathématiquement, une courbe \mathcal{C} sur une variété \mathcal{E} est l'image d'une application différentiable

$$\begin{aligned} \mathcal{P} : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathcal{E} \\ \lambda &\longmapsto P = \mathcal{P}(\lambda) \in \mathcal{C}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Cette application est appelée paramétrage de la courbe \mathcal{C} et λ est appelé paramètre de la courbe.

Étant donné un système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) , la courbe est décrite par la donnée de 4 fonctions $X^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, que nous supposons différentiables et telles que

$$\begin{cases} x^0 = X^0(\lambda) \\ x^1 = X^1(\lambda) \\ x^2 = X^2(\lambda) \\ x^3 = X^3(\lambda) \end{cases} \quad (2.6)$$

soit l'équation paramétrique de \mathcal{C} .

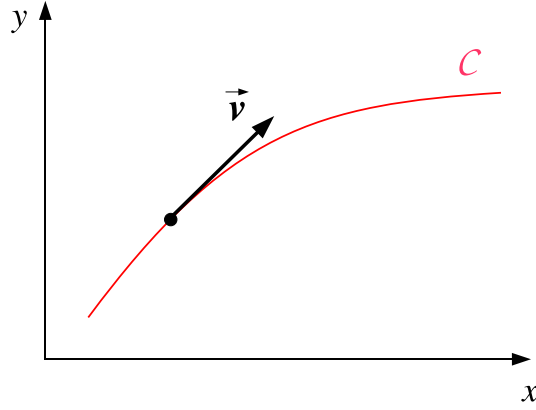
Définition des vecteurs

Pour motiver la définition d'un vecteur sur une variété, examinons le cas d'une courbe \mathcal{C} dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 (cf. Fig. 2.3). Soit

$$x = X(\lambda), \quad y = Y(\lambda) \quad (2.7)$$

l'équation paramétrique de \mathcal{C} en coordonnées cartésiennes. Au sens usuel des vecteurs de \mathbb{R}^2 , le vecteur tangent à \mathcal{C} en un point $P = \mathcal{P}(\lambda)$ et associé au paramétrage (2.7) est le vecteur de composantes cartésiennes

$$\vec{v} = \left(\dot{X}(\lambda), \dot{Y}(\lambda) \right), \quad (2.8)$$


 FIGURE 2.3 – Vecteur tangent à une courbe dans le plan euclidien \mathbb{R}^2 .

où l'on a noté $\dot{X} := dX/d\lambda$ et $\dot{Y} := dY/d\lambda$. Considérons à présent un champ scalaire différentiable défini sur le plan : $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. L'accroissement élémentaire de f le long de la courbe \mathcal{C} est donné par la formule

$$df|_{\mathcal{C}} = \frac{\partial f}{\partial x} \dot{X} d\lambda + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Y} d\lambda, \quad (2.9)$$

d'où la dérivée de f le long de \mathcal{C} :

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}} &= \frac{\partial f}{\partial x} \dot{X} + \frac{\partial f}{\partial y} \dot{Y} \\ &= \vec{v} \cdot \vec{\nabla} f \end{aligned} \quad (2.10)$$

On peut donc voir le vecteur tangent \vec{v} comme l'opérateur qui à tout champ scalaire f fait correspondre la dérivée directionnelle donnée par (2.10). C'est cet aspect que nous allons utiliser pour définir les vecteurs sur les variétés.

Étant donnée une courbe \mathcal{C} sur une variété \mathcal{E} et un paramétrage $\mathcal{P}(\lambda)$ de \mathcal{C} , on définit le vecteur tangent \vec{v} associé au paramétrage \mathcal{P} en un point $P = \mathcal{P}(\lambda)$ comme l'opérateur qui à tout champ scalaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$ différentiable au voisinage de P fait correspondre la dérivée $df/d\lambda$ de f le long de la courbe :

$$\vec{v}(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}}. \quad (2.11)$$

Si l'on se donne l'équation paramétrique de \mathcal{C} dans un système de coordonnées (x^0, x^1, x^2, x^3) de \mathcal{E} , suivant la forme (2.6), l'équation (2.11) devient

$$\vec{v}(f) = \sum_{\alpha=0}^3 \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dX^\alpha}{d\lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{dX^\alpha}{d\lambda}. \quad (2.12)$$

Dans l'équation ci-dessus, la dernière égalité utilise la *convention de sommation d'Einstein* sur les indices répétés. On l'utilisera systématiquement par la suite, ce qui évitera d'écrire les signes \sum .

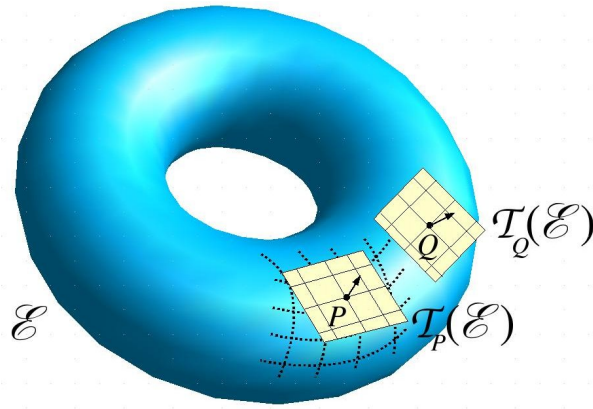


FIGURE 2.4 – Espaces vectoriels tangents $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et $\mathcal{T}_Q(\mathcal{E})$ en deux points P et Q d'une variété \mathcal{E} .

Au vu de la définition (2.11), des vecteurs tangents privilégiés sont les vecteurs tangents aux courbes de coordonnées constantes : par exemple, la courbe ($x^1 = \text{const.}$, $x^2 = \text{const.}$, $x^3 = \text{const.}$) paramétrée par $\lambda = x^0$. Nous noterons $\vec{\partial}_0$ le vecteur tangent associé à cette courbe :

$$\vec{\partial}_0(f) = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\substack{x^\alpha = \text{const.} \\ \alpha \neq 0}} = \frac{\partial f}{\partial x^0}. \quad (2.13)$$

De même, on note $\vec{\partial}_1$, $\vec{\partial}_2$ et $\vec{\partial}_3$ les vecteurs tangents aux trois autres courbes de coordonnées constantes :

$$\vec{\partial}_\alpha(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \quad (2.14)$$

L'équation (2.12) s'écrit alors

$$\vec{v}(f) = \dot{X}^\alpha \vec{\partial}_\alpha(f) \quad \text{avec} \quad \dot{X}^\alpha := \frac{dX^\alpha}{d\lambda}. \quad (2.15)$$

Puisque cette écriture est valable pour tout champ scalaire f , on obtient la décomposition suivante du vecteur \vec{v} :

$$\vec{v} = \dot{X}^\alpha \vec{\partial}_\alpha. \quad (2.16)$$

On déduit de cette équation que l'ensemble des vecteurs en un point $P \in \mathcal{E}$ (ensemble des vecteurs tangents à toutes les courbes passant par P) forme un espace vectoriel de dimension 4 sur \mathbb{R} dont $(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_1, \vec{\partial}_2, \vec{\partial}_3)$ est une base. Cet espace vectoriel est appelé *espace vectoriel tangent* à la variété \mathcal{E} au point P et est noté $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ (cf. Fig. 2.4). La base $(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_1, \vec{\partial}_2, \vec{\partial}_3)$ est appelée *base naturelle associée aux coordonnées* (x^0, x^1, x^2, x^3). Comme l'indique l'Eq. (2.16), les quantités \dot{X}^α sont les *composantes* du vecteur \vec{v} par rapport à cette base vectorielle ; nous les noterons v^α :

$$\boxed{\vec{v} = v^\alpha \vec{\partial}_\alpha} \quad \text{avec} \quad v^\alpha := \dot{X}^\alpha(\lambda) \quad (2.17)$$

Remarque : La définition ci-dessus fait apparaître les vecteurs sur une variété comme des opérateurs de dérivation directionnelle (la direction étant celle d'une courbe donnée). Il s'agit là de la définition intrinsèque des vecteurs en géométrie différentielle. Dans le cas où la variété est plongée dans \mathbb{R}^n (comme les variétés représentées sur la Fig. 2.2), on peut aussi définir les vecteurs tangents de manière extrinsèque, c'est-à-dire comme des vecteurs usuels de \mathbb{R}^n . Il est facile de voir que les deux notions coïncident.

Remarque : Il convient de souligner que l'espace vectoriel tangent dépend du point considéré : il y a autant d'espaces vectoriels tangents que de points sur la variété, d'où l'indice P dans la notation $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ (cf. Fig. 2.4). Cette situation diffère de celle de l'espace euclidien usuel \mathbb{R}^3 , où l'on peut considérer qu'il n'y a qu'un seul espace vectoriel global : \mathbb{R}^3 lui-même.

Dans un changement de coordonnées³ $(x^\alpha) \mapsto (x^{\alpha'})$, les composantes d'un vecteur \vec{v} dans la nouvelle base naturelle s'expriment en fonction de celles relative à l'ancienne suivant

$$v^{\alpha'} = \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\beta} v^\beta. \quad (2.18)$$

Cette formule se déduit aisément de l'Eq. (2.12) par la loi de composition des dérivations partielles.

Remarque : Dans les livres de relativité plutôt anciens, on définit les vecteurs comme des « quadruplets de nombres » (v^0, v^1, v^2, v^3) qui se transforment suivant l'Eq. (2.18) lors d'un changement de coordonnées. Ici (2.18) apparaît plutôt comme une conséquence de la définition géométrique adoptée.

Dans le cas présent de la variété d'espace-temps \mathcal{E} de dimension 4, on qualifie les vecteurs de quadrivecteurs ou 4-vecteurs, pour les distinguer des vecteurs « ordinaires » de \mathbb{R}^3 .

Il souvent commode d'utiliser d'autres bases vectorielles de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ que les bases naturelles, c'est-à-dire des bases vectorielles non associées à un système de coordonnées. Un exemple de telles bases est constitué des bases orthonormales (la définition précise sera donnée au § 2.3.3). Ainsi, si $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ est une base de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, on écrira, pour tout vecteur \vec{v} :

$$\boxed{\vec{v} = v^\alpha \vec{e}_\alpha}. \quad (2.19)$$

Nous noterons les composantes avec un chapeau sur l'indice, c'est-à-dire $v^{\hat{\alpha}}$, lorsqu'il y aura lieu de les distinguer des composantes liées à une base naturelle.

Exemple : Prenons $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ et un système de coordonnées cartésiennes $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$. Les vecteurs de la base naturelle associée sont les vecteurs

$$\begin{cases} \vec{\partial}_t &= (1, 0, 0, 0) \\ \vec{\partial}_x &= (0, 1, 0, 0) \\ \vec{\partial}_y &= (0, 0, 1, 0) \\ \vec{\partial}_z &= (0, 0, 0, 1). \end{cases} \quad (2.20)$$

3. suivant l'usage en relativité, on met le symbole prime sur l'indice α alors qu'il serait plus correct de le mettre sur x

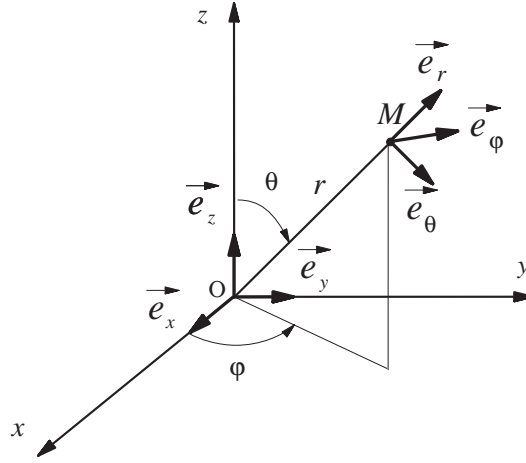


FIGURE 2.5 – Coordonnées sphériques et base orthonormale associée ($\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi$). Cette dernière est reliée à la base naturelle ($\vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi$) par $\vec{e}_r = \vec{\partial}_r$, $\vec{e}_\theta = r^{-1}\vec{\partial}_\theta$, $\vec{e}_\varphi = (r \sin \theta)^{-1}\vec{\partial}_\varphi$ [cf. Eq. (2.66)].

Les coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$ sont définies à partir des coordonnées cartésiennes (t, x, y, z) suivant (cf. Fig. 2.5)

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta. \end{cases} \quad (2.21)$$

Les vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées sphériques s'obtiennent à partir de (2.13) :

$$\vec{\partial}_t(f) = \frac{\partial f}{\partial t}, \quad \vec{\partial}_r(f) = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad \vec{\partial}_\theta(f) = \frac{\partial f}{\partial \theta}, \quad \vec{\partial}_\varphi(f) = \frac{\partial f}{\partial \varphi}, \quad (2.22)$$

où f est un champ scalaire générique sur \mathbb{R}^4 . En utilisant la loi de composition des dérivées partielles, on obtient

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}, \quad (2.23)$$

soit, au vu de (2.21),

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \sin \theta \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \theta \sin \varphi + \frac{\partial f}{\partial z} \cos \theta. \quad (2.24)$$

Ainsi [cf. Eq. (2.22)]

$$\vec{\partial}_r = \sin \theta \cos \varphi \vec{\partial}_x + \sin \theta \sin \varphi \vec{\partial}_y + \cos \theta \vec{\partial}_z. \quad (2.25)$$

De même,

$$\vec{\partial}_\theta = \frac{\partial x}{\partial \theta} \vec{\partial}_x + \frac{\partial y}{\partial \theta} \vec{\partial}_y + \frac{\partial z}{\partial \theta} \vec{\partial}_z \quad (2.26)$$

$$\vec{\partial}_\varphi = \frac{\partial x}{\partial \varphi} \vec{\partial}_x + \frac{\partial y}{\partial \varphi} \vec{\partial}_y + \frac{\partial z}{\partial \varphi} \vec{\partial}_z, \quad (2.27)$$

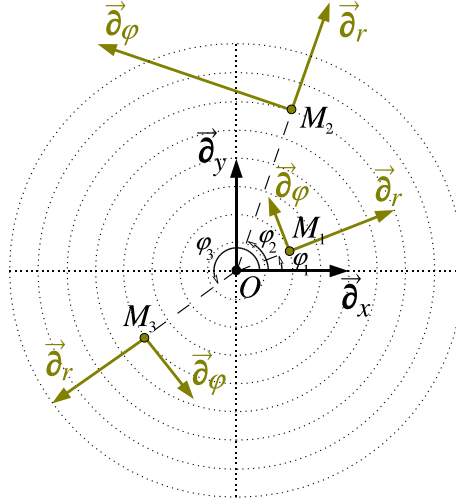


FIGURE 2.6 – Vecteurs $\vec{\partial}_r$ et $\vec{\partial}_\varphi$ de la base naturelle associée aux coordonnées sphériques, en trois points M_1 , M_2 et M_3 du plan ($t = 0, \theta = \pi/2$).

c'est-à-dire, compte tenu de (2.21),

$$\vec{\partial}_\theta = r \cos \theta \cos \varphi \vec{\partial}_x + r \cos \theta \sin \varphi \vec{\partial}_y - r \sin \theta \vec{\partial}_z \quad (2.28)$$

$$\vec{\partial}_\varphi = -r \sin \theta \sin \varphi \vec{\partial}_x + r \sin \theta \cos \varphi \vec{\partial}_y. \quad (2.29)$$

Il convient de remarquer que les vecteurs $(\vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$, tels que donnés par (2.25), (2.28) et (2.29), ne constituent pas une base orthonormale de \mathbb{R}^3 pour le produit scalaire euclidien usuel. En notant $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ la base orthonormale usuelle associée aux coordonnées sphériques (cf. Fig. 2.5), on a en effet

$$\begin{cases} \vec{\partial}_r = \vec{e}_r \\ \vec{\partial}_\theta = r \vec{e}_\theta \\ \vec{\partial}_\varphi = r \sin \theta \vec{e}_\varphi \end{cases} \quad (2.30)$$

[ces relations seront établies plus bas, cf. Eq. (2.66)]. Au contraire, les vecteurs $(\vec{\partial}_x, \vec{\partial}_y, \vec{\partial}_z)$ sont bien les vecteurs unitaires usuels :

$$\vec{\partial}_x = \vec{e}_x, \quad \vec{\partial}_y = \vec{e}_y, \quad \vec{\partial}_z = \vec{e}_z. \quad (2.31)$$

Les vecteurs $\vec{\partial}_r$, $\vec{\partial}_\varphi$, $\vec{\partial}_x$ et $\vec{\partial}_y$ sont représentés sur la Fig. 2.6.

Déplacements élémentaires sur une variété

Tout comme en physique classique, on peut associer à deux points P de P' de \mathcal{C} infiniment proches un vecteur « séparation » de la manière suivante. Soit \mathcal{C} une courbe passant par P et P' (4) et \mathcal{P} un paramétrage de \mathcal{C} tel que

$$P = \mathcal{P}(\lambda) \quad \text{et} \quad P' = \mathcal{P}(\lambda + d\lambda); \quad (2.32)$$

4. remarquons que puisque P et P' sont infiniment proches, la portion de \mathcal{C} entre P et P' est déterminée de manière unique

$d\lambda$ est ainsi l'accroissement infinitésimal du paramètre λ entre P et P' . Définissons alors le vecteur suivant

$$\boxed{\overrightarrow{dP} := \vec{v} d\lambda}, \quad (2.33)$$

où \vec{v} est le vecteur tangent à \mathcal{C} au point P et associé au paramétrage $\mathcal{P}(\lambda)$. Puisque $\vec{v} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et $d\lambda \in \mathbb{R}$, \overrightarrow{dP} appartient à l'espace tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$. Appliquons ce vecteur à un champ scalaire f , en utilisant la définition (2.11) de $\vec{v}(f)$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dP}(f) &= \vec{v}(f) d\lambda = \left. \frac{df}{d\lambda} \right|_{\mathcal{E}} d\lambda = df \\ &= f(\mathcal{P}(\lambda + d\lambda)) - f(\mathcal{P}(\lambda)). \end{aligned} \quad (2.34)$$

Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{dP}(f) = f(P') - f(P)}. \quad (2.35)$$

Cette égalité montre que le vecteur \overrightarrow{dP} ne dépend que des points P et P' , autrement dit est indépendant du choix du paramétrage $\mathcal{P}(\lambda)$ de la courbe reliant P à P' . Nous l'appellerons déplacement élémentaire (ou déplacement infinitésimal) du point P en P' . Son interprétation en terme d'opérateur sur les fonctions est très claire au vu de (2.35) : \overrightarrow{dP} fait correspondre à chaque champ scalaire sa variation entre les points P et P' .

Remarque : La définition du vecteur « séparation » entre P et P' ne peut en général pas être étendue au cas où P et P' ne sont pas infiniment proches, sauf bien entendu dans le cas où la variété \mathcal{E} est un espace affine sur \mathbb{R} (cas de la relativité restreinte).

Étant donné un système de coordonnées (x^α) au voisinage de P , soit (x_0^α) les coordonnées de P et $(x_0^\alpha + dx^\alpha)$ les coordonnées de P' . L'équation (2.35) devient alors

$$\overrightarrow{dP}(f) = f(P') - f(P) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} dx^\alpha = dx^\alpha \vec{\partial}_\alpha(f). \quad (2.36)$$

Cette identité montre que les composantes du vecteur \overrightarrow{dP} dans la base naturelle $\vec{\partial}_\alpha$ associée aux coordonnées (x^α) sont

$$\boxed{dP^\alpha = dx^\alpha}. \quad (2.37)$$

2.2.4 Formes multilinéaires et tenseurs

Une opération fondamentale sur les vecteurs consiste à leur associer un nombre, et ce de manière linéaire. C'est ce que l'on appelle une forme linéaire, autrement dit une application⁵

$$\begin{aligned} \omega : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto \langle \omega, \vec{v} \rangle \end{aligned} \quad (2.38)$$

5. nous utilisons la notation bra-ket de la mécanique quantique, à savoir $\langle \omega, \vec{v} \rangle$, pour désigner l'image de \vec{v} par ω plutôt que $\omega(\vec{v})$.

qui vérifie

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall (\vec{u}, \vec{v}) \in T_P(\mathcal{E})^2, \quad \langle \omega, \lambda \vec{u} + \vec{v} \rangle = \lambda \langle \omega, \vec{u} \rangle + \langle \omega, \vec{v} \rangle. \quad (2.39)$$

L'ensemble des formes linéaires sur $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ constitue un espace vectoriel de dimension 4, que l'on appelle espace dual à $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et que l'on note $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$.

Plus généralement, on appelle forme multilinéaire toute application

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \times \cdots \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) &\longmapsto \mathbf{T}(\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k) \end{aligned} \quad (2.40)$$

qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments. Lorsque ceux-ci sont au nombre de deux, on dit que \mathbf{T} est une forme bilinéaire.

La relativité fait abondamment usage des formes multilinéaires et de leur généralisation : les tenseurs. Un tenseur k fois contravariant et ℓ fois covariant (on dit aussi de type $\binom{k}{\ell}$) au point $P \in \mathcal{E}$ est une application

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \underbrace{\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^* \times \cdots \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*}_{k \text{ fois}} \times \underbrace{\mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \times \cdots \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E})}_{\ell \text{ fois}} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega_1, \dots, \omega_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell) &\longmapsto \mathbf{T}(\omega_1, \dots, \omega_k, \vec{v}_1, \dots, \vec{v}_\ell) \end{aligned} \quad (2.41)$$

qui est linéaire par rapport à chacun de ses arguments. L'entier $k + \ell$ est appelée la valence du tenseur. Ainsi, une forme linéaire est un tenseur de type $\binom{0}{1}$, une forme bilinéaire un tenseur de type $\binom{0}{2}$. Rappelons la dualité canonique $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^{**} = \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, qui signifie que tout vecteur \vec{v} peut être considéré comme une forme linéaire sur l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$ suivant

$$\begin{aligned} \vec{v} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E})^* &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \omega &\longmapsto \langle \omega, \vec{v} \rangle. \end{aligned} \quad (2.42)$$

Grâce à cette dualité, on peut dire qu'un vecteur est un tenseur de type $\binom{1}{0}$.

On appelle champ tensoriel la donnée d'un tenseur en chaque point de \mathcal{E} . Par convention, on englobe les champs scalaires dans les champs tensoriels en les qualifiant de champs tensoriels de type $\binom{0}{0}$. Ainsi les scalaires sont des tenseurs de valence 0, les vecteurs et les formes linéaires des tenseurs de valence 1, etc.

2.3 Tenseur métrique

2.3.1 Définition

La physique classique non relativiste est basée sur un espace affine de dimension trois sur \mathbb{R} , que l'on appelle « l'espace », et manipule les vecteurs \vec{v} de l'espace vectoriel \mathbb{R}^3 associé. Sur cet espace vectoriel, une structure très importante est le produit scalaire de deux vecteurs :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3, \quad (2.43)$$

où les u^i et v^i sont les composantes de \vec{u} et \vec{v} dans une base orthonormale. Le produit scalaire fonde toute la géométrie. Il permet notamment de définir la norme d'un vecteur,

l'angle entre deux vecteurs et d'introduire des relations d'orthogonalité entre deux sous-espaces (droite et plan, par exemple).

La géométrie de la physique relativiste diffère de celle de la physique classique en deux points :

1. Comme discuté plus haut, l'espace de base n'est plus \mathbb{R}^3 mais une variété \mathcal{E} de dimension quatre (il « incorpore » le temps !);
2. Le produit scalaire utilisé n'est plus euclidien : en tout point $p \in \mathcal{E}$, il existe une base de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ où il s'écrit

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 . \quad (2.44)$$

Un produit scalaire *euclidien* ne contiendrait que des signes +, comme dans (2.43).

Plus précisément, en chaque point $p \in \mathcal{E}$, on munit l'espace vectoriel tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ d'une forme bilinéaire \mathbf{g} qui est symétrique, non dégénérée et de signature $(-, +, +, +)$. Rappelons que :

- *forme bilinéaire* signifie que \mathbf{g} est une application $\mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{R}$ (i.e. qui à tout couple de 4-vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) associe un réel $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v})$), linéaire par rapport à chacun de ses arguments ;
- *symétrique* signifie que l'on a $\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{u}) = \mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v})$ pour tout couple (\vec{u}, \vec{v}) ;
- *non dégénérée* signifie qu'il n'existe pas de vecteur \vec{u} autre que le vecteur nul vérifiant : $\forall \vec{v} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E}), \mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = 0$;
- *de signature* $(-, +, +, +)$ signifie qu'il existe une base de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ telle que $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v})$ s'exprime en fonction des composantes u^α et v^α de \vec{u} et \vec{v} dans cette base de la manière suivante :

$$\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v}) = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3 . \quad (2.45)$$

D'après un théorème classique d'algèbre linéaire, le *théorème d'inertie de Sylvester*, dans toute autre base où $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v})$ a une écriture diagonale (i.e. qui ne comprend pas de termes croisés du type ' $u^0 v^1$ '), $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{v})$ est une somme algébrique de quatre termes dont un avec un signe moins et trois avec un signe plus, comme dans (2.45). Cette propriété ne dépend donc pas de la base où l'on diagonalise \mathbf{g} , elle est intrinsèque à \mathbf{g} et constitue sa *signature*.

Remarque : On trouve aussi dans la littérature la convention $(+, -, -, -)$ pour la signature de \mathbf{g} . En général, cette dernière est utilisée en relativité restreinte, alors que la signature $(-, +, +, +)$ est utilisée en relativité générale. Les deux conventions sont bien entendu équivalentes (il suffit de changer \mathbf{g} en $-\mathbf{g}$), mais nous attirons l'attention du lecteur sur les changements de signe dans certaines formules que le passage d'une convention à l'autre peut entraîner.

Rappelons que les propriétés de forme bilinéaire symétrique non dégénérée caractérisent ce que l'on appelle un *produit scalaire*. Par exemple, le produit scalaire classique de l'espace euclidien à trois dimensions est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée de signature

(+, +, +) [cf. (2.43)]. \mathbf{g} est donc un produit scalaire sur $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, ce qui justifie la notation suivante [déjà employée dans l'Eq. (2.44)] :

$$\boxed{\forall (\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})^2, \quad \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} := \mathbf{g}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}})} . \quad (2.46)$$

On dit que les 4-vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ sont orthogonaux (on omettra de préciser *pour le produit scalaire \mathbf{g}*) ssi : $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = 0$.

La forme bilinéaire \mathbf{g} définie ci-dessus est appelée tenseur métrique sur \mathcal{E} ou parfois métrique tout court. Le couple $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est appelé espace-temps. Le tenseur métrique définit complètement la géométrie sur l'espace-temps : lorsque l'on parlera de deux 4-vecteurs orthogonaux, ou d'un sous-espace orthogonal à un 4-vecteur, il s'agira toujours d'orthogonalité par rapport au produit scalaire \mathbf{g} .

2.3.2 Composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique

Étant donnée une base $(\vec{\mathbf{e}}_0, \vec{\mathbf{e}}_1, \vec{\mathbf{e}}_2, \vec{\mathbf{e}}_3)$ de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, la matrice de \mathbf{g} par rapport à cette base est la matrice $(g_{\alpha\beta})$ définie par

$$g_{\alpha\beta} := \mathbf{g}(\vec{\mathbf{e}}_\alpha, \vec{\mathbf{e}}_\beta), \quad 0 \leq \alpha \leq 3, \quad 0 \leq \beta \leq 3. \quad (2.47)$$

$(g_{\alpha\beta})$ permet d'exprimer le produit scalaire de deux 4-vecteurs $\vec{\mathbf{u}}$ et $\vec{\mathbf{v}}$ en fonction de leurs composantes (u^α) et (v^α) dans la base $(\vec{\mathbf{e}}_\alpha)$ (cf. (2.19)), suivant

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta} . \quad (2.48)$$

Puisque \mathbf{g} est une forme bilinéaire symétrique, $(g_{\alpha\beta})$ est une matrice symétrique. De plus, puisque \mathbf{g} est non-dégénérée, cette matrice est inversible et nous noterons $(g^{\alpha\beta})$ son inverse :

$$\boxed{g^{\alpha\sigma} g_{\sigma\beta} = \delta^\alpha_\beta} , \quad (2.49)$$

où δ^α_β désigne le symbole de Kronecker relatif aux indices α et β : $\delta^\alpha_\beta = 1$ si $\alpha = \beta$ et 0 sinon.

Considérons un changement de base de $(\vec{\mathbf{e}}_\alpha) \rightarrow (\vec{\mathbf{e}}_{\alpha'})$ de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ ⁽⁶⁾; ce changement de base est entièrement défini par la donnée de la matrice de passage $P^\alpha_{\alpha'}$ qui est la matrice réelle 4×4 telle que

$$\vec{\mathbf{e}}_{\alpha'} = P^\alpha_{\alpha'} \vec{\mathbf{e}}_\alpha. \quad (2.50)$$

Alors pour tout vecteur $\vec{\mathbf{v}} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$,

$$\vec{\mathbf{v}} = v^{\alpha'} \vec{\mathbf{e}}_{\alpha'} = v^{\alpha'} P^\alpha_{\alpha'} \vec{\mathbf{e}}_\alpha, \quad (2.51)$$

d'où l'on déduit la relation entre les composantes de $\vec{\mathbf{v}}$ dans les deux bases :

$$v^\alpha = P^\alpha_{\alpha'} v^{\alpha'}. \quad (2.52)$$

6. rappelons l'usage courant (en relativité) de mettre le prime sur l'indice plutôt que sur le symbole qui porte cet indice : en mathématique on écrirait plutôt $(\vec{\mathbf{e}}'_\alpha)$ pour désigner la nouvelle base.

Remarque : La loi de transformation (2.18) précédemment établie constitue un cas particulier de la relation ci-dessus, puisque dans le cas de bases naturelles $\vec{e}_\alpha = \vec{d}_\alpha$ et $\vec{e}_{\alpha'} = \vec{d}_{\alpha'}$ associées respectivement à des coordonnées (x^α) et $(x^{\alpha'})$,

$$P^{\alpha}_{\alpha'} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}}. \quad (2.53)$$

En reportant (2.52) dans (2.48), il vient

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = g_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} P^{\alpha}_{\alpha'} u^{\alpha'} P^{\beta}_{\beta'} v^{\beta'} = P^{\alpha}_{\alpha'} g_{\alpha\beta} P^{\beta}_{\beta'} u^{\alpha'} v^{\beta'}, \quad (2.54)$$

d'où l'on déduit immédiatement la loi de transformation des composantes de \mathbf{g} lors du changement de base :

$$\boxed{g_{\alpha'\beta'} = P^{\alpha}_{\alpha'} g_{\alpha\beta} P^{\beta}_{\beta'}}, \quad (2.55)$$

soit en notation matricielle :

$$g' = {}^t P \times g \times P, \quad (2.56)$$

g' désignant la matrice $(g_{\alpha'\beta'})$, g la matrice $(g_{\alpha\beta})$, P la matrice $(P^{\alpha}_{\alpha'})$ et ${}^t P$ la transposée de P . On retrouve là l'expression classique de la transformation de la matrice d'une forme bilinéaire lors d'un changement de base (cf. un cours d'algèbre linéaire).

Dans le cas particulier d'un changement de bases naturelles, associé à un changement de coordonnées $(x^\alpha) \rightarrow (x^{\alpha'})$, on obtient en combinant (2.53) et (2.55) :

$$g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^\beta}{\partial x^{\beta'}}. \quad (2.57)$$

Remarque : Dans les livres de relativité plutôt anciens, on définit un tenseur 2-fois covariant comme un « tableau » de nombres $g_{\alpha\beta}$ qui se transforme suivant (2.57) lors d'un changement de coordonnées. Ici, nous avons défini un tenseur 2-fois covariant comme une forme bilinéaire sur \mathcal{E} (cf. § 2.2.4) et la formule (2.57) apparaît alors comme une conséquence de cette définition.

2.3.3 Bases orthonormales

Une base $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ de l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ est dite orthonormale (on omettra de préciser pour le produit scalaire \mathbf{g}) ssi :

$$\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1 \quad (2.58)$$

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1 \quad \text{pour } 1 \leq i \leq 3 \quad (2.59)$$

$$\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta. \quad (2.60)$$

Par rapport à une base orthonormale, la matrice de \mathbf{g} est donc

$$g_{\alpha\beta} = \mathbf{g}(\vec{e}_\alpha, \vec{e}_\beta) = \eta_{\alpha\beta}, \quad (2.61)$$

où $(\eta_{\alpha\beta})$ désigne la matrice suivante, appelée *matrice de Minkowski*,

$$\eta := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.62)$$

Remarque : Il n'existe aucune base de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ satisfaisant $\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$, où $\delta_{\alpha\beta}$ est le symbole de Kronecker et α et β prennent toutes les valeurs entre 0 et 3. On peut avoir $|\vec{e}_\alpha \cdot \vec{e}_\beta| = \delta_{\alpha\beta}$, mais la signature $(-, +, +, +)$ de \mathbf{g} impose que l'un des produits scalaires soit négatif (théorème d'inertie de Sylvester mentionné plus haut).

Dans une base orthonormale, le produit scalaire de deux vecteurs \vec{u} et \vec{v} s'exprime en termes de leurs composantes (u^α) et (v^α) par [cf. (2.48)] :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = -u^0 v^0 + u^1 v^1 + u^2 v^2 + u^3 v^3. \quad (2.63)$$

On retrouve ainsi la formule (2.45). Les bases orthonormales sont donc celles où l'on lit directement la signature $(-, +, +, +)$ de \mathbf{g} .

Exemple : Considérons pour $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ l'espace-temps de la relativité restreinte. Soit $(x^\alpha) = (x^0 = ct, x, y, z)$ un système de coordonnées associé à un repère inertiel et $(\vec{\partial}_\alpha) = (\vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_x, \vec{\partial}_y, \vec{\partial}_z)$ la base naturelle correspondante. La matrice de \mathbf{g} dans cette base n'est autre que la matrice de Minkowski :

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \quad (2.64)$$

Si l'on utilise les coordonnées sphériques $(x^{\alpha'}) = (x^0 = ct, r, \theta, \varphi)$ reliées à (ct, x, y, z) suivant (2.21), la matrice de passage $P_{\alpha'}^\alpha$ vers la nouvelle base naturelle $(\vec{\partial}_{\alpha'}) = (\vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ se lit sur les formules (2.25), (2.28) et (2.29). Les composantes de \mathbf{g} dans la base $(\vec{\partial}_{\alpha'})$ s'obtiennent alors à partir de l'Eq. (2.55) ; il vient :

$$g_{\alpha'\beta'} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.65)$$

On voit clairement sur cette expression que $(\vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ ne constitue pas une base orthonormale (cf. la « longueur variable » du vecteur $\vec{\partial}_\varphi$ sur la Fig. 2.6). Par contre, la base vectorielle $(\vec{e}_{\hat{\alpha}})$ obtenue en renormalisant les vecteurs $\vec{\partial}_{\alpha'}$ suivant

$$\begin{cases} \vec{e}_{\hat{0}} &= \vec{\partial}_0 \\ \vec{e}_{\hat{r}} &= \vec{\partial}_r \\ \vec{e}_{\hat{\theta}} &= \frac{1}{r} \vec{\partial}_\theta \\ \vec{e}_{\hat{\varphi}} &= \frac{1}{r \sin \theta} \vec{\partial}_\varphi \end{cases} \quad (2.66)$$

est une base orthonormale. Elle est représentée sur la Fig. 2.5. Notons qu'elle n'est pas une base naturelle : il n'existe aucun système de coordonnées $(x^{\hat{\alpha}})$ tel que $\vec{e}_{\hat{\alpha}} = \vec{\partial}_{\hat{\alpha}}$.

2.3.4 Genre des 4-vecteurs

Si l'on considère le produit scalaire classique (2.43) sur l'espace euclidien de dimension trois, sa signature $(+, +, +)$ fait qu'il est *défini positif*, c'est-à-dire que $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ pour tout vecteur \vec{v} , l'égalité n'étant réalisée que si, et seulement si, $\vec{v} = \vec{0}$.

Par contre la signature $(-, +, +, +)$ de \mathbf{g} ne lui permet pas d'être défini positif. Le produit scalaire d'un 4-vecteur \vec{u} avec lui-même peut a priori avoir n'importe quel signe et être nul sans que \vec{u} le soit. On pose alors les définitions suivantes :

On dit qu'un vecteur \vec{u} de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ est :

- *du genre temps* ssi : $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) < 0$;
- *du genre espace* ssi : $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) > 0$;
- *du genre lumière* ssi : $\vec{u} \neq 0$ et $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$. Dans le vocabulaire de l'algèbre linéaire, les vecteurs du genre lumière s'appellent aussi *vecteurs isotropes* de la forme bilinéaire \mathbf{g} .

Ces définitions à connotation « physique » seront justifiées au § 2.4.

Remarque : « du genre lumière » se dit « null » en anglais ; ainsi lorsqu'on rencontre le terme « null vector » dans un texte anglais, il ne s'agit pas du vecteur nul, mais d'un vecteur de genre lumière.

Un 4-vecteur \vec{u} est dit *unitaire* ssi \vec{u} est du genre temps et vérifie $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) = -1$ ou bien \vec{u} est du genre espace et vérifie $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u}) = 1$.

2.3.5 Représentation graphique des vecteurs

Pour dessiner des figures dans l'espace-temps, on supprimera une ou deux dimensions : on aura alors respectivement des dessins à trois dimensions en perspective ou des dessins plans. Deux vecteurs orthogonaux pour la métrique \mathbf{g} ne seront pas nécessairement représentés par deux flèches perpendiculaires (au sens usuel du terme) : par exemple, un vecteur de genre lumière est orthogonal à lui-même alors que graphiquement, une flèche ne peut évidemment pas être perpendiculaire à elle-même. Cet aspect des graphiques d'espace-temps est illustré sur les Fig. 2.7 et Fig. 2.8, sur lesquelles nous invitons le lecteur à prendre le temps de réfléchir.

Commençons par discuter la Fig. 2.7. On considère une base vectorielle (\vec{e}_α) orthonormale pour la métrique \mathbf{g} . Pour obtenir une figure bidimensionnelle, nous ne représenterons que les deux premiers vecteurs de cette base : \vec{e}_0 est par définition un vecteur du genre temps unitaire : $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_0 = -1$ [cf. (2.58)], \vec{e}_1 est un vecteur du genre espace unitaire : $\vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 = 1$ [cf. (2.59)], et \vec{e}_0 et \vec{e}_1 sont mutuellement orthogonaux : $\vec{e}_0 \cdot \vec{e}_1 = 0$ [cf. (2.60)]. Sur la Fig. 2.7, on a choisi *arbitrairement* de représenter les vecteurs \vec{e}_0 et \vec{e}_1 par deux flèches perpendiculaires, avec le vecteur du genre temps vertical et celui du genre espace horizontal. Par ailleurs, nous avons dessiné quatre autres vecteurs, \vec{a}_0 , \vec{a}_1 , \vec{u} et \vec{v} , dont les composantes respectives dans la base $(\vec{e}_0, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ sont

$$a_0^\alpha = (\sqrt{2}, 1, 0, 0), \quad a_1^\alpha = (1, \sqrt{2}, 0, 0), \quad u^\alpha = (1, 1, 0, 0), \quad v^\alpha = (1, -1, 0, 0). \quad (2.67)$$

La première remarque que l'on peut faire est que, bien que les flèches qui les représentent sur la Fig. 2.7 ne soient pas perpendiculaires, les vecteurs \vec{a}_0 et \vec{a}_1 sont orthogonaux pour

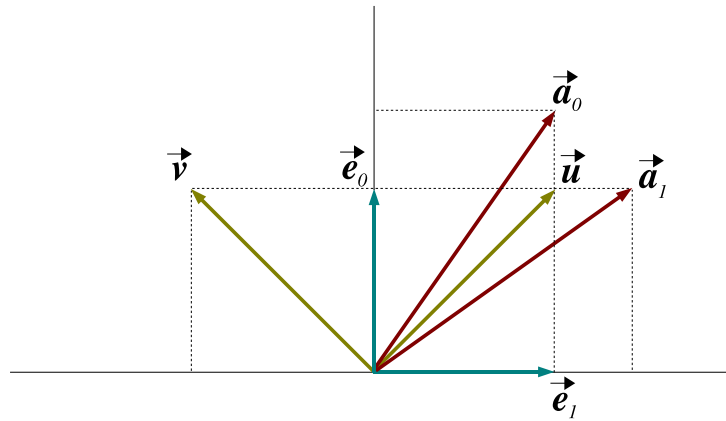


FIGURE 2.7 – 4-vecteurs de l'espace $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$: deux dimensions d'espace ont été supprimées si bien que la figure est plane.

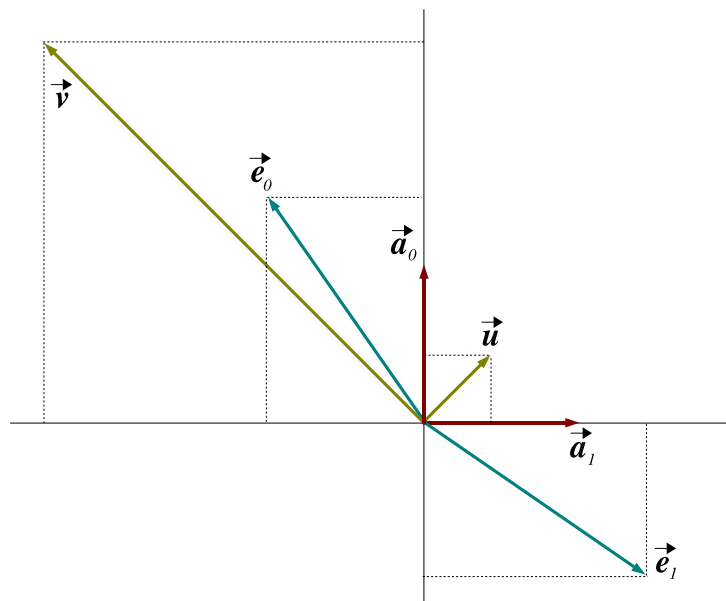


FIGURE 2.8 – Même vecteurs de l'espace $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ que sur la Fig. 2.7, mais dans une représentation basée sur la base orthonormale (\vec{a}_1, \vec{a}_2) , plutôt que (\vec{e}_1, \vec{e}_2) . Même si la figure a l'air très différente de la Fig. 2.7, on peut constater que les égalités vectorielles $\vec{u} = \vec{e}_0 + \vec{e}_1$ et $\vec{v} = \vec{e}_0 - \vec{e}_1$ sont bien satisfaites. Par ailleurs, les vecteurs du genre lumière, c'est-à-dire \vec{u} et \vec{v} , sont dessinés à 45° , tout comme sur la Fig. 2.7.

la métrique \mathbf{g} . Vérifions-le explicitement, en utilisant le fait que dans la base orthonormale (\vec{e}_α) le produit scalaire est donné par (2.63) :

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_1 = g_{\alpha\beta} a_0^\alpha a_1^\beta = \eta_{\alpha\beta} a_0^\alpha a_1^\beta = -\sqrt{2} \times 1 + 1 \times \sqrt{2} + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \quad (2.68)$$

De plus, \vec{a}_0 et \vec{a}_1 sont des vecteurs unitaires, \vec{a}_0 étant du genre temps et \vec{a}_1 du genre espace :

$$\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 = \eta_{\alpha\beta} a_0^\alpha a_0^\beta = -\sqrt{2} \times \sqrt{2} + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = -1, \quad (2.69)$$

$$\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = \eta_{\alpha\beta} a_1^\alpha a_1^\beta = -1 \times 1 + \sqrt{2} \times \sqrt{2} + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 1. \quad (2.70)$$

Ainsi la « norme » du vecteur \vec{a}_1 pour la métrique \mathbf{g} est la même que celle du vecteur \vec{e}_1 , à savoir 1, bien que sur la Fig. 2.7 ces deux vecteurs soient représentés par des flèches de longueurs différentes.

A l'inverse de \vec{a}_0 et \vec{a}_1 , les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont représentés sur la Fig. 2.7 par des flèches perpendiculaires, alors qu'ils ne sont pas orthogonaux pour la métrique \mathbf{g} :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha v^\beta = -1 \times 1 + 1 \times (-1) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = -2 \neq 0. \quad (2.71)$$

Remarquons par ailleurs que ces vecteurs sont du genre lumière :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = \eta_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0, \quad (2.72)$$

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = \eta_{\alpha\beta} v^\alpha v^\beta = -1 \times 1 + (-1) \times (-1) + 0 \times 0 + 0 \times 0 = 0. \quad (2.73)$$

Les vecteurs \vec{a}_0 et \vec{a}_1 étant orthogonaux et unitaires, avec $\vec{a}_0 \cdot \vec{a}_0 = -1$ et $\vec{a}_1 \cdot \vec{a}_1 = 1$, ils forment le début d'une base orthonormale, que l'on peut compléter par exemple par \vec{e}_2 et \vec{e}_3 . On définit ainsi la nouvelle base orthonormale

$$(\vec{e}'_\alpha) = (\vec{a}_0, \vec{a}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3). \quad (2.74)$$

Le changement de base $(\vec{e}_\alpha) \rightarrow (\vec{e}'_\alpha)$ est donné par les relations

$$\begin{cases} \vec{a}_0 &= \sqrt{2}\vec{e}_0 + \vec{e}_1 \\ \vec{a}_1 &= \vec{e}_0 + \sqrt{2}\vec{e}_1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} \vec{e}_0 &= \sqrt{2}\vec{a}_0 - \vec{a}_1 \\ \vec{e}_1 &= -\vec{a}_0 + \sqrt{2}\vec{a}_1 \end{cases}, \quad (2.75)$$

que l'on déduit aisément de (2.67). Dans la base (\vec{e}'_α) les composantes des vecteurs \vec{e}_0 , \vec{e}_1 , \vec{u} et \vec{v} sont les suivantes

$$\begin{aligned} e_0^{\alpha'} &= (\sqrt{2}, -1, 0, 0), & e_1^{\alpha'} &= (-1, \sqrt{2}, 0, 0), & u^{\alpha'} &= (\sqrt{2} - 1, \sqrt{2} - 1, 0, 0), \\ v^{\alpha'} &= (\sqrt{2} + 1, -\sqrt{2} - 1, 0, 0). \end{aligned} \quad (2.76)$$

Nous avons souligné plus haut que la représentation des vecteurs (\vec{e}_0, \vec{e}_1) par des flèches perpendiculaires sur la Fig. 2.7 était un choix arbitraire. Dessinons alors une nouvelle figure en privilégiant la base orthonormale fondée sur (\vec{a}_0, \vec{a}_1) plutôt que (\vec{e}_0, \vec{e}_1) , c'est-à-dire en représentant \vec{a}_0 et \vec{a}_1 par deux flèches perpendiculaires, l'une verticale et l'autre horizontale. Le dessin des vecteurs \vec{e}_0 , \vec{e}_1 , \vec{u} et \vec{v} se déduit alors des composantes (2.76). On obtient alors la Fig. 2.8. Elle est d'aspect très différent de la Fig. 2.7, mais soulignons

que les deux figures sont deux représentations du même espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ tangent à l'espace-temps \mathcal{E} au point P . Les vecteurs dessinés y sont les mêmes, simplement ces deux représentations sont basées sur deux bases orthonormales différentes : (\vec{e}_0, \vec{e}_1) pour la Fig. 2.7 et (\vec{a}_0, \vec{a}_1) pour la Fig. 2.8. Aucune de ces deux bases orthonormales n'est privilégiée par rapport à la métrique \mathbf{g} , qui est la seule structure fondamentale introduite jusqu'ici.

Il y a tout de même un point commun qu'il convient de souligner entre les Figs. 2.7 et 2.8 : les directions des vecteurs du genre lumière \vec{u} et \vec{v} sont les mêmes dans les deux schémas, à savoir des droites à $\pm 45^\circ$. C'est en fait une propriété fondamentale de tous les diagrammes d'espace-temps que nous construirons : les directions des vecteurs du genre lumière seront toujours des droites inclinées à $\pm 45^\circ$ par rapport aux axes de la figure. Autrement dit on privilégie les seules directions que l'on peut canoniquement associer au tenseur métrique \mathbf{g} , à savoir les directions isotropes (carré scalaire nul pour la métrique \mathbf{g}), que nous allons discuter à présent.

2.3.6 Cône isotrope

Dans l'espace vectoriel $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, l'ensemble des vecteurs du genre lumière constitue ce qu'en algèbre linéaire, on appelle le cône isotrope \mathcal{I} de la forme bilinéaire \mathbf{g} . Le mot *cône* signifie que si $\vec{v} \in \mathcal{I}$, alors $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \vec{v} \in \mathcal{I}$.

Le cône isotrope est représenté graphiquement sur la Fig. 2.9. Il sépare les vecteurs du genre temps de ceux du genre espace : les premiers sont situés à l'intérieur du cône, les seconds à l'extérieur. De plus, le cône isotrope comprend deux nappes. On convient d'appeler nappe du futur l'une de ces deux nappes, soit \mathcal{I}^+ . La deuxième nappe est appelée nappe du passé et notée \mathcal{I}^- . On peut alors ranger les 4-vecteurs du genre temps en deux catégories distinctes : les 4-vecteurs situés à l'intérieur de la nappe du futur (resp. du passé) sont dits orientés vers le futur (resp. orientés vers le passé). On qualifie de choix d'une flèche du temps le choix de la nappe \mathcal{I}^+ .

2.3.7 Distance entre deux points

Considérons deux points P et P' infiniment proches sur la variété \mathcal{E} . Nous avons vu au § 2.2.3 qu'on peut leur associer un vecteur séparation infinitésimal \overrightarrow{dP} qui appartient à l'espace tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$. On définit alors le carré de la distance entre P et P' vis-à-vis du tenseur métrique \mathbf{g} comme le nombre réel infinitésimal

$$ds^2 := \mathbf{g}(\overrightarrow{dP}, \overrightarrow{dP}). \quad (2.77)$$

Le signe de ds^2 dépend évidemment du genre du vecteur \overrightarrow{dP} : $ds^2 > 0$ si \overrightarrow{dP} est du genre espace, $ds^2 = 0$ si \overrightarrow{dP} est du genre lumière et $ds^2 < 0$ si \overrightarrow{dP} est du genre temps. Étant donné un système de coordonnées (x^α) au voisinage de P , soit dx^α la différence de coordonnées entre P' et P . En vertu de l'Eq. (2.37), (dx^α) constitue également les composantes du vecteur \overrightarrow{dP} dans la base naturelle $\vec{\partial}_\alpha$, si bien que (2.77) s'écrit

$$\boxed{ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}. \quad (2.78)$$

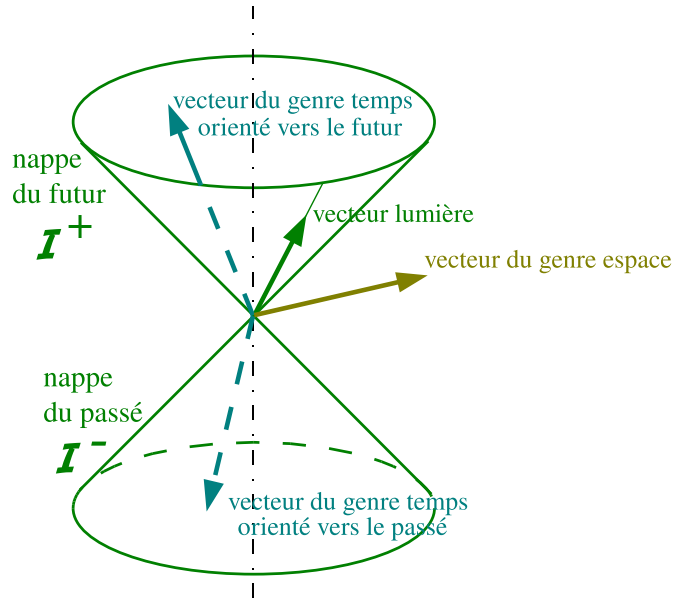


FIGURE 2.9 – Cône isotrope de la métrique g (une dimension d'espace a été supprimée).

Lorsque la séparation entre les points P et P' n'est plus infinitésimale, il faut se donner une courbe reliant P et P' et définir la distance en intégrant l'élément $\sqrt{\pm ds^2}$ le long de cette courbe. Le résultat obtenu dépend évidemment du choix de la courbe. Nous verrons au § 2.6 qu'il existe des courbes qui minimisent ou maximisent la distance entre P et P' : ce sont les courbes *géodésiques*.

Remarque : La notion de distance sur \mathcal{E} qui vient d'être introduite justifie le qualificatif de métrique attribué au tenseur g .

2.3.8 Bilan

Toute la description mathématique de l'espace-temps relativiste est contenue dans le couple (\mathcal{E}, g) , où \mathcal{E} est une variété différentiable de dimension 4 et g un champ tensoriel de type $\binom{0}{2}$ sur \mathcal{E} , représentant une forme bilinéaire symétrique non dégénérée et de signature $(-, +, +, +)$, appelée tenseur métrique. La différence fondamentale entre la relativité restreinte (qui décrit les interactions autres que gravitationnelle) et la relativité générale (qui incorpore la gravitation) est la suivante :

- en relativité restreinte, à la fois \mathcal{E} et g sont fixés a priori : $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ et g est la métrique de Minkowski ; le couple (\mathcal{E}, g) est appelé *espace-temps de Minkowski* ;
- en relativité générale : ni \mathcal{E} , ni g ne sont déterminés a priori : en particulier, g doit être calculé en résolvant l'équation d'Einstein, que nous verrons au Chap. 4.

Notons cependant que pour une grande classe de problèmes (espace-temps asymptotiquement plat et ne contenant pas de trous noirs), on a $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$, tout comme en relativité restreinte. Par contre, il reste toujours à résoudre l'équation d'Einstein pour déterminer g .

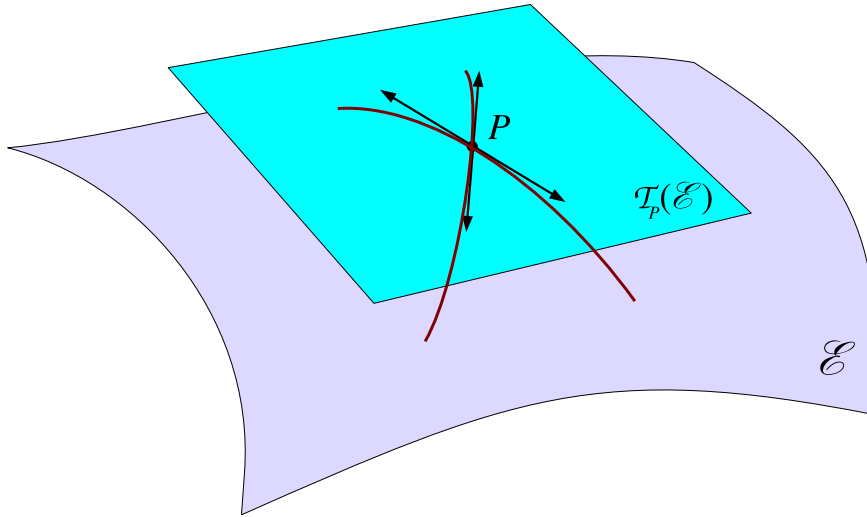


FIGURE 2.10 – Cône isotrope dans l'espace vectoriel tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ en un point P et cône de lumière passant par ce point.

2.4 Lignes d'univers

2.4.1 Trajectoires des photons et cône de lumière

Ayant introduit le cadre géométrique $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, nous sommes en mesure d'énoncer le premier postulat physique à la base de la théorie de la relativité : les photons (et plus généralement les particules de masse nulle) sont décrits par des courbes de \mathcal{E} qui (i) sont du genre lumière, c'est-à-dire dont les vecteurs tangents sont en tout point du genre lumière et (ii) sont des *géodésiques* de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, au sens qui sera défini au § 2.6.3. Le fait qu'une particule comme le photon soit représentée par une courbe (sous-variété de \mathcal{E} de dimension 1) et non par un point est bien évidemment la traduction spatio-temporelle du concept de particule : la courbe est constituée par toutes les « positions successives » occupées par la particule.

En un point P de \mathcal{E} donné, l'ensemble des courbes représentant les photons, a pour support un cône infinitésimal, que l'on peut voir comme l'empreinte du cône isotrope de l'espace vectoriel tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ (cf. Fig. 2.10). Ce cône infinitésimal est appelé *cône de lumière* au point P ; il est formé de toutes les rayons lumineux émis depuis P (nappe du futur) ou reçus en P (nappe du passé).

Le fait que les cônes de lumière soient une structure intrinsèque de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, c'est-à-dire que leur définition ne fasse appel aucunement à la notion d'observateur, est la traduction géométrique de l'indépendance de la vitesse de la lumière par rapport à tous les observateurs inertiels (l'un des postulats historiques d'Einstein (1905)).

Un photon physique est décrit non seulement par une géodésique \mathcal{C} de genre lumière, mais par aussi par la donnée d'un vecteur \vec{p} tangent à \mathcal{C} en tout point. Ce vecteur, qui a la dimension d'une impulsion, est appelé *quadri-impulsion* (ou *4-impulsion* du photon). Il s'agit par définition d'un vecteur de genre lumière :

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = 0. \quad (2.79)$$

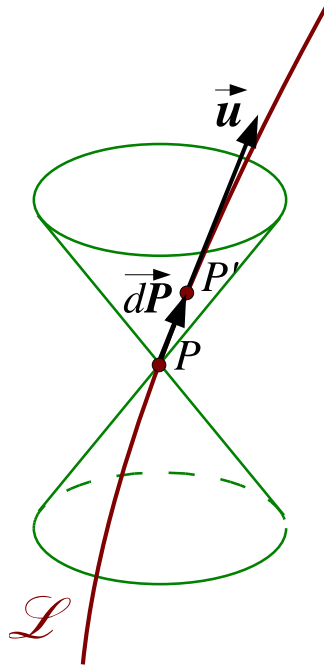


FIGURE 2.11 – Ligne d’univers d’une particule matérielle.

2.4.2 Mouvement d’un point matériel

Tout comme le photon, le fameux *point matériel* (*particule*) de la mécanique classique devient une courbe dans l’espace-temps relativiste, correspondant à toutes les « positions successives » occupées par le point matériel. Alors que les courbes décrivant les photons doivent être du genre lumière, on postule que toute courbe \mathcal{L} qui représente un point matériel doit être du genre temps, c’est-à-dire telle que tout vecteur tangent à \mathcal{L} soit du genre temps. Cette propriété mathématique traduit l’impossibilité pour des particules matérielles de voyager plus vite que la lumière. La courbe \mathcal{L} est appelée ligne d’univers de la particule matérielle considérée.

De part leur définition, les lignes d’univers des points matériels sont toujours situées à l’intérieur du cône de lumière en un point donné, comme représenté sur la Fig. 2.11.

Remarque : Alors que la ligne d’univers d’un photon doit être une géodésique (du genre lumière), on n’exige pas que la ligne d’univers d’un point matériel soit une géodésique du genre temps, mais simplement une courbe quelconque de genre temps. Il ne s’agit d’une géodésique que lorsque le point matériel n’est soumis à aucune autre interaction que celle induite par le champ gravitationnel, ainsi que nous le verrons au § 2.6.

2.4.3 Temps propre

En plus de définir les trajectoires des photons via son cône isotrope, une deuxième interprétation physique fondamentale du tenseur métrique \mathbf{g} est liée au temps mesuré

le long des lignes d'univers, c'est-à-dire au *temps propre* des particules matérielles. Soit en effet deux événements P et P' infiniment voisins sur la ligne d'univers \mathcal{L} d'un point matériel donné, tels que P' soit dans le futur de P (cf. Fig. 2.11). P et P' étant infiniment voisins, on peut leur associer un 4-vecteur séparation infinitésimal \overrightarrow{dP} , tel que défini au § 2.2.3. \overrightarrow{dP} est un vecteur tangent à \mathcal{L} . Le carré de la distance entre P et P' tel que défini par l'Eq. (2.77) est $ds^2 = \mathbf{g}(\overrightarrow{dP}, \overrightarrow{dP})$. D'après la définition d'une ligne d'univers, \overrightarrow{dP} est nécessairement du genre temps, de sorte que $ds^2 < 0$. La quantité $\sqrt{-ds^2}$ est alors bien définie et on pose

$$\boxed{d\tau := \frac{1}{c} \sqrt{-\mathbf{g}(\overrightarrow{dP}, \overrightarrow{dP})}}, \quad (2.80)$$

où c est la constante définie par (2.1). La quantité τ définie ci-dessus est appelée *temps propre* le long de la ligne d'univers \mathcal{L} . Elle correspond physiquement au temps mesuré par une horloge entraînée par le point matériel dont \mathcal{L} est la ligne d'univers, horloge qui serait infiniment précise.

Si l'on se donne un paramétrage $\mathcal{P} : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, $\lambda \mapsto P = \mathcal{P}(\lambda)$ de la ligne d'univers \mathcal{L} , \overrightarrow{dP} est relié au vecteur tangent \vec{v} associé à ce paramétrage par l'Eq. (2.33), si bien que l'on peut écrire (2.80) sous la forme

$$d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-\mathbf{g}(\vec{v}, \vec{v})} d\lambda. \quad (2.81)$$

Soulignons que bien que cette expression fasse apparaître le paramétrage \mathcal{P} de \mathcal{L} (via \vec{v} et λ), la valeur de $d\tau$ est indépendante du choix d'un tel paramétrage, ainsi qu'il est clair sur la définition (2.80). En explicitant le paramétrage \mathcal{P} dans un système de coordonnées (x^α) , sous la forme $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ [cf. Eq. (2.6)], les composantes de \vec{v} dans la base naturelle associée $(\vec{\partial}_\alpha)$ sont $v^\alpha = \dot{X}^\alpha := dX^\alpha/d\lambda$, si bien que l'expression (2.81) s'écrit

$$\boxed{d\tau = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta} d\lambda}. \quad (2.82)$$

Considérons à présent deux événements $A = p(\lambda_A)$ et $B = p(\lambda_B)$ sur la ligne d'univers \mathcal{L} , que l'on ne suppose plus infiniment proches. Le temps propre écoulé entre A et B est alors donné par l'intégrale

$$\boxed{\tau(A, B) := \int_A^B d\tau = \frac{1}{c} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-\mathbf{g}(\vec{v}(\lambda), \vec{v}(\lambda))} d\lambda}. \quad (2.83)$$

Remarque 1: Puisqu'il est relié à l'objet fondamental de la théorie de la relativité, à savoir le tenseur métrique \mathbf{g} , par lequel les lois physiques vont être énoncées, le temps propre est le seul temps réellement physique au sens suivant. La définition d'un temps le long d'une ligne d'univers est a priori arbitraire : on peut choisir le temps donné par une horloge « dérégulée », dont la seule fonction est de fournir une suite de « tics ». Ce qui distingue le temps propre, c'est qu'étant lié au tenseur métrique, les lois physiques exprimées à l'aide du temps propre ont une forme plus

simple que si on utilisait un temps quelconque. C'est donc essentiellement pour une raison de commodité que l'on emploie le temps propre et non le temps donné par une horloge quelconque (Poincaré 1898).

Lorsque l'on considère un être humain, le temps propre le long de sa ligne d'univers est également le temps le plus commode pour décrire son évolution physiologique, étant donnée la nature physique des processus biologiques. En admettant que le temps physiologique soit bien celui perçu par la conscience, on pourra imaginer le temps propre le long d'une ligne d'univers comme le temps ressenti par un observateur humain qui se déplacerait le long de cette ligne d'univers.

Remarque 2: Comme on vient de le voir ci-dessus, la notion physique fondamentale qui apparaît une fois introduit le tenseur métrique et les lignes d'univers est celle de temps et non de distance.

2.4.4 Quadrivitesse

L'introduction du temps propre va nous permettre d'associer à chaque ligne d'univers \mathcal{L} un champ de vecteurs tangents indépendant de tout paramétrage. On appelle en effet *quadrivitesse* ou *4-vitesse* du point matériel dont la ligne d'univers est \mathcal{L} le vecteur de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ défini en tout point $P \in \mathcal{L}$ par

$$\vec{u} := \frac{1}{c} \frac{d\vec{P}}{d\tau}, \quad (2.84)$$

où $d\vec{P}$ est le vecteur déplacement élémentaire de P en un point de \mathcal{L} infiniment voisin (cf. § 2.2.3) et $d\tau$ l'élément de temps propre correspondant, suivant (2.80). En terme de composantes par rapport à un système de coordonnées (x^α) , la relation (2.84) s'écrit, compte tenu de (2.37),

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau}. \quad (2.85)$$

\vec{u} est par construction un vecteur tangent à \mathcal{L} . Le facteur c dans l'Eq. (2.84) fait qu'il est sans dimension. Si l'on souhaite donner un sens mathématique rigoureux à la dérivée (2.84), il suffit de considérer le paramétrage de \mathcal{L} par son temps propre $c\tau : \vec{u}$ n'est alors autre que le vecteur tangent correspondant à ce paramétrage. En combinant (2.80) et (2.84), on constate que \vec{u} est un vecteur unitaire pour la métrique \mathbf{g} :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = -1. \quad (2.86)$$

Rappelons que la notation $\vec{u} \cdot \vec{u}$ désigne le produit scalaire $\mathbf{g}(\vec{u}, \vec{u})$.

Étant donné un paramétrage $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ de la ligne d'univers \mathcal{L} dans un système de coordonnées (x^α) , on a $dP^\alpha = \dot{X}^\alpha d\lambda$ [cf. Eq. (2.33)] et $d\tau = c^{-1} \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta} d\lambda$ [cf. Eq. (2.82)]. En reportant ces valeurs dans l'Eq. (2.84), on obtient les composantes de la 4-vitesse par rapport à la base naturelle $\vec{\partial}_\alpha$:

$$u^\alpha = \frac{\dot{X}^\alpha}{\sqrt{-g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu}}. \quad (2.87)$$

Exemple : Prenons pour \mathcal{E} l'espace-temps de Minkowski et pour $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ un système de coordonnées cartésiennes⁷ correspondant à un référentiel inertiel. Considérons un point matériel animé d'une vitesse $V = dx/dt$ le long de l'axe x dans ce référentiel. En prenant t comme paramètre, l'équation de sa ligne d'univers est donnée par

$$\begin{cases} ct = X^0(t) = ct \\ x = X^1(t) = Vt \\ y = X^2(t) = 0 \\ z = X^3(t) = 0, \end{cases} \quad (2.88)$$

si bien que

$$(\dot{X}^\alpha) = (c, V, 0, 0). \quad (2.89)$$

Puisque le référentiel considéré est inertiel, la matrice $g_{\mu\nu}$ des composantes de \mathbf{g} est la matrice de Minkowski (2.62). On obtient alors

$$g_{\mu\nu}\dot{X}^\mu\dot{X}^\nu = -c^2 + V^2. \quad (2.90)$$

En reportant (2.89) et (2.90) dans (2.87), il vient

$$(u^0, u^x, u^y, u^z) = \left(\frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}}, \frac{1}{\sqrt{1 - V^2/c^2}} \frac{V}{c}, 0, 0 \right). \quad (2.91)$$

On retrouve ainsi les formules bien connues de la relativité restreinte.

Remarque : Contrairement à la vitesse « ordinaire », la 4-vitesse d'une particule matérielle a été définie sans référence à un observateur ou à un référentiel. Il s'agit d'une quantité absolue, qui ne dépend que de la particule considérée. Ainsi, tout n'est pas relatif dans la théorie de la relativité...

2.4.5 Quadri-impulsion

Une particule matérielle est caractérisée par une constante $m > 0$, que l'on appelle sa masse au repos, ou encore tout simplement sa masse. Cette constante a évidemment la dimension d'une masse. À partir de m et de la 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ de la particule, on forme le vecteur quadri-impulsion (ou 4-impulsion) suivant

$$\boxed{\vec{\mathbf{p}} := mc\vec{\mathbf{u}}}. \quad (2.92)$$

Puisque nous avons choisi la 4-vitesse sans dimension, $\vec{\mathbf{p}}$ a la dimension d'une quantité de mouvement. Étant donné que la 4-vitesse est tangente à la ligne d'univers de la particule, il en est de même de la 4-impulsion (cf. Fig. 2.12). Tout comme pour la 4-impulsion d'un photon introduite au § 2.4.1, la 4-impulsion contient l'intégralité de la description physique (non quantique) d'une particule matérielle sans spin ni structure interne. En

7. Rappelons que suivant la convention énoncée au § 2.2.1, nous utilisons ct et non t comme coordonnée pour que toutes les coordonnées sur \mathcal{E} soient homogènes à des longueurs.

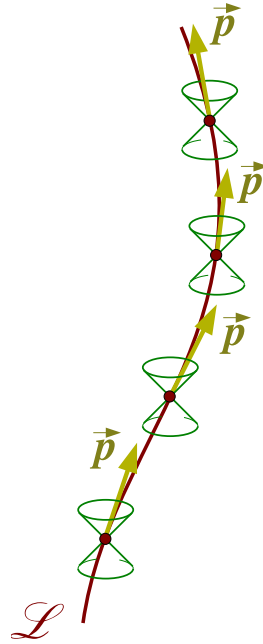


FIGURE 2.12 – Vecteur 4-impulsion en différents points de la ligne d’univers \mathcal{L} d’une particule matérielle.

particulier, la masse de la particule s’obtient à partir du carré scalaire de \vec{p} , puisque la relation de normalisation (2.86) de \vec{u} conduit à

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = -m^2 c^2. \quad (2.93)$$

2.5 Observateurs

2.5.1 Simultanéité et mesure du temps

Considérons un observateur \mathcal{O} , que nous modéliserons par un point matériel de ligne d’univers \mathcal{L}_0 . Nous supposerons qu’il est équipé d’une horloge ; il peut donc mesurer le temps propre (que nous noterons t) entre deux événements quelconques le long de sa ligne d’univers. Il effectue alors une datation des événements de \mathcal{L}_0 en choisissant un événement de \mathcal{L}_0 comme origine des temps propres ($t = 0$). Mais comment peut-il dater les événements qui ne se produisent pas sur sa ligne d’univers ?

Une première réponse consiste à attribuer la date t_A à tout événement simultanément avec l’événement A de temps propre t_A sur la ligne d’univers de \mathcal{O} . Mais une telle définition suppose comme donnée a priori la notion de *simultanéité*. Cette notion va de soi dans la théorie de Newton qui stipule l’existence d’un temps absolu, indépendant de tout observateur, en référence duquel on peut définir la simultanéité (cf. Fig. 2.13a). Mais il n’en est pas de même pour l’espace-temps relativiste où aucun « découpage » temporel n’est donné a priori (cf. Fig. 2.13b) : rappelons que les seules structures privilégiées dans l’espace-temps

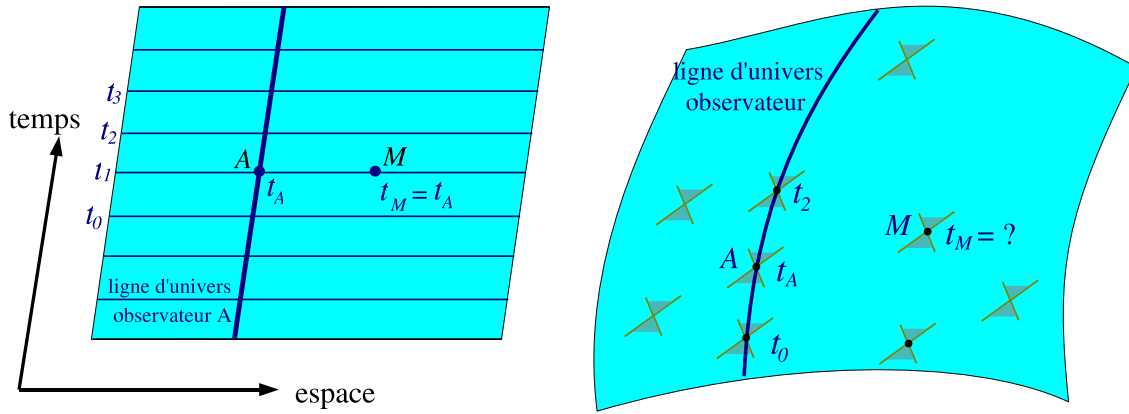


FIGURE 2.13 – Simultanéité et datation (a) dans l'espace-temps newtonien ; (b) dans l'espace-temps relativiste.

relativiste sont celles liées au tenseur métrique g . Ce dernier n'induit pas de feuilletage privilégié par des surfaces du genre espace (comme le feuilletage de l'espace-temps newtonien dessiné sur la Fig. 2.13a), la seule structure que l'on peut associer canoniquement au tenseur métrique étant celle des cônes de lumière, définis par les vecteurs isotropes de la forme bilinéaire g (§ 2.4.1).

Henri Poincaré (1898) a été l'un des premiers à remettre en cause la notion de simultanéité comme allant de soi. Il a fait remarquer que nous n'avons pas d'intuition directe de la simultanéité de deux événements distants ni même de leur ordre d'occurrence. Il a montré que ces notions sont intimement liées à la définition du temps lui-même. Poincaré arrive à la conclusion que la simultanéité doit résulter d'une convention arbitraire qu'il convient de préciser. Un critère de sélection entre différentes conventions pourra être la recherche d'une forme la plus simple possible pour l'énoncé des lois physiques. C'est ce même critère qui nous a fait préférer au § 2.4.3 l'usage du temps propre plutôt qu'une autre échelle de temps le long d'une ligne d'univers donnée.

En 1900, Poincaré avance l'idée de synchronisation des horloges d'un observateur en mouvement par l'échange de signaux lumineux. Suivant ce principe, Albert Einstein (1905) a proposé la définition suivante de la simultanéité de deux événements par rapport à un observateur donné. À cette fin, nous supposons que notre observateur \mathcal{O} est équipé, en plus d'une horloge, d'un dispositif d'émission et de réception de photons. Soit A un événement de temps propre t le long de la ligne d'univers de \mathcal{O} et M un événement quelconque de \mathcal{E} . On dira que M est *simultané à A pour l'observateur \mathcal{O}* ssi :

$$t = \frac{1}{2}(t_1 + t_2), \quad (2.94)$$

où t_1 est le temps propre (vis-à-vis de \mathcal{O}) d'émission par \mathcal{O} d'un photon qui atteint l'événement M et est réfléchi (sans délai) en M pour atteindre de nouveau l'observateur \mathcal{O} au temps propre t_2 (cf. Fig. 2.14).

Cette définition est très naturelle et peut s'interpréter naïvement en admettant que le « temps » mis par la lumière pour aller de \mathcal{O} à M est le même que celui pour aller

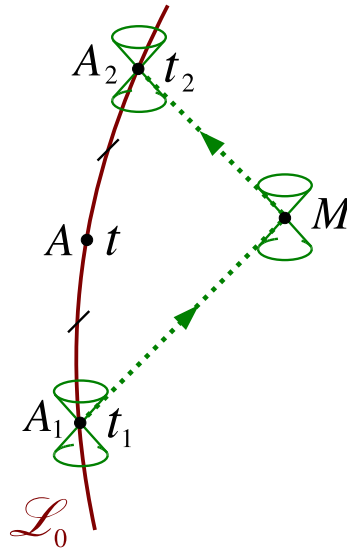


FIGURE 2.14 – Définition einsteinienne de la simultanéité : A et M sont simultanés pour l'observateur \mathcal{O} ssi A est situé à mi-temps de l'aller-retour d'un photon de \mathcal{O} vers M .

de M à \mathcal{O} . Nous disons « naïvement » car la notion de « temps de parcours » dépend de la définition de date adoptée, et donc de la notion de simultanéité. Dans l'optique d'Einstein, la définition de la simultanéité ainsi formulée s'accorde bien avec son postulat de constance de la vitesse de la lumière. Dans le cadre plus géométrique adopté ici, cette définition est tout à fait acceptable car elle ne fait intervenir que les cônes de lumière, qui représentent la seule structure canonique de l'espace-temps relativiste. De plus, cette définition est opérationnelle : elle est basée sur un critère physiquement réalisable (mesure du temps d'aller-retour d'un signal électromagnétique).

2.5.2 Espace local de repos

L'ensemble des événements simultanés à un point A de la ligne d'univers de \mathcal{O} constitue une sous-variété de dimension 3 (on dit *hypersurface*) de \mathcal{E} qui coupe \mathcal{L}_0 en A (cf. Fig. 2.15). Nous l'appellerons hypersurface de simultanéité de A pour \mathcal{O} .

Une propriété géométrique importante de l'hypersurface de simultanéité est son orthogonalité (vis-à-vis du tenseur métrique \mathbf{g}) à la ligne d'univers de l'observateur considéré.

Plaçons-nous en effet au voisinage du point A . Soit A_1 l'événement d'émission par \mathcal{O} du photon qui va se réfléchir en M et être reçu par \mathcal{O} en A_2 (cf. Fig. 2.16). Le 4-vecteur infinitésimal séparant A_1 et A est $c\delta t \vec{\mathbf{u}}$, où $\vec{\mathbf{u}}$ est la 4-vitesse de \mathcal{O} . De part la définition einsteinienne de la simultanéité, le 4-vecteur infinitésimal séparant A et A_2 est également $c\delta t \vec{\mathbf{u}}$. Par ailleurs, écrivons le 4-vecteur infinitésimal séparant A et M comme $c\delta t \vec{\mathbf{n}}$. Le fait qu'un signal lumineux soit envoyé entre A_1 et M revient alors à dire que le vecteur $c\delta t \vec{\mathbf{u}} + c\delta t \vec{\mathbf{n}}$ est du genre lumière :

$$(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{n}}) \cdot (\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{n}}) = 0. \quad (2.95)$$

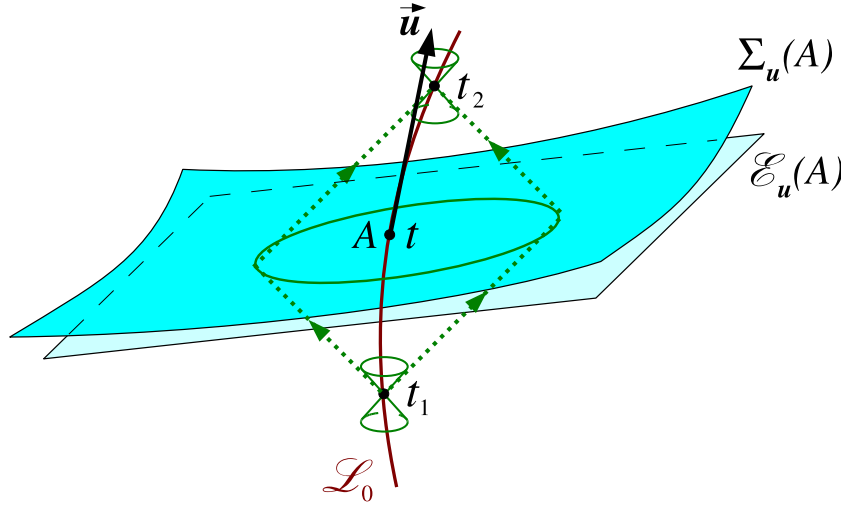


FIGURE 2.15 – Hypersurface de simultanéité $\Sigma_{\vec{u}}(A)$ et espace local de repos $\mathcal{E}_{\vec{u}}(A)$ d'un événement A d'une ligne d'univers \mathcal{L}_0 .

De même, le fait qu'un signal lumineux soit envoyé de M à A_2 revient à dire que le vecteur $-c\delta t \vec{n} + c\delta t \vec{u}$ est du genre lumière :

$$(\vec{u} - \vec{n}) \cdot (\vec{u} - \vec{n}) = 0. \quad (2.96)$$

En développant les expressions (2.95) et (2.96) et en soustrayant les résultats, on obtient :

$$\vec{u} \cdot \vec{n} = 0, \quad (2.97)$$

ce qui montre que la droite infinitésimale joignant A et M est orthogonale à la ligne d'univers \mathcal{L}_0 (cf. Fig. 2.16).

Réciproquement, si M est un événement de \mathcal{E} infiniment proche de A et tel que le 4-vecteur infinitésimal séparant A et M soit orthogonal à \vec{u} , alors en reprenant le calcul précédent à l'envers il est facile de voir que nécessairement $t = (t_1 + t_2)/2$, c'est-à-dire que M est simultané à A .

En conclusion, au voisinage de A , les événements de \mathcal{E} simultanés à A pour \mathcal{O} sont caractérisés par l'orthogonalité de $\vec{u}(A)$ et de leur séparation de A . Ils définissent donc un sous-espace vectoriel de l'espace tangent $\mathcal{T}_A(\mathcal{E})$, à savoir le sous-espace vectoriel perpendiculaire à \vec{u} . g étant une forme bilinéaire non dégénérée, ce sous-espace est de dimension 3 (il s'agit donc d'un *hyperplan* de $\mathcal{T}_A(\mathcal{E})$). De plus, cet hyperplan est du genre espace, au sens où tous les 4-vecteurs qui lui appartiennent sont du genre espace⁸. Nous l'appellerons l'*espace local de repos* de l'observateur \mathcal{O} en A . En termes « newtoniens », on peut l'interpréter comme l'espace (à 3 dimensions) à un instant fixé vis-à-vis de l'observateur \mathcal{O} .

Remarque : Il ne s'agit pas de l'espace tel que le « voit » l'observateur \mathcal{O} ; ce dernier est plutôt l'hypersurface constituée par la nappe du passé du cône de lumière à l'instant considéré.

8. tout hyperplan dont la normale est du genre temps est du genre espace (*exercice : le démontrer*).

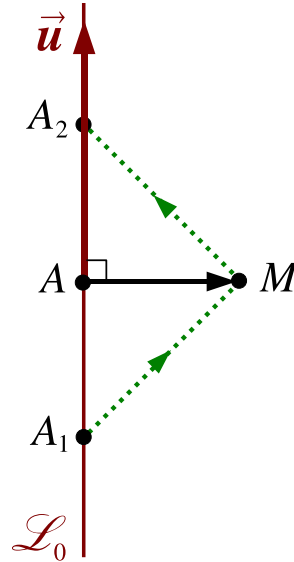


FIGURE 2.16 – Orthogonalité de \vec{AM} et \vec{u} pour M simultané à A et infiniment voisin de \mathcal{L}_0 .

2.5.3 Facteur de Lorentz

Soit \mathcal{O} un observateur, de ligne d'univers \mathcal{L} . Soit \mathcal{O}' un deuxième observateur, dont la ligne d'univers \mathcal{L}' coupe celle de \mathcal{O} en un point O . Soit τ (resp. τ') le temps propre de \mathcal{O} (resp. \mathcal{O}') en O . Au bout d'un temps propre infinitésimal $d\tau'$, \mathcal{O}' se trouve au point A (cf. Fig. 2.17). Soit alors $\tau + d\tau$ la date attribuée par \mathcal{O} à l'événement A (suivant la procédure décrite au § 2.5.1). Contrairement à ce que prédit la physique newtonienne, $d\tau$ n'est pas égal à $d\tau'$. Le rapport de ces deux intervalles de temps propre (l'un pour \mathcal{O} , l'autre pour \mathcal{O}') définit le facteur de Lorentz Γ de \mathcal{O}' par rapport à \mathcal{O} :

$$\boxed{d\tau = \Gamma d\tau'}. \quad (2.98)$$

Exprimons le facteur de Lorentz en fonction des 4-vitesses \vec{u} et \vec{u}' de respectivement \mathcal{O} et \mathcal{O}' . Soit B le point de \mathcal{L} considéré comme simultané à l'événement A par l'observateur \mathcal{O} . Notons $d\tau \vec{v}$ le vecteur déplacement infinitésimal joignant B à A . Ce vecteur appartient à l'espace local de repos de l'observateur \mathcal{O} ; il est donc orthogonal à \vec{u} . Le vecteur \vec{v} est la vitesse de \mathcal{O}' relativement à \mathcal{O} , à savoir le déplacement de \mathcal{O}' par unité de temps propre de \mathcal{O} . Étant donné que \vec{u} et \vec{u}' sont des vecteurs unitaires, on a l'égalité vectorielle (cf. Fig. 2.17) :

$$cd\tau' \vec{u}' = cd\tau \vec{u} + d\tau \vec{v}, \quad (2.99)$$

d'où, en utilisant (2.98),

$$\boxed{\vec{u}' = \Gamma \left(\vec{u} + \frac{1}{c} \vec{v} \right)}. \quad (2.100)$$

Par ailleurs, \vec{v} est dans l'espace local de repos de \mathcal{O} en A , si bien que

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0. \quad (2.101)$$

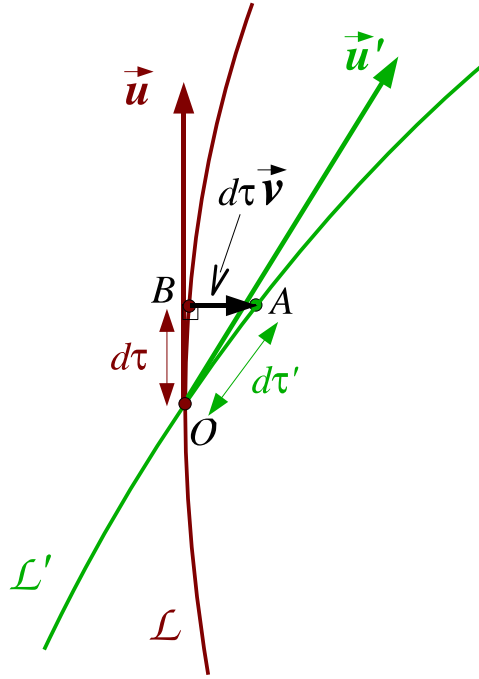


FIGURE 2.17 – Intervalles de temps propre $d\tau$ et $d\tau'$ le long des lignes d'univers \mathcal{L} et \mathcal{L}' de deux observateurs \mathcal{O} et \mathcal{O}' dont les positions coïncident en O . B est le point de \mathcal{L} considéré comme simultané de l'événement A par l'observateur \mathcal{O} et $d\tau \vec{v}$ est le vecteur déplacement infinitésimal de B en A . $d\tau$ est relié à $d\tau'$ par le facteur de Lorentz Γ : $d\tau = \Gamma d\tau'$.

Le produit scalaire de (2.100) par \vec{u} conduit alors à

$$\boxed{\Gamma = -\vec{u} \cdot \vec{u}'}, \quad (2.102)$$

où l'on a utilisé la relation (2.86) de normalisation de la 4-vitesse ($\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$). Ainsi, du point de vue géométrique, le facteur de Lorentz n'est autre que l'opposé du produit scalaire des vecteurs unitaires tangents aux deux lignes d'univers considérées.

En prenant le carré scalaire de (2.100) et en utilisant la relation de normalisation $\vec{u}' \cdot \vec{u}' = -1$ ainsi que (2.101), on obtient

$$-1 = \Gamma^2(-1 + c^{-2} \vec{v} \cdot \vec{v}),$$

d'où

$$\boxed{\Gamma = \left(1 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v}\right)^{-1/2}}. \quad (2.103)$$

Comme \vec{v} est un vecteur du genre espace (puisque appartenant à l'espace local de repos de \mathcal{O}), $\vec{v} \cdot \vec{v} \geq 0$ et la formule (2.103) montre que l'on a toujours $\Gamma \geq 1$ (phénomène de « dilatation des temps »).

2.5.4 Mesures d'énergie et de quantité de mouvement

Soit \mathcal{O} un observateur de ligne d'univers \mathcal{L}_0 et de 4-vitesse \vec{u}_0 . Considérons une particule de masse nulle (photon) ou non (particule matérielle) dont la ligne d'univers \mathcal{L}

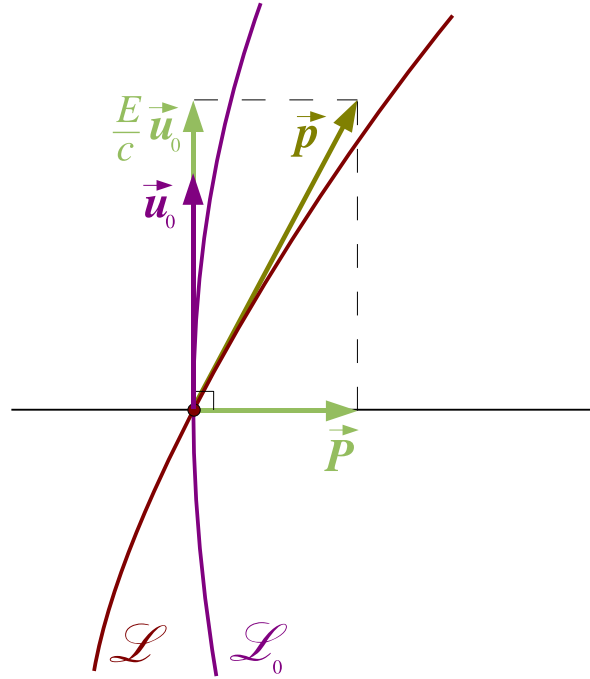


FIGURE 2.18 – Énergie E et vecteur impulsion \vec{P} d'une particule par rapport à un observateur. \mathcal{L} est la ligne d'univers de la particule et \vec{p} son vecteur 4-impulsion. \mathcal{L}_0 est la ligne d'univers de l'observateur et \vec{u}_0 sa 4-vitesse.

coupe celle de \mathcal{O} en un point O . Soit \vec{p} le vecteur 4-impulsion de la particule. Rappelons que \vec{p} est un vecteur tangent à \mathcal{L} .

L'énergie de la particule mesurée par l'observateur \mathcal{O} est donnée par le produit scalaire

$$\boxed{E := -\vec{u}_0 \cdot \vec{p} c}. \quad (2.104)$$

Dans le cas d'une particule massive, de masse m , la 4-impulsion \vec{p} est reliée à la 4-vitesse \vec{u} par $\vec{p} = mc\vec{u}$ [Eq. (2.92)] et le produit scalaire $-\vec{u}_0 \cdot \vec{u}$ n'est autre que le facteur de Lorentz Γ de la particule par rapport à \mathcal{O} [cf. Eq. (2.102)]. L'Eq. (2.104) conduit alors à

$$\boxed{E = \Gamma mc^2}. \quad (2.105)$$

On retrouve ainsi la célèbre formule de la relativité restreinte.

La quantité de mouvement ou impulsion de la particule mesurée par l'observateur \mathcal{O} est donnée par le vecteur

$$\boxed{\vec{P} := \vec{p} + (\vec{u}_0 \cdot \vec{p}) \vec{u}_0}, \quad (2.106)$$

formule que l'on peut écrire

$$\vec{P} = \vec{p} - \frac{E}{c} \vec{u}_0. \quad (2.107)$$

Le vecteur \vec{P} appartient à l'espace local de repos de l'observateur \mathcal{O} , puisque par construction

$$\vec{u}_0 \cdot \vec{P} = 0. \quad (2.108)$$

Puisque \vec{u}_0 est unitaire, on peut voir la quantité E/c définie par (2.104) comme la composante de \vec{p} sur \vec{u}_0 . De son côté, \vec{P} constitue la composante de \vec{p} orthogonale à \vec{u}_0 (cf. Fig. 2.18). On peut d'ailleurs réécrire (2.107) sous la forme d'une décomposition orthogonale :

$$\vec{p} = \frac{E}{c} \vec{u}_0 + \vec{P} \quad \text{avec} \quad \vec{u}_0 \cdot \vec{P} = 0. \quad (2.109)$$

En formant le carré scalaire de \vec{p} à partir de cette décomposition en y reportant (2.79) pour un photon ou (2.93) pour une particule massive, on obtient la relation

$$\boxed{E^2 = m^2 c^4 + \vec{P} \cdot \vec{P} c^2}, \quad (2.110)$$

où m est la masse de la particule ($m = 0$ pour un photon).

Remarque : Le fait que les formules (2.105) et (2.110) soient les mêmes qu'en relativité restreinte vient de ce qu'il s'agit de résultats de mesures locales (au point O où les lignes d'univers de \mathcal{O} et de la particule se croisent). La courbure de l'espace-temps, qui traduit la gravitation et qui n'apparaît pas dans les Eqs. (2.105) et (2.110), ne se fait sentir que lorsqu'on effectue des mesures sur un domaine d'extension finie.

Exemple : Reprenons l'exemple considéré au § 2.4.4, à savoir celui du mouvement d'une particule matérielle rapporté à un observateur inertiel \mathcal{O} . Les composantes de la 4-vitesse de la particule (par rapport à des coordonnées adaptées à \mathcal{O}) étant données par l'Eq. (2.91), on déduit immédiatement de la formule (2.92) les composantes de la 4-impulsion

$$(p^0, p^x, p^y, p^z) = (\Gamma m c, \Gamma m V, 0, 0), \quad (2.111)$$

où m est la masse au repos de la particule et $\Gamma = (1 - V^2/c^2)^{-1/2} = -\vec{u}_0 \cdot \vec{u}$ est son facteur de Lorentz par rapport à \mathcal{O} . Dans le cas présent, les composantes de 4-vitesse de \mathcal{O} sont très simples :

$$(u_0^0, u_0^x, u_0^y, u_0^z) = (1, 0, 0, 0), \quad (2.112)$$

et les composantes de $g_{\alpha\beta}$ (nécessaires pour former les produits scalaires) sont données par la matrice de Minkowski (2.62). L'Eq. (2.104) conduit alors à

$$E = -g_{\alpha\beta} u_0^\alpha p^\beta c = -(-1 \times 1 \times p^0) c, \quad (2.113)$$

c'est-à-dire, en reportant p^0 depuis (2.111),

$$E = \Gamma m c^2. \quad (2.114)$$

On retrouve donc bien (2.105).

Par ailleurs, les composantes de l'impulsion de la particule mesurée par \mathcal{O} se déduisent de (2.107) et (2.111) :

$$(P^0, P^x, P^y, P^z) = (0, \Gamma m V, 0, 0). \quad (2.115)$$

On en déduit que

$$\boxed{\vec{P} = \Gamma m \vec{V}}, \quad (2.116)$$

où $\vec{V} := V \vec{\partial}_x$ est la vitesse de la particule mesurée par l'observateur \mathcal{O} . Là aussi, on retrouve une formule bien connue de la relativité restreinte.

2.6 Principe d'équivalence et géodésiques

2.6.1 Principe d'équivalence

En mécanique classique, le principe d'équivalence stipule que, pour tous les corps, la masse grave est égale à la masse inerte. En conséquence, tous les corps tombent avec la même accélération dans un champ gravitationnel donné. Cette propriété singularise la gravitation par rapport aux autres interactions : ainsi l'accélération d'une particule dans un champ électrique donné dépend sa charge électrique (plus précisément du rapport entre sa charge et sa masse inerte). Cela conduit à penser que la gravitation n'est pas une propriété des corps eux-mêmes, mais de l'espace. La théorie relativiste de la gravitation — la relativité générale — prend en compte le principe d'équivalence en traduisant la gravitation par la courbure associée à la métrique \mathbf{g} de l'espace-temps⁹. Elle stipule que les particules tests ne subissant que l'interaction gravitationnelle se déplacent sur des lignes d'univers qui sont des *géodésiques* de l'espace-temps vis-à-vis de la métrique \mathbf{g} .

Dans un espace muni d'une métrique définie positive (c'est-à-dire ayant une signature qui ne comprend que des +), les géodésiques sont les lignes de plus courte distance entre deux points. Dans le cas présent d'une métrique de signature $(-, +, +, +)$, une *géodésique* est une courbe qui rend extrémale la distance (définie par le tenseur métrique) entre deux points. On distingue en effet

- les *géodésiques du genre espace* qui minimisent la distance parmi toutes les courbes du genre espace reliant entre deux points ;
- les *géodésique du genre temps* qui maximisent la distance parmi toutes les courbes du genre temps entre deux points ;
- les *géodésiques de longueur nulle* (ou *géodésiques lumière*) qui sont des courbes du genre lumière obéissant à l'équation (2.138) ci-dessous.

Les lignes d'univers des particules matérielles étant des courbes du genre temps, le principe d'équivalence stipule qu'une particule libre de toute interaction autre que gravitationnelle se déplace suivant une géodésique du genre temps, c'est-à-dire suivant une ligne d'univers qui maximise le temps propre entre deux points. On a vu en effet que, pour une ligne d'univers, la distance métrique n'est autre que le temps propre [cf. Eq. (2.80)].

2.6.2 Équation des géodésiques

Pour déterminer l'évolution d'une particule matérielle dans un champ gravitationnel relativiste, cherchons donc la ligne d'univers \mathcal{L} qui maximise le temps propre $\tau(A, B)$ entre deux points A et B , tel que donné par l'Eq. (2.83).

Soit (x^α) un système de coordonnées de \mathcal{E} au voisinage de \mathcal{L} et $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ l'équation paramétrique de \mathcal{L} dans ce système de coordonnées [cf. Eq. (2.6)]. En combinant les Eqs. (2.83) et (2.82), on a

$$\tau(A, B) = \frac{1}{c} \int_{\lambda_A}^{\lambda_B} \sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta} d\lambda, \quad (2.117)$$

9. La définition mathématique de la courbure sera donnée dans au Chap. 4

où l'on rappelle que $\dot{X}^\alpha := dX^\alpha/d\lambda$. En vertu des équations d'Euler-Lagrange, $\tau(A, B)$ est extrémal (maximal dans le cas présent) ssi

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} \right) - \frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = 0, \quad (2.118)$$

où L est le « lagrangien » qui apparaît dans (2.117) :

$$L := L(X^\alpha, \dot{X}^\alpha) = \sqrt{-g_{\mu\nu}(X^\rho) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu} \quad (2.119)$$

On a

$$\frac{\partial}{\partial X^\alpha} (g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu) = \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu, \quad (2.120)$$

d'où

$$\frac{\partial L}{\partial X^\alpha} = -\frac{1}{2L} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu. \quad (2.121)$$

Par ailleurs,

$$\frac{\partial}{\partial \dot{X}^\alpha} (g_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu) = g_{\alpha\nu} \dot{X}^\nu + g_{\mu\alpha} \dot{X}^\mu = 2g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu, \quad (2.122)$$

où l'on a utilisé la symétrie de $g_{\mu\nu}$. On en déduit

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} = -\frac{1}{L} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu. \quad (2.123)$$

En dérivant cette expression par rapport au paramètre λ , il vient

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^\alpha} \right) = \frac{1}{L^2} \frac{dL}{d\lambda} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu - \frac{1}{L} \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\nu \dot{X}^\mu - \frac{1}{L} g_{\alpha\mu} \ddot{X}^\mu. \quad (2.124)$$

Reportons les expressions (2.121) et (2.124) dans les équations d'Euler-Lagrange (2.118) pour obtenir

$$\frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda} g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu - \frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu - g_{\alpha\mu} \ddot{X}^\mu + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = 0 \quad (2.125)$$

En écrivant

$$\frac{\partial g_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} \dot{X}^\nu \dot{X}^\mu + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} \right) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu, \quad (2.126)$$

l'Eq. (2.125) se met sous la forme

$$g_{\alpha\mu} \ddot{X}^\mu + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial g_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\alpha}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\alpha} \right) \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \kappa(\lambda) g_{\alpha\mu} \dot{X}^\mu, \quad (2.127)$$

où l'on a défini

$$\kappa(\lambda) := \frac{1}{L} \frac{dL}{d\lambda}. \quad (2.128)$$

En multipliant matriciellement l'Eq. (2.127) par la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$ [cf. Eq. (2.49)], on obtient l'équation des géodésiques cherchée :

$$\boxed{\ddot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \kappa(\lambda) \dot{X}^\alpha}, \quad (2.129)$$

avec

$$\boxed{\Gamma^\alpha_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right)}, \quad (2.130)$$

Les quantités $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont appelées symboles de Christoffel de la métrique \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) .

Si l'on choisit de paramétrer la ligne d'univers géodésique \mathcal{L} par le temps propre τ , alors $\dot{X}^\alpha = dX^\alpha/d\tau = c u^\alpha$, où u^α désigne les composantes de la 4-vitesse associée à \mathcal{L} [cf. Eq. (2.84)]. On alors, d'après (2.119) et la relation de normalisation de la 4-vitesse $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$, $L = c$. Ainsi

$$\lambda = \tau \implies L = c \implies \frac{dL}{d\lambda} = 0 \implies \kappa(\lambda) = 0. \quad (2.131)$$

En utilisant le temps propre comme paramètre, l'équation des géodésiques (2.129) se simplifie donc en

$$\boxed{\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\tau} \frac{dX^\nu}{d\tau} = 0}. \quad (2.132)$$

Si l'on suppose connu $g_{\alpha\beta}$, et donc $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$, comme fonction des coordonnées (x^α) dans la région considérée, l'équation (2.132) constitue un système de 4 équations différentielles du second ordre pour les 4 fonctions $X^\alpha(\tau)$. D'après le théorème de Cauchy, ce système admet une solution unique si l'on se fixe les conditions initiales suivantes :

$$X^\alpha(0) = x_0^\alpha \quad \text{et} \quad \dot{X}^\alpha(0) = U_0^\alpha, \quad (2.133)$$

où $x_0^0, x_0^1, x_0^2, x_0^3$ sont 4 constantes arbitraires et $U_0^0, U_0^1, U_0^2, U_0^3$ sont 4 constantes vérifiant $g_{\alpha\beta} U_0^\alpha U_0^\beta = -c^2$. La donnée de $X^\alpha(0)$ correspond à celle d'un point de \mathcal{E} et la donnée de $\dot{X}^\alpha(0) = c u^\alpha(0)$ à celle des composantes d'une 4-vitesse. Ainsi, en un point quelconque de \mathcal{E} , il passe une, et une seule, géodésique du genre temps ayant une 4-vitesse donnée.

Exemple : Si $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est l'espace-temps de Minkowski et $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ un système de coordonnées cartésiennes correspondant à un référentiel inertiel, alors les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont données par la matrice de Minkowski (2.62), qui est constante. On a donc $\partial g_{\alpha\beta} / \partial x^\gamma = 0$ de sorte que les symboles de Christoffel sont identiquement nuls dans ce cas :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0. \quad (2.134)$$

L'équation des géodésiques (2.132) se simplifie alors drastiquement :

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2} = 0. \quad (2.135)$$

Cette équation s'intègre aisément, étant données les conditions initiales (2.133) :

$$X^\alpha(\tau) = U_0^\alpha \tau + x_0^\alpha. \quad (2.136)$$

Il s'agit bien évidemment de l'équation d'une droite. On retrouve donc le fait qu'en relativité restreinte, les lignes d'univers des particules libres de toute interaction sont des droites.

2.6.3 Géodésiques de longueur nulle

Une courbe du genre lumière est par définition une courbe dont les vecteurs tangents sont du genre lumière. Si P et P' sont deux points infiniment proches d'une telle courbe, le vecteur \overrightarrow{dP} les reliant est nécessairement du genre lumière, si bien que le carré de la distance entre P et P' défini par l'Eq. (2.77) est

$$ds^2 = \mathbf{g}(\overrightarrow{dP}, \overrightarrow{dP}) = 0. \quad (2.137)$$

Cette égalité montre qu'une courbe du genre lumière est une courbe de longueur nulle de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$.

On définit une *géodésique de longueur nulle* ou *géodésique lumière* comme une courbe du genre lumière qui obéit de plus à une équation identique à l'équation (2.129) obtenue dans le cas des géodésiques du genre temps :

$$\boxed{\ddot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = \kappa(\lambda) \dot{X}^\alpha}. \quad (2.138)$$

Remarque : Une courbe de longueur nulle n'est pas nécessairement une géodésique de longueur nulle, ainsi que le montre l'exemple 2 ci-dessous. La condition (2.138) est donc plus restrictive que le fait d'être de longueur nulle. Nous verrons au Chap. 4 que (2.138) signifie que le vecteur tangent est transporté parallèlement à lui-même le long de la courbe, autrement dit que la courbe est la «plus droite possible». C'est effectivement bien le cas pour les géodésiques de l'exemple 1, mais pas pour la courbe de l'exemple 2.

La différence entre (2.129) et (2.138) réside dans les conditions initiales : si on intègre (2.138) avec $\dot{X}^\alpha(0)$ qui représente les composantes d'un vecteur du genre lumière (resp. du genre temps), on obtiendra une géodésique de longueur nulle (resp. du genre temps). Une autre différence est évidemment que l'on ne peut pas utiliser le temps propre τ pour paramétrer des géodésiques de longueur nulle. On peut toutefois toujours trouver un paramètre λ tel que l'équation prenne la même forme que (2.132) :

$$\boxed{\ddot{X}^\alpha + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = 0}. \quad (2.139)$$

En effet, considérons un changement de paramétrage $\lambda \mapsto \lambda' = f(\lambda)$ de la géodésique qui a pour équation (2.138). Soit $x^\alpha = X'^\alpha(\lambda')$ l'équation de la géodésique dans ce nouveau paramétrage. On a évidemment $X^\alpha(\lambda) = X'^\alpha(\lambda')$, si bien que

$$\frac{dX^\alpha}{d\lambda} = \frac{dX'^\alpha}{d\lambda'} \frac{df}{d\lambda} \quad \text{et} \quad \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} = \frac{d^2 X'^\alpha}{d\lambda'^2} \left(\frac{df}{d\lambda} \right)^2 + \frac{dX'^\alpha}{d\lambda'} \frac{d^2 f}{d\lambda^2}. \quad (2.140)$$

En reportant ces valeurs dans l'Eq. (2.138), il vient

$$\frac{d^2 X'^\alpha}{d\lambda'^2} + \Gamma^\alpha{}_{\mu\nu} \frac{dX'^\mu}{d\lambda'} \frac{dX'^\nu}{d\lambda'} = \left(\frac{df}{d\lambda} \right)^{-2} \left(\kappa(\lambda) \frac{df}{d\lambda} - \frac{d^2 f}{d\lambda^2} \right) \frac{dX'^\alpha}{d\lambda'}. \quad (2.141)$$

Si l'on choisit $f(\lambda)$ telle que

$$\frac{df}{d\lambda} = a \exp \left(\int_0^\lambda \kappa(\bar{\lambda}) d\bar{\lambda} \right), \quad (2.142)$$

où a est une constante, alors le membre de droite de (2.141) s'annule et on obtient la forme (2.139). Les paramètres λ pour lesquels l'équation des géodésiques de longueur nulle prend la forme (2.139) sont appelés paramètres affines de la géodésique. Cette qualification vient de ce que tout changement de paramètre de la forme

$$\lambda' = a\lambda + b, \quad a = \text{const.}, \quad b = \text{const.} \quad (2.143)$$

préserve la forme (2.139) de l'équation des géodésiques [pour le voir, il suffit de faire $\kappa(\lambda) = 0$ dans l'Eq. (2.142)].

Exemple 1: Plaçons-nous l'espace-temps de Minkowski $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ et utilisons des coordonnées inertielles $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$, tout comme dans l'exemple du § 2.6.2. En vertu de (2.134), l'équation des géodésiques (2.139) se réduit à $\dot{X}^\alpha = 0$. Cette équation s'intègre immédiatement en

$$X^\alpha(\lambda) = V^\alpha \lambda + x_0^\alpha,$$

où (V^α, x_0^α) sont des constantes. Tout comme pour les géodésiques du genre temps [cf. Eq. (2.136)], on constate donc que les géodésiques lumière de l'espace-temps de Minkowski sont des droites. Elles doivent être tangentes aux cônes de lumière, ce qui impose la restriction suivante sur les constantes (V^α) :

$$-(V^0)^2 + (V^1)^2 + (V^2)^2 + (V^3)^2 = 0.$$

Exemple 2: Toujours dans l'espace-temps de Minkowski, considérons la courbe \mathcal{C} d'équation paramétrique

$$\mathcal{C} : \begin{cases} ct = X^0(\lambda) = R\lambda \\ x = X^1(\lambda) = R \cos \lambda \\ y = X^2(\lambda) = R \sin \lambda \\ z = X^3(\lambda) = 0, \end{cases} \quad (2.144)$$

où R est une contante strictement positive. Dans un diagramme d'espace-temps, \mathcal{C} est une hélice de rayon R et de pas $2\pi R$ (cf. Fig. 2.19). Le vecteur tangent associé a pour composantes

$$v^\alpha = \dot{X}^\alpha = (R, -R \sin \lambda, R \cos \lambda, 0).$$

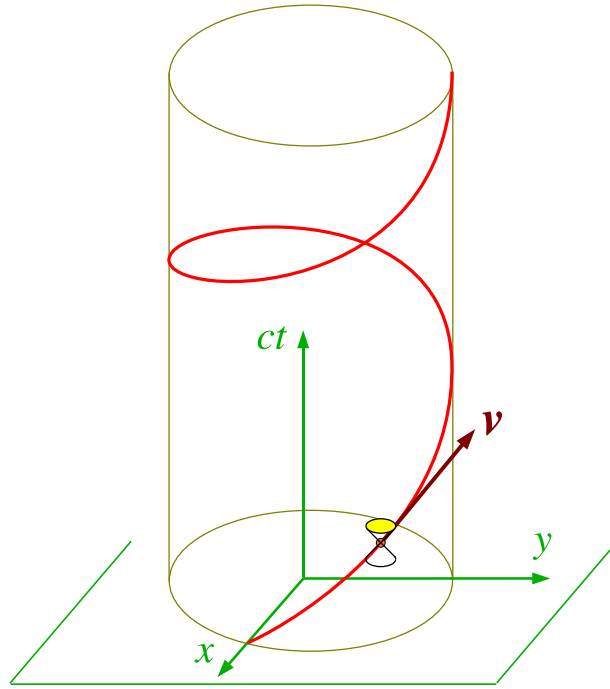


FIGURE 2.19 – Courbe du genre lumière non-géodésique dans l'espace-temps de Minkowski : cette courbe est de longueur nulle mais n'est pas une géodésique.

Ce dernier est clairement du genre lumière :

$$g_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = \eta_{\alpha\beta}v^\alpha v^\beta = -R^2 + R^2 \sin^2 \lambda + R^2 \cos^2 \lambda = 0,$$

de sorte que \mathcal{C} est une courbe du genre lumière. Par contre, il ne s'agit pas d'une géodésique car

$$\ddot{X}^\alpha = (0, -R \cos \lambda, R \sin \lambda, 0) \neq \kappa \dot{X}^\alpha,$$

si bien que l'équation des géodésiques (2.138) n'est pas vérifiée. Rappelons que dans le cas présent $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$ [Eq. (2.134)].

2.7 Exercices

À ce stade du cours, on peut traiter les questions 1 à 4 du problème B.15 de l'Annexe B (déviations géodésiques).

Chapitre 3

Champ gravitationnel à symétrie sphérique (métrique de Schwarzschild)

version 2013-2014

Sommaire

3.1	Introduction	53
3.2	Métrique de Schwarzschild	54
3.3	Géodésiques lumière radiales	60
3.4	Décalage spectral gravitationnel (effet Einstein)	63
3.5	Orbites des corps matériels	71
3.6	Trajectoires des photons	82
3.7	Exercices	91

3.1 Introduction

Le champ gravitationnel des corps à symétrie sphérique est évidemment d'importance capitale en astrophysique. Or, il se trouve qu'il existe l'équivalent du théorème de Gauss de la gravitation newtonienne en relativité générale : le champ gravitationnel à l'extérieur d'un corps à symétrie sphérique ne dépend que de la masse totale du corps et non du détail de sa structure ; il est donc de la même forme pour un trou noir, une étoile ou une planète (pour peu que l'on reste dans l'hypothèse de la symétrie sphérique). Ce champ gravitationnel commun est appelé *métrique de Schwarzschild*. Il s'agit d'une solution de l'équation fondamentale de la relativité générale (*équation d'Einstein*, qui sera introduite au Chap. 4). Historiquement, il s'agit même de la toute première solution exacte non triviale. Elle a été trouvée par l'astrophysicien allemand Karl Schwarzschild en décembre 1915 [34], quelques semaines seulement après la publication de la relativité générale par Albert Einstein, en novembre 1915 (l'article d'Einstein ne contenait que des solutions approchées).

Pour arriver tout de suite à des applications intéressantes et d'intérêt astrophysique, la présentation de l'équation d'Einstein est différée au Chap. 4. Nous admettrons donc ici que la métrique de Schwarzschild est la solution de cette équation à l'extérieur de tous les corps à symétrie sphérique. Outre les applications astrophysiques, l'intérêt d'introduire la métrique de Schwarzschild dès à présent est de mettre en œuvre à l'aide d'une métrique concrète (et moins triviale que celle de Minkowski) les concepts vus dans le Chap. 2.

3.2 Métrique de Schwarzschild

Avant de présenter la métrique de Schwarzschild, voyons tout d'abord comme on traite la symétrie sphérique et la stationnarité en relativité générale.

3.2.1 Espace-temps statique et à symétrie sphérique

On dit d'un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ qu'il est *stationnaire* s'il existe un système de coordonnées $(x^\alpha) = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$ tel que (i) les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique par rapport à ces coordonnées soient indépendantes de t :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial t} = 0 \quad (3.1)$$

et (ii) le vecteur $\vec{\partial}_t$ de la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) soit du genre temps. La propriété (3.1) fait du vecteur $\vec{\partial}_t$ un *générateur de symétrie* de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$: le tenseur métrique ne varie pas lorsqu'on suit les lignes de champ de ce vecteur¹. On dit que $\vec{\partial}_t$ est un *vecteur de Killing*, du nom du mathématicien allemand Wilhelm Killing (1847-1923). Les vecteurs de Killing obéissent à une équation différentielle établie dans le Problème B.2 page 216. Cette équation, dite *équation de Killing* s'exprime à l'aide de la dérivée covariante, qui sera introduite au Chap. 4.

Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, l'ensemble

$$\Sigma_{t_0} = \{P = (ct, x^1, x^2, x^3) \in \mathcal{E}, \quad t = t_0\} \quad (3.2)$$

constitue une sous-variété de \mathcal{E} , de dimension 3 ; on l'appelle une *hypersurface* de \mathcal{E} . Un espace-temps stationnaire dont le vecteur de Killing $\vec{\partial}_t$ est orthogonal² aux hypersurfaces Σ_t est qualifié de *statique*.

Par ailleurs, on dit qu'un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est à *symétrie sphérique* s'il existe un système de coordonnées $(x^\alpha) = (x^0 = ct, r, \theta, \varphi)$ tel que (i) les surfaces $\{t = \text{const}, r = \text{const}\}$ sont de topologie sphérique et (ii) les composantes du tenseur métrique \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N(r, t)^2 c^2 dt^2 + A(r, t)^2 dr^2 + B(r, t)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (3.3)$$

1. On peut donner un sens mathématique rigoureux à cette expression, en introduisant la notion de dérivée d'un champ tensoriel le long d'un champ de vecteurs, que l'on appelle *dérivée de Lie*.

2. L'orthogonalité s'entend bien sûr au sens du tenseur métrique \mathbf{g} .

où N , A et B sont trois fonctions quelconques, de (t, r) seulement. On remarque que les composantes $g_{\alpha\beta}$ données par (3.3) sont indépendantes de la coordonnée φ :

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial \varphi} = 0. \quad (3.4)$$

Il s'en suit que le vecteur $\vec{\partial}_\varphi$ de la base naturelle associée aux coordonnées (ct, r, θ, φ) est un vecteur de Killing. Cela traduit l'invariance par rotation autour de l'axe des z ($z := r \cos \theta$). Deux autres vecteurs de Killing d'un espace-temps à symétrie sphérique sont

$$\vec{\xi}_{(x)} = -\sin \varphi \vec{\partial}_\theta - \cot \theta \cos \varphi \vec{\partial}_\varphi \quad \text{et} \quad \vec{\xi}_{(y)} = -\cos \varphi \vec{\partial}_\theta + \cot \theta \sin \varphi \vec{\partial}_\varphi. \quad (3.5)$$

Ils correspondent respectivement à l'invariance par rotation autour de l'axe des x ($x := r \sin \theta \cos \varphi$) et autour de l'axe des y ($y := r \sin \theta \sin \varphi$).

Remarque : Contrairement à $\vec{\partial}_\varphi$, le vecteur $\vec{\partial}_\theta$ ne constitue pas un vecteur de Killing d'un espace-temps à symétrie sphérique, car $\partial g_{\varphi\varphi} / \partial \theta \neq 0$, en raison du terme en $\sin^2 \theta$ dans (3.3).

3.2.2 Expression de la métrique de Schwarzschild

Comme mentionné dans l'introduction, nous différons au Chap. 4 la démonstration du fait que l'espace-temps à l'extérieur d'un corps isolé à symétrie sphérique est indépendant du détail de la structure interne de ce corps et est donné par la *métrique de Schwarzschild*. Cette dernière est une solution de l'équation d'Einstein que l'on peut définir par l'existence d'un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$, dites *coordonnées de Schwarzschild*, telles que les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique \mathbf{g} s'y écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.6)$$

Il apparaît dans cette expression les constantes fondamentales c (vitesse de la lumière, cf. (2.1)) et G (constante de Newton pour la gravitation) :

$$G = 6.6726 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}. \quad (3.7)$$

Hormis c et G , l'unique paramètre qui apparaît dans (3.6) est la constante M . Cette dernière dépend du corps central et nous verrons plus bas qu'elle correspond à la *masse* de ce corps.

La première constatation à faire au vu de (3.6) est que l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est *statique* et à *symétrie sphérique*. En effet, les composantes de la métrique sont clairement indépendantes de t et, pour $r > 2GM/c^2$, $\vec{\partial}_t \cdot \vec{\partial}_t = -c^2 [1 - 2GM/(c^2 r)] < 0$, c'est-à-dire que $\vec{\partial}_t$ est du genre temps; de part la définition donnée au § 3.2.1, on en conclut que l'espace-temps est stationnaire. De plus, les composantes $g_{\alpha\beta}$ étant diagonales, le vecteur

$\vec{\partial}_t$ est clairement orthogonal aux hypersurfaces $t = \text{const.}$, ce qui montre que l'espace-temps est statique. Quant à la symétrie sphérique, elle est immédiate car les composantes $g_{\alpha\beta}$ données par (3.6) sont de la forme (3.3).

Par ailleurs, l'espace-temps décrit par la métrique de Schwarzschild est asymptotiquement plat : M étant constant, on a en effet

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{2GM}{c^2 r} = 0, \quad (3.8)$$

si bien que, lorsque $r \rightarrow +\infty$, les composantes $g_{\alpha\beta}$ se réduisent aux composantes de la métrique de Minkowski exprimée en coordonnées sphériques [cf. Eq. (2.65)] :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.9)$$

Nous verrons au § 3.5.3 que le mouvement de particules massives, tel que donné par les géodésiques de la métrique (3.6) (cf. § 2.6), se réduit au mouvement keplerien dans un champ newtonien de masse M lorsque $r \rightarrow +\infty$. Cela justifie l'interprétation du paramètre M comme la masse du corps central.

Une autre constatation immédiate au vu de (3.6) est que les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont singulières pour $r = R_S$, où

$$R_S := \frac{2GM}{c^2} \quad (3.10)$$

est appelé rayon de Schwarzschild (ou encore rayon gravitationnel) de l'objet central. On a en effet

$$\lim_{r \rightarrow R_S} g_{00} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow R_S} g_{rr} = \infty. \quad (3.11)$$

Pour des étoiles ordinaires, ou des planètes, cela n'est pas gênant puisque R_S est bien plus petit que le rayon effectif de l'objet :

$$R_S(M = 1 M_\odot) = 3.0 \text{ km}; \quad R_S(M = 1 M_\oplus) = 8.9 \text{ mm}, \quad (3.12)$$

si bien que l'on a toujours $r > R_S$ (et même $r \gg R_S$!) à l'extérieur de ces objets. Nous verrons qu'on a également $r > R_S$ pour les objets beaucoup plus relativistes que sont les étoiles à neutrons. Par contre, cela n'est plus vrai pour les trous noirs. Nous discuterons donc la singularité $r = R_S$ (qui est en fait une simple singularité de coordonnées) dans le chapitre consacré aux trous noirs (Chap. 5).

3.2.3 Paramètre de compacité

Soit R la coordonnée r de la surface du corps central. On pose

$$\Xi := \frac{GM}{c^2 R}. \quad (3.13)$$

La quantité Ξ est sans dimension ; au voisinage de la surface du corps central, elle mesure la déviation de la métrique de Schwarzschild (3.6) par rapport à la métrique de Minkowski

corps	masse M [M_\odot]	rayon R [km]	densité ρ [kg m^{-3}]	paramètre de compacité Ξ
Terre	3×10^{-6}	6×10^3	5×10^3	10^{-10}
Soleil	1	7×10^5	10^3	10^{-6}
naine blanche	0.1 à 1.4	$\sim 10^4$	$\sim 10^{10}$	10^{-4} à 10^{-3}
étoile à neutrons	1 à ~ 3	~ 10	$\sim 10^{18}$	~ 0.2
trou noir stellaire	$> \sim 3$	$\frac{9}{(M = 3 M_\odot)}$	0	0.5
trou noir massif	$\sim 10^9$	20 UA	0	0.5

TABLE 3.1 – Caractéristiques moyennes de divers objets astrophysiques et leurs paramètres de compacité $\Xi = GM/(c^2 R) \sim R_s/R$.

(3.9). Ξ est appelé paramètre de compacité, ou encore paramètre de relativité, de l'objet central. En ordre de grandeur

$$\Xi \sim \frac{R_s}{R} \sim \frac{|\Phi_{\text{surf}}|}{c^2} \sim \frac{|E_{\text{grav}}|}{Mc^2}, \quad (3.14)$$

où les deux dernières quantités ne sont bien définies que lorsque le corps central n'est pas trop relativiste : Φ_{surf} est le potentiel gravitationnel newtonien à la surface de l'objet (sous l'hypothèse de la symétrie sphérique, $\Phi_{\text{surf}} = -GM/R$) et E_{grav} est l'énergie potentielle gravitationnelle newtonienne du corps central. Rappelons par exemple, que pour une boule homogène (densité constante), $E_{\text{grav}} = -3/5 GM^2/R$.

Les valeurs de Ξ pour différents objets astrophysiques sont regroupées dans le tableau 3.1. Les objets compacts peuvent être définis comme les objets pour lesquels $\Xi > 10^{-4}$: ce sont donc les naines blanches, les étoiles à neutrons et les trous noirs. Ce sont des corps dont le champ gravitationnel diffère notablement du champ gravitationnel newtonien, l'écart relatif étant Ξ . Si la relativité générale n'est qu'une petite correction pour les naines blanches (tout au plus $\Xi \sim 10^{-3}$), elle est absolument nécessaire pour décrire les étoiles à neutrons et évidemment les trous noirs.

Remarque : *Il convient de ne pas confondre compacité et densité : la compacité varie comme M/R , alors que la densité varie comme M/R^3 . Ainsi, on peut avoir des corps très denses et très peu compacts : par exemple, pour le proton, $M = 1.66 \times 10^{-27}$ kg et $R \simeq 1$ fm = 10^{-15} m, si bien que $\rho = M/(4/3 \pi R^3) = 5 \times 10^{17}$ kg m $^{-3}$, alors que $\Xi = GM/(c^2 R) \simeq 10^{-39}$. Bien que de même densité que les étoiles à neutrons, le proton n'est absolument pas un corps compact ! Autrement dit, les effets de relativité générale sont ultra négligeables à l'échelle du proton. Réciproquement, on peut avoir*

des corps très compacts et très peu denses : par exemple, pour le trou noir central de la galaxie M87, de masse $M = 3 \times 10^9 M_\odot$ et de rayon $R = R_S = 2GM/c^2 = 9 \times 10^9 \text{ km} \simeq 60 \text{ UA}$, si l'on définit la « densité moyenne » par $\rho := M/(4/3 \pi R^3)$, on obtient $\rho \simeq 3 \text{ kg m}^{-3}$, soit 1/300^{ème} de la densité de l'eau³ !

3.2.4 Théorème de Birkhoff

Le théorème de Birkhoff, que nous admettrons⁴, stipule que la métrique de Schwarzschild est l'unique solution de l'équation d'Einstein à l'extérieur de tous les corps à symétrie sphérique, même si le corps central n'est pas statique (par exemple une étoile qui oscille radialement). Autrement dit, en symétrie sphérique et dans le vide, le champ gravitationnel est nécessairement statique, même s'il ne l'est pas dans la zone où se trouve la matière. Le théorème de Birkhoff est l'analogue relativiste du théorème de Gauss en gravitation newtonienne, qui dit que le champ gravitationnel à l'extérieur des corps à symétrie sphérique est indépendant du temps (même si les corps oscillent) et est fonction seulement de la masse de l'objet central : $\vec{g} = -GM/r^2 \vec{e}_r$.

3.2.5 Métrique de Schwarzschild en coordonnées isotropes

Les coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, φ) qui donnent lieu à la forme (3.6) des composantes du tenseur métrique ne sont évidemment pas les seules dans lesquelles on peut écrire la métrique de Schwarzschild. Effectuons en effet le changement de variable radiale $r \rightarrow \bar{r}$ tel que

$$r = \bar{r} \left(1 + \frac{R_S}{4\bar{r}} \right)^2, \quad \bar{r} > \frac{R_S}{4}. \quad (3.15)$$

Pour $\bar{r} > R_S/4$ ($\iff r > R_S$), cette relation est inversible et conduit à

$$\bar{r} = \frac{1}{2} \left[r + \sqrt{r(r - R_S)} - \frac{R_S}{2} \right], \quad r > R_S. \quad (3.16)$$

La relation entre r et \bar{r} est représentée sur la Fig. 3.1.

Autrement dit, on considère les coordonnées

$$(x^{\bar{\alpha}}) = (ct, \bar{r}, \theta, \varphi), \quad (3.17)$$

où les coordonnées t, θ et φ sont les mêmes que pour les coordonnées de Schwarzschild (x^α) . En utilisant la formule (2.57) de transformation des composantes de \mathbf{g} lors du changement de coordonnées $(x^\alpha) \mapsto (x^{\bar{\alpha}})$, on obtient (*exercice* : le faire)

$$g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} dx^{\bar{\alpha}} dx^{\bar{\beta}} = - \left(\frac{1 - \frac{GM}{2c^2\bar{r}}}{1 + \frac{GM}{2c^2\bar{r}}} \right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{GM}{2c^2\bar{r}} \right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (3.18)$$

3. En fait, ainsi qu'on le verra au Chap. 5, le trou noir est une solution *du vide* de l'équation d'Einstein, si bien que la densité locale de matière y est nulle, comme on l'a d'ailleurs indiqué dans le tableau 3.1.

4. On le démontrera partiellement au § 4.6.2, à savoir dans le cas particulier d'un corps central statique.

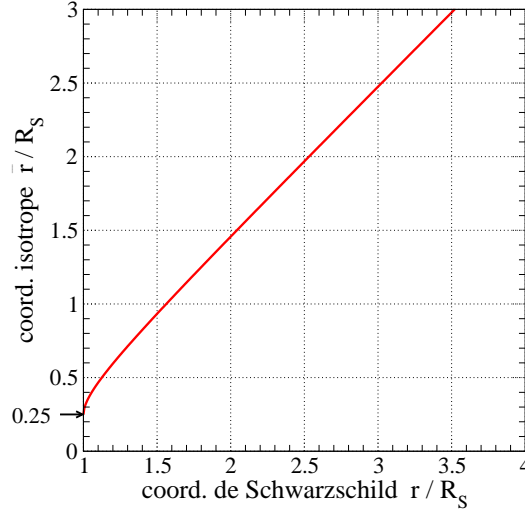


FIGURE 3.1 – Relation entre la coordonnée de Schwarzschild radiale, r , et la coordonnée isotrope radiale, \bar{r} [cf Eqs. (3.15) et (3.16)].

La partie spatiale de cet élément de longueur est du type

$$ds_{t=\text{const}}^2 = \Psi^4 d\ell^2 \quad (3.19)$$

avec $\Psi := 1 + \frac{GM}{2c^2\bar{r}}$ et

$$d\ell^2 := d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (3.20)$$

On reconnaît en $d\ell^2$ l'élément de longueur dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 en coordonnées sphériques. Au vu de l'équation (3.19), on dit que les métriques $ds_{t=\text{const}}^2$ et $d\ell^2$ sont conformément reliées, via le facteur conforme Ψ . Elles conduisent aux mêmes angles entre les vecteurs. Pour cette raison, on appelle les coordonnées $(x^{\bar{\alpha}}) = (ct, \bar{r}, \theta, \varphi)$ des coordonnées isotropes. Asymptotiquement, on a [cf. Eq. (3.15)]

$$r \sim \bar{r}, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (3.21)$$

mais au voisinage du rayon de Schwarzschild :

$$r \sim 4\bar{r}, \quad r \rightarrow R_S. \quad (3.22)$$

Remarque : Il convient d'insister sur un point : à l'extérieur des corps à symétrie sphérique, les coordonnées de Schwarzschild (t, r, θ, φ) ou les coordonnées isotropes $(t, \bar{r}, \theta, \varphi)$ sont tout aussi valables : les écritures (3.6) et (3.18) donnent les composantes d'une même métrique \mathbf{g} — la métrique de Schwarzschild — mais dans différents systèmes de coordonnées. En particulier, r n'a pas plus de sens physique que \bar{r} : ce ne sont pas des quantités directement mesurables, mais de simples coordonnées sur la variété d'espace-temps. D'un point de vue purement géométrique, r donne l'aire (associée au tenseur métrique \mathbf{g}) des sphères d'invariance liées à la symétrie sphérique (sphères $\{t = \text{const}, r = \text{const}\}$) : on voit en effet sur (3.6) que la métrique induite par \mathbf{g} sur ces sphères est $ds^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$. Leur aire est par conséquent $A = 4\pi r^2$. Pour cette raison, la coordonnée r est parfois appelée rayon aréolaire.

3.3 Géodésiques lumière radiales

Déterminons les géodésiques lumière radiales (c'est-à-dire à θ et φ fixés) de la métrique de Schwarzschild. Elles nous conduiront à un nouveau système de coordonnées : les coordonnées d'Eddington-Finkelstein.

3.3.1 Recherche des géodésiques lumière radiale

Plaçons nous dans le cadre des coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$. Une géodésique lumière est une géodésique de longueur nulle : on doit donc avoir le long de celle-ci

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0. \quad (3.23)$$

Par ailleurs, si l'on suppose la géodésique radiale, alors $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$ le long de celle-ci. En utilisant les composantes (3.6), la condition (3.23) devient donc

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 = 0, \quad (3.24)$$

c'est-à-dire

$$c^2 dt^2 = \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^2}, \quad (3.25)$$

d'où

$$c dt = \pm \frac{dr}{1 - \frac{2GM}{c^2 r}}. \quad (3.26)$$

Cette équation s'intègre en

$$ct = \pm \int_{r_0}^r \frac{dr'}{1 - \frac{2GM}{c^2 r'}} = \pm R_S \int_{x_0}^x \frac{dx'}{1 - 1/x'}, \quad (3.27)$$

où l'on a posé $x := c^2 r / (2GM) = r / R_S$. L'intégrale sur x' se calcule aisément :

$$\begin{aligned} \int_{x_0}^x \frac{dx'}{1 - 1/x'} &= \int_{x_0}^x \frac{x'}{x' - 1} dx' = \int_{x_0}^x \frac{x' - 1 + 1}{x' - 1} dx' = \int_{x_0}^x \left(1 + \frac{1}{x' - 1}\right) dx' \\ &= x + \ln|x - 1| - x_0 - \ln|x_0 - 1|. \end{aligned} \quad (3.28)$$

En reportant dans (3.27), il vient

$$ct = \pm \left[r + R_S \ln \left| \frac{r}{R_S} - 1 \right| \right] + \text{const.} \quad (3.29)$$

En raison du \pm , on obtient deux familles de géodésiques radiales, que l'on peut classer comme suit :

- les géodésiques *sortantes*, pour lesquelles $dr/dt > 0$; leurs équations sont

$$\boxed{\begin{cases} ct = r + R_S \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right) + \text{const.} & \text{pour } r > R_S \\ ct = -r - R_S \ln \left(1 - \frac{r}{R_S} \right) + \text{const.} & \text{pour } r < R_S \end{cases}} \quad (3.30)$$

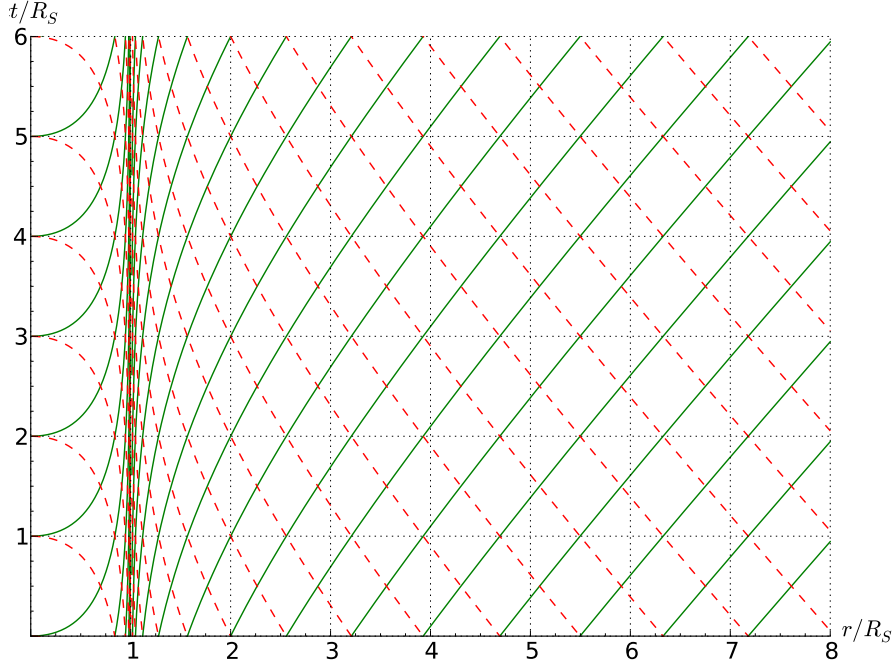


FIGURE 3.2 – Géodésiques lumières radiales représentées en coordonnées de Schwarzschild (t, r) : en vert et trait plein, les géodésiques sortantes; en rouge et tirets, les géodésiques entrantes.

- les géodésiques *entrantes*, pour lesquelles $dr/dt < 0$; leurs équations sont

$$\begin{cases} ct = -r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) + \text{const.} & \text{pour } r > R_S \\ ct = r + R_S \ln\left(1 - \frac{r}{R_S}\right) + \text{const.} & \text{pour } r < R_S \end{cases} \quad (3.31)$$

Ces géodésiques sont représentées sur la Fig. 3.2.

Pour $r \gg R_S$, on peut négliger le terme en logarithme dans les Eqs. (3.30) et (3.31), qui deviennent donc

$$ct \simeq \pm r + \text{const.} \quad (3.32)$$

On retrouve ainsi l'équation des rayons lumineux radiaux de l'espace-temps plat. On constate d'ailleurs sur la Fig. 3.2 que pour $r \gg R_S$, les géodésiques deviennent des droites de pente $\pm 45^\circ$.

3.3.2 Coordonnées d'Eddington-Finkelstein

On se place dans le cas où $r > R_S$ et l'on définit

$$u := ct - r - R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) \quad (3.33)$$

$$v := ct + r + R_S \ln\left(\frac{r}{R_S} - 1\right) \quad (3.34)$$

Alors, d'après (3.30) et (3.31), la quantité u (resp. v) est constante sur les géodésiques lumière radiales sortantes (resp. entrantes).

On appelle *coordonnées d'Eddington-Finkelstein sortantes* (resp. *coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes*) les coordonnées $(x^{\tilde{\alpha}}) = (u, r, \theta, \varphi)$ (resp. $(x^{\tilde{\alpha}}) = (v, r, \theta, \varphi)$). Pour obtenir les composantes du tenseur métrique dans ces coordonnées, on peut utiliser la loi (2.57) de transformation des composantes tensorielles, mais nous suivons ici une autre route. On a en effet, en différenciant (3.33),

$$\begin{aligned} du &= c dt - dr - \frac{1}{\frac{r}{R_S} - 1} dr = c dt - \frac{\frac{r}{R_S}}{\frac{r}{R_S} - 1} dr \\ du &= c dt - \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}}, \end{aligned} \quad (3.35)$$

d'où

$$\begin{aligned} du^2 &= c^2 dt^2 - 2 \frac{c dt dr}{1 - \frac{R_S}{r}} + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^2} \\ \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 &= \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} - 2c dt dr \\ \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 &= \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} - 2 \left(du + \frac{dr}{1 - \frac{R_S}{r}}\right) dr \\ \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 &= \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 - \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} - 2 du dr. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Ainsi

$$- \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)} = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) du^2 - 2 du dr. \quad (3.37)$$

Le membre de gauche de cette équation n'est autre que la somme des deux premiers termes de l'élément de longueur $ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$ donné par (3.6). On en déduit immédiatement les composantes du tenseur métrique par rapport aux coordonnées d'Eddington-Finkelstein sortantes :

$$\boxed{g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) du^2 - 2 du dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}. \quad (3.38)$$

On peut faire plusieurs remarques sur cette expression :

- contrairement aux composantes $g_{\alpha\beta}$ dans les coordonnées de Schwarzschild, ou aux composantes $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ dans les coordonnées isotropes, les composantes $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ ne sont pas diagonales, puisque $g_{ur} = -1 \neq 0$.
- $g_{rr} = 0$; comme $\vec{\partial}_r \cdot \vec{\partial}_r = g_{rr}$, cela signifie que le vecteur $\vec{\partial}_r$ de la base naturelle associée aux coordonnées (u, r, θ, φ) est du genre lumière.

Attention : ce vecteur $\vec{\partial}_r$ n'est pas le même que le vecteur $\vec{\partial}_r$ de la base naturelle

associée aux coordonnées (t, r, θ, φ) : en revenant à la définition première (2.14) des vecteurs d'une base naturelle, on a en effet, pour un champ scalaire f générique,

$$\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{u,\theta,\varphi} \neq \left(\frac{\partial f}{\partial r}\right)_{t,\theta,\varphi}. \quad (3.39)$$

- s'il l'on fait $du = 0$, $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$ dans (3.38), on obtient $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = 0$: on retrouve donc bien que les géodésiques lumière radiales sortantes sont caractérisées par $u = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ et $\varphi = \text{const}$.

De même, les composantes du tenseur métrique en coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes $(x^{\tilde{\alpha}}) = (v, r, \theta, \varphi)$ sont données par

$$g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (3.40)$$

3.4 Décalage spectral gravitationnel (effet Einstein)

3.4.1 Symétries et quantités conservées le long des géodésiques

L'espace-temps (ou plus précisément la partie de l'espace-temps à l'extérieur du corps central) décrit par la métrique de Schwarzschild est statique et à symétrie sphérique. Ces symétries correspondent à quatre vecteurs de Killing : $\vec{\partial}_t$, $\vec{\partial}_\varphi$ et les deux vecteurs donnés par (3.5). Les vecteurs de Killing $\vec{\partial}_t$ et $\vec{\partial}_\varphi$ sont notés ainsi car ils apparaissent comme des vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées de Schwarzschild, ou aux coordonnées isotropes. Donnons-leur un nom qui ne fasse pas appel à un système de coordonnées particulier, mais évoque seulement qu'il s'agit de vecteurs de Killing de l'espace-temps (\mathcal{E}, g) . Posons :

$$\boxed{\vec{\xi}_{(0)} := \vec{\partial}_0 = c^{-1} \vec{\partial}_t} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\xi}_{(z)} := \vec{\partial}_\varphi}, \quad (3.41)$$

la notation $\vec{\xi}_{(z)}$ venant rappeler que ce vecteur de Killing résulte de l'invariance par rotation autour de l'axe des z ; cette notation complète d'ailleurs celles utilisées dans (3.5).

La propriété fondamentale que nous allons utiliser à de nombreuses reprises dans ce chapitre est que toute symétrie de l'espace-temps conduit à des quantités conservées le long des géodésiques. Plus précisément, si $\vec{\xi}$ est un vecteur de Killing et si \mathcal{L} est une géodésique du genre temps, de tangente unitaire (4-vitesse) \vec{u} , la quantité $\vec{\xi} \cdot \vec{u}$ est constante le long de \mathcal{L} . Il est facile de l'établir à partir des expressions relatives aux géodésiques obtenues au Chap. 2. Pour être concret, considérons le vecteur de Killing $\vec{\xi} = \vec{\xi}_{(0)} = c^{-1} \vec{\partial}_t$. Dire qu'il s'agit d'un vecteur de Killing revient à dire que les composantes de la métrique sont indépendantes de la coordonnée t [Eq. (3.1)]. On va raisonner sur le lagrangien L introduit au § 2.6.2 pour obtenir l'équation des géodésiques via les équations d'Euler-Lagrange. En injectant la propriété $\partial g_{\mu\nu} / \partial t = 0$ dans l'Eq. (2.121), on obtient

$$\frac{\partial L}{\partial X^0} = - \frac{1}{2L} \frac{1}{c} \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial t} \dot{X}^\mu \dot{X}^\nu = 0. \quad (3.42)$$

En reportant la nullité de $\partial L / \partial X^0$ ainsi obtenue dans l'équation d'Euler-Lagrange (2.118), il vient

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^0} \right) = 0. \quad (3.43)$$

Autrement dit, la quantité

$$C := -\frac{\partial L}{\partial \dot{X}^0} \quad (3.44)$$

est conservée le long de la géodésique. D'après (2.123) et (2.119), cette quantité s'exprime selon

$$C = \frac{1}{L} g_{0\mu} \dot{X}^\mu = g_{0\mu} \frac{\dot{X}^\mu}{\sqrt{-g_{\alpha\beta} \dot{X}^\alpha \dot{X}^\beta}}. \quad (3.45)$$

Via l'Eq. (2.87), on reconnaît les composantes u^μ de la 4-vitesse, si bien que

$$C = g_{0\mu} u^\mu. \quad (3.46)$$

Par ailleurs $\vec{\xi} \cdot \vec{u} = g_{\mu\nu} u^\mu \xi^\nu$, avec $\xi^\nu = (1, 0, 0, 0)$ puisque $\vec{\xi} = \vec{\partial}_0$. D'où $\vec{\xi} \cdot \vec{u} = g_{0\mu} u^\mu$. En comparant avec (3.46), on constate que

$$C = \vec{\xi} \cdot \vec{u}. \quad (3.47)$$

La quantité $\vec{\xi} \cdot \vec{u}$ est donc constante le long de la géodésique \mathcal{L} . Si cette dernière est la ligne d'univers d'une particule de masse m , il en est donc de même de la quantité $\vec{\xi} \cdot \vec{p}$, où \vec{p} est la 4-impulsion de la particule, puisque $\vec{p} = mc\vec{u}$ et m est une constante. On a ainsi démontré la propriété importante suivante : si une particule de 4-impulsion \vec{p} suit une ligne géodésique, alors

$$\boxed{\vec{\xi} \text{ vecteur de Killing} \implies \vec{\xi} \cdot \vec{p} = \text{const.}} \quad (3.48)$$

Nous avons établi (3.48) dans le cas d'une géodésique du genre temps. En fait cette propriété est plus générale : elle s'applique également aux géodésiques lumière, \vec{p} étant alors l'impulsion du photon qui décrit la géodésique. Nous admettrons ce dernier résultat.

3.4.2 Effet Einstein

La conservation de $\vec{\xi} \cdot \vec{p}$ le long des géodésiques lumière radiales va nous permettre d'obtenir une des prédictions les plus remarquables de la relativité générale : le *décalage spectral gravitationnel*, également connu sous le nom d'*effet Einstein*.

Considérons une classe d'observateurs statiques par rapport aux coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$, c'est-à-dire des observateurs dont la 4-vitesse \vec{u} a les composantes suivantes par rapport aux coordonnées de Schwarzschild :

$$u^\alpha = (u^0, 0, 0, 0). \quad (3.49)$$

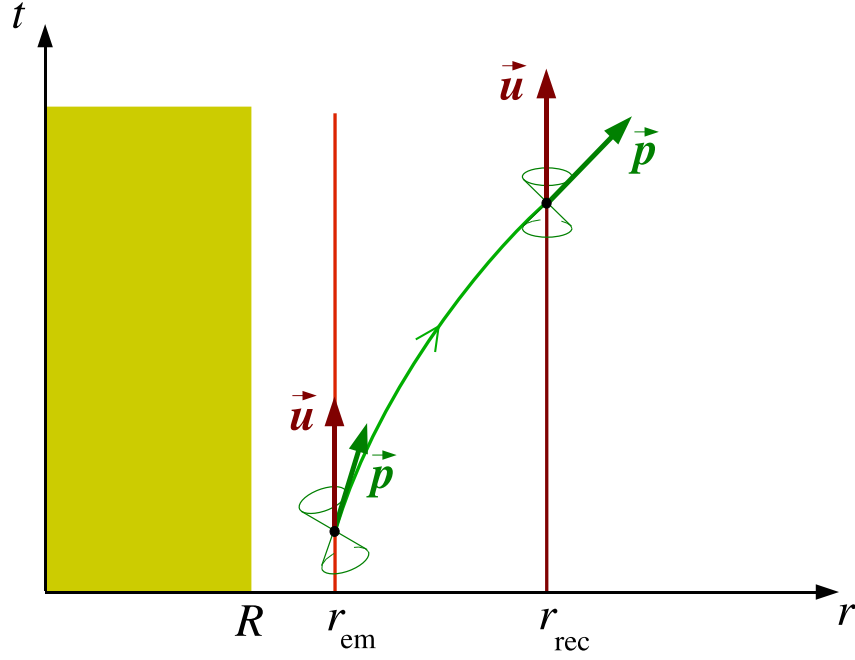


FIGURE 3.3 – Effet Einstein représenté en coordonnées de Schwarzschild (t, r) . La surface de l'objet central est située en $r = R$; les deux lignes verticales sont les lignes d'univers de l'observateur statique qui émet le photon et de celui qui le reçoit. L'énergie du photon par rapport à un observateur statique est donnée par le produit scalaire entre la 4-vitesse \vec{u} de l'observateur et la 4-impulsion \vec{p} du photon : $E = -\vec{u} \cdot \vec{p} c$.

Du point de vue vectoriel, cela signifie que \vec{u} est parallèle au vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$, puisque ce dernier est égal au vecteur $\vec{\delta}_0$ de la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) :

$$\vec{u} = u^0 \vec{\xi}_{(0)}. \quad (3.50)$$

La relation de normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ permet de calculer u^0 , puisqu'en utilisant (3.6), il vient

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = g_{00} (u^0)^2 = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right) (u^0)^2, \quad (3.51)$$

d'où

$$u^0 = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2}. \quad (3.52)$$

Considérons à présent un photon émis dans la direction radiale (sortante ou entrante) par un observateur statique \mathcal{O}_{em} situé en $r = r_{\text{em}}$. Ce photon décrit une géodésique lumière et est reçu par un observateur statique \mathcal{O}_{rec} situé en $r = r_{\text{rec}}$ (cf. Fig. 3.3). L'énergie du photon mesurée par un observateur statique situé à une coordonnée r quelconque est donnée par la formule (2.104) :

$$E = -\vec{u} \cdot \vec{p} c, \quad (3.53)$$

où \vec{p} est la 4-impulsion du photon le long de sa géodésique. En utilisant successivement

(3.50) et (3.52), il vient

$$\begin{aligned} E &= -u^0 \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} c \\ &= -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r} \right)^{-1/2} \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En particulier, au point d'émission,

$$E_{\text{em}} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \right)^{-1/2} (\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p})_{\text{em}} \quad (3.55)$$

et au point de réception,

$$E_{\text{rec}} = -c \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}} \right)^{-1/2} (\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p})_{\text{rec}}. \quad (3.56)$$

Or d'après (3.48), la quantité $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}$ est conservée le long de la géodésique lumière :

$$(\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p})_{\text{rec}} = (\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p})_{\text{em}}. \quad (3.57)$$

Les expressions (3.55) et (3.56) conduisent alors à la relation suivante entre l'énergie mesurée à l'émission et celle mesurée à la réception :

$$E_{\text{rec}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}}} \right)^{1/2} E_{\text{em}}. \quad (3.58)$$

Puisque l'énergie des photons est liée à leur longueur d'onde par $E = hc/\lambda$, on en déduit immédiatement la relation entre les longueurs d'ondes mesurées à l'émission et à la réception :

$$\lambda_{\text{rec}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}}} \right)^{1/2} \lambda_{\text{em}}, \quad (3.59)$$

ou de manière équivalente le décalage spectral

$$z := \frac{\lambda_{\text{rec}} - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}}} \right)^{1/2} - 1. \quad (3.60)$$

Il s'agit-là du *décalage spectral gravitationnel* ou *effet Einstein*. Soulignons qu'il s'agit d'un pur effet de relativité générale et non d'un décalage Doppler. Les observateurs \mathcal{O}_{em}

et \mathcal{O}_{rec} qui mesurent λ_{em} et λ_{rec} sont en effet statiques par rapport aux coordonnées de Schwarzschild (cf. Fig. 3.3); ils ne sont donc pas en mouvement relatif, si bien que la relativité restreinte ne prédirait aucun décalage spectral.

Pour l'observation de photons en provenance de sources astrophysiques, on a $r_{\text{em}} = R$ (coordonnée de la surface de l'objet) et $r_{\text{rec}} = +\infty$, si bien que (3.60) devient

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Xi}} - 1, \quad (3.61)$$

où l'on a introduit le facteur de compacité (3.13). On constate que $z > 0$: l'effet Einstein conduit à un *rougissement* des spectres des sources astrophysiques observées sur Terre. Pour les corps faiblement relativistes, $\Xi \ll 1$ et un développement limité de (3.61) conduit à

$$\boxed{z \simeq \Xi} \quad (\Xi \ll 1). \quad (3.62)$$

Cette formule fournit une nouvelle interprétation du facteur de compacité, en plus de celles données par (3.14) : pour un corps non compact, Ξ n'est autre que le décalage spectral gravitationnel du rayonnement émis depuis la surface de ce corps et reçu à l'infini.

Toujours dans le cas où le corps central n'est pas un objet compact, mais en ne supposant plus que l'on émet depuis la surface du corps ou que l'on observe depuis l'infini, on a

$$\frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}} \ll 1, \quad (3.63)$$

si bien que l'on peut effectuer un développement limité de l'expression (3.60) et obtenir

$$z = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{1}{r_{\text{em}}} - \frac{1}{r_{\text{rec}}} \right). \quad (3.64)$$

On peut écrire cette formule sous la forme

$$\boxed{z = \frac{1}{c^2} [\Phi(r_{\text{rec}}) - \Phi(r_{\text{em}})]}, \quad (3.65)$$

où $\Phi(r)$ désigne le potentiel gravitationnel newtonien :

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r}. \quad (3.66)$$

Si, de plus,

$$r_{\text{em}} = r_0 + h_{\text{em}} \quad \text{avec} \quad |h_{\text{em}}| \ll r_0 \quad (3.67)$$

$$r_{\text{rec}} = r_0 + h_{\text{rec}} \quad \text{avec} \quad |h_{\text{rec}}| \ll r_0 \quad (3.68)$$

on peut effectuer un développement limité de (3.64) en h_{em}/r_0 et h_{rec}/r_0 . Il vient ainsi

$$\boxed{z = \frac{|g(r_0)|}{c^2} (h_{\text{rec}} - h_{\text{em}})}, \quad (3.69)$$

où $g(r)$ désigne le champ gravitationnel newtonien :

$$g(r) = -\frac{GM}{r^2}. \quad (3.70)$$

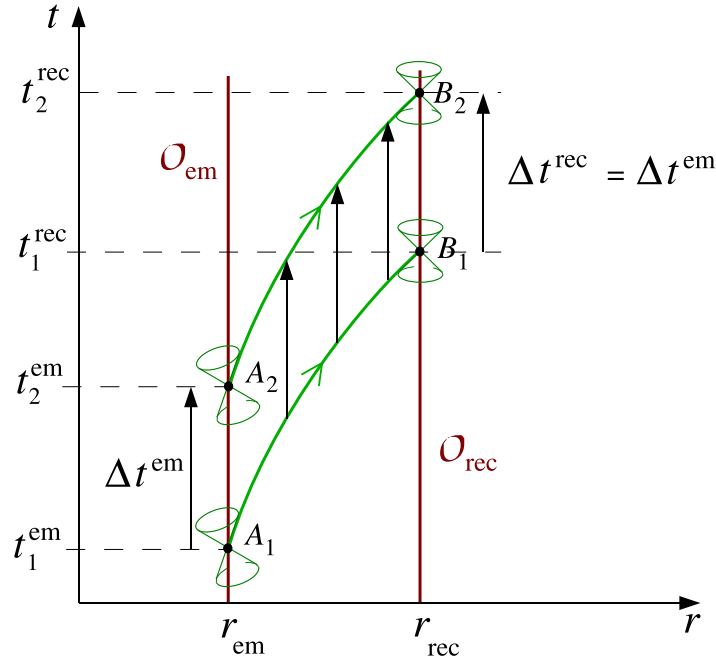


FIGURE 3.4 – L'espace-temps de Schwarzschild est invariant par translation $t \mapsto t + \text{const}$ de la coordonnée t , ce qui résulte en $\Delta t^{\text{rec}} = \Delta t^{\text{em}}$. Par contre, pour les temps propres, $\Delta \tau^{\text{rec}} \neq \Delta \tau^{\text{em}}$ (effet Einstein), la relation exacte étant donnée par l'Eq. (3.77).

3.4.3 Effet Einstein comme dilatation des temps

Nous avons mis en évidence l'effet Einstein à partir de la mesure de la fréquence des photons à l'émission et à la réception. Une autre façon de voir les choses consiste à comparer le temps propre $\Delta \tau_{\text{em}}$ mesuré par l'observateur \mathcal{O}_{em} entre deux événements A_1 et A_2 de sa ligne d'univers au temps propre $\Delta \tau_{\text{rec}}$ mesuré par l'observateur \mathcal{O}_{rec} entre les deux événements B_1 et B_2 de réception des photons émis en A_1 et en A_2 (cf. Fig. 3.4).

La propriété fondamentale que nous allons utiliser pour relier $\Delta \tau_{\text{rec}}$ à $\Delta \tau_{\text{em}}$ est la stationnarité de l'espace-temps de Schwarzschild. C'est d'ailleurs la même propriété que nous avons utilisée ci-dessus pour obtenir la constance de $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}$ et donc le résultat (3.60). En effet, si t_1^{em} (resp. t_2^{em}) est la coordonnée de Schwarzschild t de l'événement A_1 (resp. A_2) et t_1^{rec} (resp. t_2^{rec}) la coordonnée de Schwarzschild t de l'événement B_1 de réception du photon émis en A_1 (resp. B_2 de réception du photon émis en A_2), l'invariance de l'espace-temps par la translation temporelle $t \mapsto t + \text{const}$ implique (cf. Fig. 3.4)

$$t_1^{\text{rec}} = t_1^{\text{em}} + \Delta t \quad (3.71)$$

$$t_2^{\text{rec}} = t_2^{\text{em}} + \Delta t, \quad (3.72)$$

où la quantité Δt est la même dans ces deux équations. Autrement dit,

$$\boxed{t_2^{\text{rec}} - t_1^{\text{rec}} = t_2^{\text{em}} - t_1^{\text{em}}}. \quad (3.73)$$

L'intervalle de temps propre mesuré par \mathcal{O}_{em} entre les événements A_1 et A_2 est [cf.

Eq. (2.83)]

$$\Delta\tau_{\text{em}} = \frac{1}{c} \int_{A_1}^{A_2} \sqrt{-\mathbf{g}(\vec{d}\vec{P}, \vec{d}\vec{P})} = \frac{1}{c} \int_{t_1^{\text{em}}}^{t_2^{\text{em}}} \sqrt{-\mathbf{g}(\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_t)} dt = \int_{t_1^{\text{em}}}^{t_2^{\text{em}}} \sqrt{-g_{00}} dt. \quad (3.74)$$

En reportant g_{00} depuis (3.6), il vient

$$\Delta\tau_{\text{em}} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}}\right)^{1/2} (t_2^{\text{em}} - t_1^{\text{em}}). \quad (3.75)$$

De même, l'intervalle de temps propre mesuré par \mathcal{O}_{rec} entre les deux événements B_1 et B_2 de réception des photons est

$$\Delta\tau_{\text{rec}} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}}\right)^{1/2} (t_2^{\text{rec}} - t_1^{\text{rec}}). \quad (3.76)$$

En utilisant (3.73), on conclut que

$$\Delta\tau_{\text{rec}} = \left(\frac{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{rec}}}}{1 - \frac{2GM}{c^2 r_{\text{em}}}} \right)^{1/2} \Delta\tau_{\text{em}}. \quad (3.77)$$

Il s'agit là d'un phénomène de dilatation (ou contraction) des temps au sens suivant : si $\Delta\tau_{\text{em}}$ est le temps entre deux tics successifs de l'horloge de \mathcal{O}_{em} et qu'il informe l'observateur \mathcal{O}_{rec} en émettant un signal radio à chaque tic, la suite de tics ainsi perçue par \mathcal{O}_{rec} obéit à la loi (3.77).

Remarque : En écrivant $\lambda = cT$ dans (3.59), on constate que les périodes T du rayonnement électromagnétique à l'émission et à la réception obéissent à la même relation que (3.77).

3.4.4 Mise en évidence expérimentale et observationnelle

Expérience de Pound & Rebka (1960)

Cette expérience a consisté à comparer les fréquences de la raie gamma ($E = 14$ keV, $\lambda = 0.09$ nm) de désintégration du ^{57}Fe (isotope instable du fer, de durée de vie 10^{-7} s) entre le bas et le sommet d'une tour de l'Université d'Harvard [64]. On a alors $M = M_{\oplus} = 6.0 \times 10^{24}$ kg, $r_0 = R_{\oplus} = 6.4 \times 10^6$ m, $h_{\text{rec}} - h_{\text{em}} = 22.5$ m, si bien que (3.69) donne

$$z \simeq 2 \times 10^{-15}. \quad (3.78)$$

Ce décalage spectral extrêmement petit a pu être mis en évidence grâce à l'effet Mossbauer, qui réduit considérablement la largeur de raie Doppler. La valeur obtenue est en accord avec la prédiction de la relativité générale avec une marge d'erreur d'environ 10%. L'expérience fut reproduite en 1965 par Pound & Snider [65] qui atteignirent un accord de 1% avec la relativité générale.

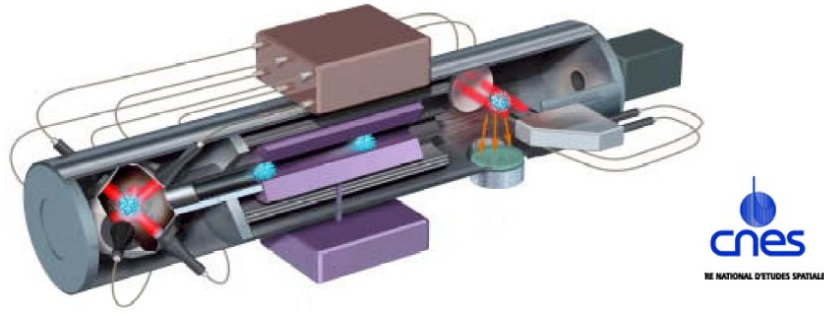


FIGURE 3.5 – Schéma de l’horloge à atomes refroidis en microgravité PHARAO, qui doit être installée en 2016 sur la Station Spatiale Internationale, dans le cadre du projet ACES [Source : LKB/SYRTE/CNES].

Expérience de Vessot & Levine (18 juin 1976)

Pour augmenter la précision, il fallait accroître la différence d’altitude entre l’émetteur et le récepteur. L’idée fut alors de lancer une fusée avec une horloge embarquée et de comparer sa fréquence avec celle d’une horloge identique restée au sol. L’expérience a été réalisée sous le nom de *Gravity Probe A* le 18 juin 1976 avec une horloge atomique à maser H ($\lambda = 21$ cm) embarquée sur une fusée Scout D [70]. On a dans ce cas $M = M_{\oplus} = 6.0 \times 10^{24}$ kg, $r_{\text{em}} = 2.5R_{\oplus} = 1.6 \times 10^7$ m, et $r_{\text{rec}} = R_{\oplus}$, si bien que (3.64) donne

$$z \simeq -4 \times 10^{-10}. \quad (3.79)$$

Bien que considérablement plus grand que (3.78), ce décalage spectral est 10^5 fois plus petit que le décalage Doppler dû au mouvement de la fusée! La mesure a été rendue possible grâce à l’utilisation d’un transpondeur à bord de la fusée qui, recevant un signal du sol, le renvoie à exactement la même fréquence que celle à laquelle il l’a reçu. La fréquence du signal retour mesurée au sol est décalée par l’effet Doppler du premier ordre, et ce doublement : une fois à l’aller, l’autre fois au retour (dans les deux cas l’émetteur et le récepteur s’éloignent l’un de l’autre, ce qui donne un décalage vers le rouge). Par contre, le signal qui revient à la station au sol n’est affecté ni par l’effet Doppler du second ordre (dû au facteur de Lorentz), ni par l’effet Einstein. Le trajet retour annule en effet les deux décalages de ce type subis à l’aller. Ayant mesuré l’effet Doppler du premier ordre par ce biais, on obtient la vitesse de la fusée. On peut alors calculer l’effet Doppler du second ordre. Ayant les deux effets Doppler, on les retranche au signal et il ne reste plus que l’effet Einstein. Les résultats de l’expérience de Vessot & Levine ont ainsi été suffisamment précis pour affirmer que l’accord relatif avec la prédiction de la relativité générale est de 7×10^{-5} .

Horloges spatiales à atomes froids : ACES/PHARAO

Le projet ACES (Atomic Clock Ensemble in Space) de l’ESA est un ensemble d’horloges atomiques qui doit être installé sur la Station Spatiale Internationale en 2016. Il comprend l’horloge PHARAO, qui est une horloge à atomes de césium refroidis par laser,

développée au LNE-SYRTE (Observatoire de Paris) et au Laboratoire Kastler Brossel (École Normale Supérieure), et financée par le CNES (cf. Fig. 3.5). La comparaison avec des horloges à atomes froids au sol (fontaines atomiques) devrait permettre d'affiner à 2×10^{-6} le test de l'effet Einstein, soit un gain d'un facteur 35 par rapport à l'expérience de Vessot & Levine.

Spectre des naines blanches

Bien que les naines blanches soient essentiellement composées de carbone et d'oxygène, elles possèdent en général une très fine atmosphère d'hydrogène, dont on peut observer les raies de Balmer. On a dans ce cas $M \sim 1 M_{\odot}$ et $r_{\text{em}} = R \sim 5000$ km, si bien que (3.62) donne

$$z \sim 10^{-3}. \quad (3.80)$$

L'effet n'est donc pas très facile à mesurer, d'autant plus qu'il faut le distinguer de l'effet Doppler lié au mouvement de l'étoile par rapport à la Terre. Cela n'est possible que si la naine blanche a un compagnon ou fait partie d'un amas d'étoiles dont on connaît la vitesse radiale.

La mesure du décalage vers le rouge des raies de la naine blanche Sirius B a constitué l'un des trois tests classiques de la relativité générale (après l'avance du périhélie de Mercure et la déviation des rayons lumineux au voisinage du disque solaire). La première valeur mesurée par W.S. Adams en 1925 était $z = 6.3 \times 10^{-5}$ sur la raie de Balmer $H\alpha$, ce qui s'accordait assez bien avec la valeur découlant du rapport M/R estimé à cette époque, $GM/(c^2R) = 8.3 \times 10^{-5}$, et fit conclure à la validité de la relativité générale. Or le rayon de Sirius B déterminé à cette époque était surestimé. Les valeurs modernes de M/R conduisent plutôt à $GM/(c^2R) = 2.8 \times 10^{-4}$, ce qui ne correspond pas du tout à la valeur de z mesurée par Adams. Heureusement, les valeurs actuelles de z concordent avec ce nouveau $GM/(c^2R)$. Pour plus de détails sur cette histoire, on pourra consulter Greenstein et al. (1985) [53].

Application au GPS

L'effet Einstein constitue à ce jour le seul impact de la relativité générale sur la vie quotidienne : si on n'en tenait pas compte dans le champ gravitationnel de la Terre (pourtant faiblement relativiste, cf. Tab. 3.1), le système de positionnement GPS serait complètement inopérant ! Nous détaillons tout ceci dans l'annexe A.

3.5 Orbites des corps matériels

Examinons à présent les trajectoires (orbites) des corps de masse $m \ll M$ autour du corps central de la métrique de Schwarzschild. Comme nous l'avons vu au § 2.6, ces trajectoires doivent être des géodésiques du genre temps.

3.5.1 Quantités conservées

Il est facile de voir qu'en raison des symétries de la métrique de Schwarzschild, les orbites doivent être planes, tout comme en mécanique newtonienne. Considérons en effet une particule de masse m et de 4-impulsion $\vec{p} = mc\vec{u}$ en un point P de sa ligne d'univers \mathcal{L} . Soit $(t_0, r_0, \theta_0, \varphi_0)$ les coordonnées de Schwarzschild de P . Sans perte de généralité, il est toujours possible de choisir les coordonnées (θ, φ) sur la sphère $\mathcal{S}_{t_0, r_0} = \{t = t_0, r = r_0\}$ telles que $\theta_0 = \pi/2$, $\varphi_0 = 0$ et la projection orthogonale de la 4-vitesse \vec{u} de la particule sur la sphère soit parallèle à $\vec{\partial}_\varphi : u^\theta(P) = 0$. Autrement dit le 2-vecteur (u^θ, u^φ) est parallèle à l'équateur $\theta = \pi/2$ de la sphère \mathcal{S}_{t_0, r_0} . Si la trajectoire ultérieure déviait vers un des deux hémisphères séparés par cet équateur, cela représenterait une brisure de la symétrie sphérique. Ainsi la particule doit rester dans le plan

$$\theta = \frac{\pi}{2}. \quad (3.81)$$

On en déduit immédiatement que, tout au long de la trajectoire, $u^\theta = c^{-1}d\theta/d\tau = 0$:

$$u^\theta = 0. \quad (3.82)$$

Les autres quantités conservées le long de \mathcal{L} sont données par la loi de conservation de $\vec{\xi} \cdot \vec{p}$ le long des géodésiques établie au § 3.4.1. Appliquons-la aux vecteurs de Killing $\vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t$ et $\vec{\xi}_{(z)} = \vec{\partial}_\varphi$ [cf. Eq. (3.41)] associés respectivement à la stationnarité et à la symétrie azimuthale : les quantités ε et ℓ définies par

$$\varepsilon := -\frac{c}{m}\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} = -c^2\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{u}, \quad (3.83)$$

$$\ell := \frac{1}{m}\vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{p} = c\vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{u} \quad (3.84)$$

sont alors conservées le long de la géodésique \mathcal{L} . En terme des composantes de \vec{u} par rapport aux coordonnées de Schwarzschild, on a $\varepsilon = -c^2g_{\alpha\beta}(\partial_0)^\alpha u^\beta = -c^2g_{0\beta}u^\beta$, soit, puisque $g_{\alpha\beta}$ est diagonale, $\varepsilon = -c^2g_{00}u^0$, avec d'après (2.84), $u^0 = c^{-1}dx^0/d\tau = c^{-1}d(ct)/d\tau = dt/d\tau$ (τ étant le temps propre de la particule). En utilisant la valeur de g_{00} lue sur (3.6), il vient

$$\varepsilon = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{dt}{d\tau}. \quad (3.85)$$

De même, $\ell = cg_{\alpha\beta}(\partial_\varphi)^\alpha u^\beta = cg_{\varphi\beta}u^\beta = cg_{\varphi\varphi}u^\varphi$, avec d'après (2.84), $u^\varphi = c^{-1}d\varphi/d\tau$, d'où puisque $g_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta$ [cf. (3.6)],

$$\ell = r^2 \sin^2 \theta \frac{d\varphi}{d\tau}. \quad (3.86)$$

Les quantités ε et ℓ peuvent être interprétées de la manière suivante : si la particule atteint une région infiniment éloignée du corps central, alors $\vec{\xi}_{(0)}$ coïncide avec la 4-vitesse d'un observateur statique [cf. Eq. (3.50) avec $u^0 = 1$], si bien que ε est alors l'énergie

par unité de masse de la particule mesurée par cet observateur [cf. Eq. (2.104)]. Par ailleurs, l'expression (3.86) conduit à $\ell = r \sin \theta \times (r \sin \theta d\varphi/dt) \times dt/d\tau$. Dans la région asymptotique, si la particule a une vitesse non relativiste ($dt/d\tau \simeq 1$), ℓ apparaît ainsi comme le *moment cinétique (par rapport à l'axe des z) par unité de masse*.

On peut voir que les quantités conservées associées aux deux autres vecteurs de Killing $\vec{\xi}_{(x)}$ et $\vec{\xi}_{(y)}$ de l'espace-temps de Schwarzschild [cf. Eq. (3.5)] correspondent à la conservation des deux autres composantes du vecteur moment cinétique, qui sont nulles initialement par notre choix de coordonnées. Elles sont donc toujours nulles et on retrouve ainsi le fait que le mouvement orbital a lieu dans le plan $z = 0$.

3.5.2 Potentiel effectif

Les quantités conservées (3.82), (3.85) et (3.86) permettent d'exprimer 3 des 4 composantes de la 4-vitesse \vec{u} de la particule :

$$u^0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{c^2} \quad (3.87)$$

$$u^\theta = 0 \quad (3.88)$$

$$u^\varphi = \frac{\ell}{c r^2 \sin^2 \theta} = \frac{\ell}{c r^2}, \quad (3.89)$$

où l'on a utilisé $\sin \theta = 1$ puisque $\theta = \pi/2$. La 4ème composante est obtenue via la relation de normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$. Comme les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique par rapport aux coordonnées de Schwarzschild sont diagonales [Eq. (3.6)], il vient

$$g_{00}(u^0)^2 + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = -1. \quad (3.90)$$

En utilisant les valeurs (3.6) de $g_{\alpha\beta}$ (avec $\sin \theta = 1$), ainsi que les expressions (3.87)-(3.89), on obtient

$$-\left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \frac{\varepsilon^2}{c^4} + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 + \frac{\ell^2}{c^2 r^2} = -1. \quad (3.91)$$

Étant donné que [cf. Eq. (2.84)]

$$u^r = \frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}, \quad (3.92)$$

et $R_S = 2GM/c^2$ [Eq. (3.10)], l'Eq. (3.91) peut être réécrite comme

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{\varepsilon^2 - c^4}{2c^2}}, \quad (3.93)$$

où l'on a défini

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) := -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2} - \frac{GM\ell^2}{c^2 r^3}}. \quad (3.94)$$

Rappelons que dans ces formules, les quantités ε et ℓ sont des constantes. L'Eq. (3.93) apparaît alors tout à fait analogue à l'équation de conservation de l'énergie mécanique d'une

particule non relativiste en mouvement unidimensionnel (variable de position = r) dans le potentiel $V_{\text{eff}}(r)$. Pour cette raison $V_{\text{eff}}(r)$ est appelé *potentiel effectif* du mouvement géodésique dans la métrique de Schwarzschild.

Examinons la limite newtonienne des équations (3.93) et (3.94). Nous avons vu que ε s'interprète comme l'énergie de la particule par unité de masse mesurée par un observateur statique distant du corps central. Écrivons donc

$$\varepsilon =: \frac{mc^2 + E_0}{m} = c^2 + \frac{E_0}{m}, \quad (3.95)$$

Dans le cas relativiste, cela revient à définir E_0 comme $m\varepsilon$ auquel on a retranché l'énergie de masse au repos mc^2 . A la limite newtonienne, E_0 n'est autre que l'énergie mécanique de la particule (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle).

On a

$$\frac{\varepsilon^2 - c^4}{2c^2} = \frac{E_0}{m} \left(1 + \frac{E_0}{2mc^2} \right), \quad (3.96)$$

A la limite newtonienne, $E_0/(mc^2) \ll 1$ et le troisième terme du membre de droite de (3.94) est négligeable devant le deuxième, si bien que l'Eq. (3.93) devient

$$\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}^{\text{newt}}(r) = \frac{E_0}{m}, \quad (3.97)$$

avec

$$V_{\text{eff}}^{\text{newt}}(r) := -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2}{2r^2}. \quad (3.98)$$

Le temps propre τ coïncide évidemment dans ce cas avec le temps universel newtonien et on reconnaît dans (3.97)-(3.98) l'équation qui régit la partie radiale de la vitesse dans le mouvement keplerien autour de la masse M .

Revenons au cas relativiste et étudions le potentiel effectif (3.94). En faisant apparaître le rayon de Schwarzschild $R_S = 2GM/c^2$ et en introduisant le paramètre sans dimension

$$\bar{\ell} := \frac{\ell}{cR_S} = \frac{c\ell}{2GM}, \quad (3.99)$$

V_{eff} se met sous la forme

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{c^2}{2} \left(-\frac{R_S}{r} + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2} - \bar{\ell}^2 \frac{R_S^3}{r^3} \right). \quad (3.100)$$

Les extrema de V_{eff} sont donnés par

$$\frac{dV_{\text{eff}}}{dr} = \frac{c^2 R_S}{2r^2} \left(1 - 2\bar{\ell}^2 \frac{R_S}{r} + 3\bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2} \right) = 0, \quad (3.101)$$

autrement dit par

$$\left(\frac{r}{R_S} \right)^2 - 2\bar{\ell}^2 \left(\frac{r}{R_S} \right) + 3\bar{\ell}^2 = 0. \quad (3.102)$$

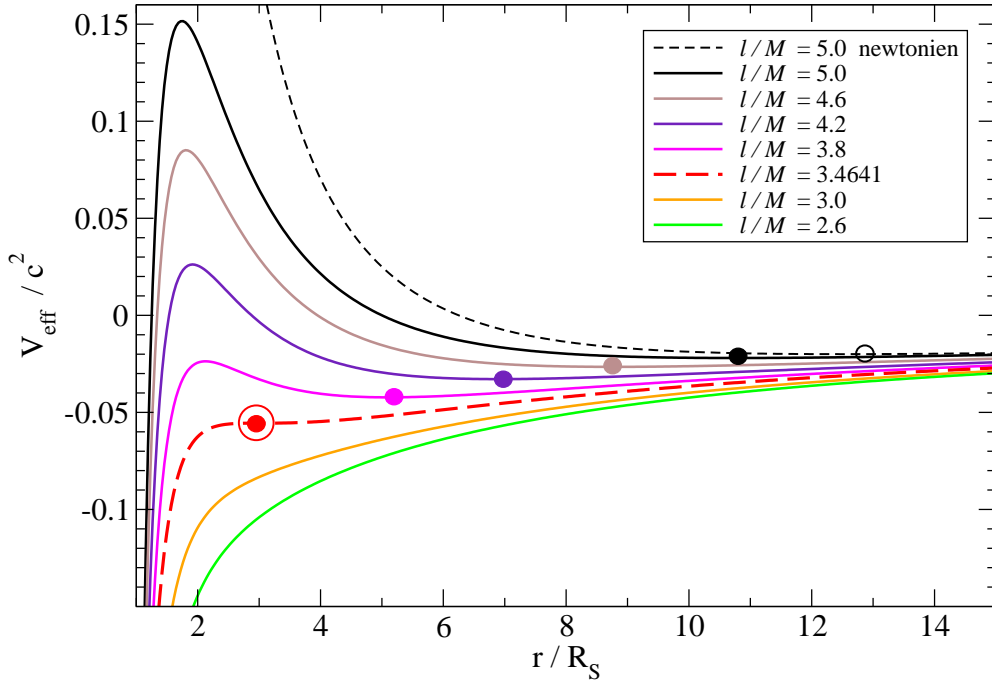


FIGURE 3.6 – Potentiel effectif défini par l’Eq. (3.94) et donnant la partie radiale du mouvement géodésique d’une particule matérielle dans l’espace-temps de Schwarzschild. Les différentes courbes correspondent à différentes valeurs du « moment cinétique » par unité de masse ℓ de la particule, exprimé en unités de GM/c . La courbe en traits pointillés fins est celle du cas newtonien pour $\ell = 5GM/c$. La courbe en traits pointillés longs est la courbe du cas critique $\ell = 2\sqrt{3}GM/c \simeq 3.4641GM/c$. Les cercles pleins marquent les positions d’équilibre stable pour les orbites circulaires. Le cercle entouré correspond à la dernière orbite circulaire stable (ISCO) en $r = 3R_S$.

Ce trinôme en r/R_S admet des racines si, et seulement si, $\bar{\ell}^4 - 3\bar{\ell}^2 \geq 0$, c’est-à-dire si, et seulement si, $\bar{\ell}^2 \geq 3$, soit

$$|\bar{\ell}| \geq \bar{\ell}_{\text{crit}} := \sqrt{3}. \quad (3.103)$$

La valeur critique de ℓ correspondante est [cf. (3.99)]

$$\boxed{\ell_{\text{crit}} = 2\sqrt{3} \frac{GM}{c}}. \quad (3.104)$$

Pour $|\ell| > \ell_{\text{crit}}$, V_{eff} admet deux extrema, situés en

$$\frac{r_{\text{max}}}{R_S} = \bar{\ell}^2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}} \right) \quad \text{et} \quad \frac{r_{\text{min}}}{R_S} = \bar{\ell}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}} \right). \quad (3.105)$$

r_{max} (resp. r_{min}) correspond à un maximum (resp. minimum) de $V_{\text{eff}}(r)$ (cf. Fig. 3.6)⁵. Pour $|\ell| = \ell_{\text{crit}}$, ces deux extrema convergent en un point d’inflexion et pour $|\ell| < \ell_{\text{crit}}$, il n’y a aucun extremum : $V_{\text{eff}}(r)$ est une fonction strictement croissante.

5. NB : $r_{\text{max}} < r_{\text{min}}$, les indices ‘max’ et ‘min’ se rapportant aux extrema de $V_{\text{eff}}(r)$, et non à la valeur de r .

Cette situation est différente du cas newtonien, où dès que $\ell \neq 0$, $V_{\text{eff}}(r)$ présente toujours un minimum et pas de maximum (cf. la courbe en pointillés fins sur la Fig. 3.6, dont le minimum est indiqué par un cercle non rempli). La remontée du potentiel newtonien lorsque $r \rightarrow 0$ est due au terme $\ell^2/(2r^2)$, qui domine alors le potentiel gravitationnel $-GM/r$ [cf. Eq. (3.98)] : il s'agit de la *barrière centrifuge* qui interdit à la particule d'approcher $r = 0$ lorsque $\ell \neq 0$. Le cas relativiste diffère du cas newtonien par le terme additionnel $-GM\ell^2/(c^2r^3)$ dans $V_{\text{eff}}(r)$ [comparer les Eqs. (3.94) et (3.98)]. Lorsque $r \rightarrow 0$, ce terme en $1/r^3$ domine le terme centrifuge en $1/r^2$ et, étant de signe opposé, provoque $V_{\text{eff}}(r) \rightarrow -\infty$ plutôt que $V_{\text{eff}}(r) \rightarrow +\infty$.

3.5.3 Orbites circulaires

Lorsque $|\ell| > \ell_{\text{crit}}$, des considérations sur l'Eq. (3.93) tout à fait analogues à celles sur le mouvement potentiel unidimensionnel en mécanique classique font conclure que le point $r = r_{\text{min}}$ est une position d'équilibre stable. Comme il s'agit d'une valeur fixe de r , cela correspond à une orbite circulaire. La valeur de r est reliée à ℓ via l'expression (3.105) de r_{min} :

$$\frac{r}{R_S} = \bar{\ell}^2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}} \right). \quad (3.106)$$

Désignons par Ω la vitesse angulaire orbitale de la particule mesurée par un observateur statique à l'infini. On peut la calculer de la manière suivante. Supposons que la particule émette un photon dans la direction radiale depuis un point de coordonnées $(t_1^{\text{em}}, r_{\text{em}} = r, \pi/2, \varphi_1^{\text{em}} = \varphi_0)$ et que ce photon parvienne à un observateur statique distant \mathcal{O} en un point de coordonnées $(t_1^{\text{rec}}, r_{\text{rec}}, \pi/2, \varphi_1^{\text{rec}})$, avec $r_{\text{rec}} \gg r$ et $\varphi_1^{\text{rec}} = \varphi_0$ (puisque le photon emprunte une géodésique radiale). Supposons que la particule émette un deuxième photon en direction de l'observateur \mathcal{O} lorsqu'elle a fait un tour complet sur son orbite : les coordonnées de cet événement sont $(t_2^{\text{em}}, r_{\text{em}} = r, \pi/2, \varphi_2^{\text{em}} = \varphi_0 + 2\pi)$ avec

$$t_2^{\text{em}} = t_1^{\text{em}} + 2\pi \left(\frac{d\varphi}{dt} \right)^{-1}. \quad (3.107)$$

Soit alors $(t_2^{\text{rec}}, r_{\text{rec}}, \pi/2, \varphi_0)$ les coordonnées de la réception du photon par \mathcal{O} . Nous avons vu au § 3.4.3 qu'en vertu de la stationnarité de l'espace-temps de Schwarzschild,

$$t_2^{\text{rec}} - t_1^{\text{rec}} = t_2^{\text{em}} - t_1^{\text{em}} \quad (3.108)$$

[cf. Eq. (3.73) et Fig. 3.4]. Par ailleurs, puisque l'observateur \mathcal{O} est situé dans la région asymptotique, son temps propre est donné par la coordonnée de Schwarzschild t . La vitesse angulaire qu'il mesure en comptant le temps écoulé entre la réception des deux photons est donc

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_2^{\text{rec}} - t_1^{\text{rec}}}. \quad (3.109)$$

Au vu de (3.108), il vient

$$\Omega = \frac{2\pi}{t_2^{\text{em}} - t_1^{\text{em}}}, \quad (3.110)$$

soit, d'après (3.107),

$$\boxed{\Omega = \frac{d\varphi}{dt}}. \quad (3.111)$$

On peut alors utiliser (3.85) et (3.86) et écrire

$$\Omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = \frac{\ell}{r^2} \times c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \varepsilon^{-1} = \frac{\ell}{\varepsilon} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{c^2}{r^2}. \quad (3.112)$$

Il s'agit maintenant d'exprimer ℓ/ε en fonction de r . Puisque $dr/d\tau = 0$, on tire de (3.93)

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{\varepsilon^2 - c^4}{2c^2}, \quad (3.113)$$

d'où, en utilisant l'expression (3.100) de $V_{\text{eff}}(r)$:

$$\frac{\varepsilon^2}{\bar{\ell}^2} = c^4 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left[\frac{1}{\bar{\ell}^2} + \left(\frac{R_S}{r}\right)^2 \right]. \quad (3.114)$$

Or la relation (3.106) entre r et $\bar{\ell}$ conduit à

$$\frac{R_S}{r} = \frac{1}{\bar{\ell}^2} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}}\right)^{-1} = \frac{1}{\bar{\ell}^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}}\right) \left[1 - \left(1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}\right)\right]^{-1}, \quad (3.115)$$

c'est-à-dire

$$\frac{R_S}{r} = \frac{1}{3} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}}\right). \quad (3.116)$$

En prenant le carré de cette relation, il vient

$$\left(\frac{R_S}{r}\right)^2 = \frac{1}{9} \left[2 \left(1 - \sqrt{1 - \frac{3}{\bar{\ell}^2}}\right) - \frac{3}{\bar{\ell}^2}\right], \quad (3.117)$$

soit

$$\left(\frac{R_S}{r}\right)^2 = \frac{1}{3} \left(2\frac{R_S}{r} - \frac{1}{\bar{\ell}^2}\right), \quad (3.118)$$

d'où l'on tire

$$\frac{1}{\bar{\ell}^2} = 2\frac{R_S}{r} - 3 \left(\frac{R_S}{r}\right)^2. \quad (3.119)$$

En reportant cette valeur de $\bar{\ell}^{-2}$ dans (3.114), il vient

$$\frac{\varepsilon^2}{\bar{\ell}^2} = 2c^4 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^2 \frac{R_S}{r}, \quad (3.120)$$

soit [cf. (3.99)]

$$\frac{\varepsilon^2}{\bar{\ell}^2} = 2 \frac{c^2}{R_S r} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^2, \quad (3.121)$$

ou encore

$$\frac{\ell}{\varepsilon} = \frac{1}{c} \sqrt{\frac{R_S}{2}} r \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1}. \quad (3.122)$$

C'est la valeur du rapport ℓ/ε cherchée, que l'on peut reporter dans (3.112) pour obtenir l'expression très simple

$$\Omega = c \sqrt{\frac{R_S}{2r^3}}, \quad (3.123)$$

c'est-à-dire, en exprimant R_S en fonction de M [Eq. (3.10)],

$$\boxed{\Omega = \sqrt{\frac{GM}{r^3}}}. \quad (3.124)$$

Ce résultat a de quoi surprendre : on obtient exactement la même formule que dans le cas newtonien ! Tous les termes relativistes, en R_S/r , se sont simplifiés en cours de calcul. Il s'agit en fait d'une coïncidence, sans sens physique particulier. N'oublions pas en effet que r n'est qu'une coordonnée sur l'espace-temps \mathcal{E} . Si on utilise plutôt la coordonnée isotrope \bar{r} introduite au § 3.2.5, la formule devient [cf. Eq. (3.15)]

$$\Omega = \sqrt{\frac{GM}{\bar{r}^3}} \left(1 + \frac{R_S}{4\bar{r}}\right)^{-3}, \quad (3.125)$$

et contient donc clairement une correction relativiste en R_S/\bar{r} .

Le résultat (3.124) justifie l'interprétation du paramètre M de la métrique de Schwarzschild comme la *masse* du corps central : dans la région asymptotique, pour $r \gg R_S$, la coordonnée r s'interprète comme la distance physique au corps central et la loi (3.124) n'est autre que la loi keplerienne du mouvement orbital circulaire newtonien autour d'un objet sphérique de masse M .

3.5.4 Dernière orbite circulaire stable

Nous avons vu ci-dessus que les orbites circulaires stables n'existent que pour $|\ell| > \ell_{\text{crit}}$: en dessous de ℓ_{crit} le potentiel effectif $V_{\text{eff}}(r)$ n'admet en effet pas de minimum (cf. Fig. 3.6). Comme r est une fonction croissante de ℓ pour les orbites circulaires [cf. Eq. (3.106)], on en déduit l'existence d'une orbite de plus petit r correspondant à $|\ell| = \ell_{\text{crit}}$. Nous l'appellerons *dernière orbite circulaire stable* ou encore *ISCO*, des initiales de l'anglais *innermost stable circular orbit*. La valeur de la coordonnée de Schwarzschild r de cette orbite est obtenue en injectant la valeur (3.103) de $\bar{\ell}_{\text{crit}}$ dans (3.106) :

$$\boxed{r_{\text{ISCO}} = 3R_S = \frac{6GM}{c^2}}. \quad (3.126)$$

Pour des objets non compacts, on a $3R_S \ll R$ où R est le rayon de l'objet, si bien que l'ISCO n'existe pas. La vitesse angulaire orbitale à l'ISCO s'obtient en reportant r_{ISCO} dans (3.124) :

$$\Omega_{\text{ISCO}} = \frac{1}{6^{3/2}} \frac{c^3}{GM}, \quad (3.127)$$

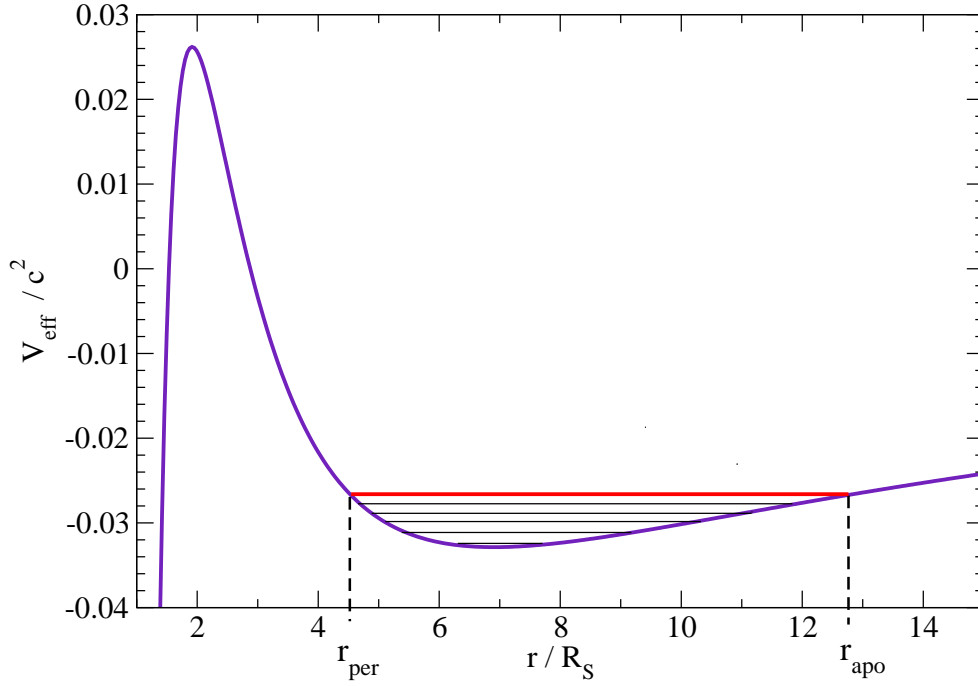


FIGURE 3.7 – Potentiel effectif défini par l’Eq. (3.94) dans le cas où le « moment cinétique » par unité de masse ℓ de la particule vaut $\ell = 4.2 GM/c$. Le segment de droite horizontal correspond à une valeur de ε telle que $\varepsilon < c^2$, ce qui assure une orbite liée, avec des valeurs de r oscillant entre r_{per} (périastre) et r_{apo} (apoastre).

ce qui correspond à la fréquence orbitale suivante

$$f_{\text{ISCO}} = \frac{\Omega_{\text{ISCO}}}{2\pi} = 2.20 \left(\frac{1 M_{\odot}}{M} \right) \text{ kHz.} \quad (3.128)$$

3.5.5 Autres orbites

Reprenons les considérations sur l’équation (3.93), en ne supposant plus les orbites circulaires. On constate ainsi qu’il existe des orbites liées pour

$$|\ell| > \ell_{\text{crit}} \quad \text{et} \quad \varepsilon < c^2, \quad (3.129)$$

la première condition assurant que le potentiel effectif $V_{\text{eff}}(r)$ a une forme de puits (cf. Fig. 3.6) et la deuxième que la particule reste piégée dans ce puits, en rendant négatif le membre de droite de (3.93). La position radiale de la particule oscille alors entre deux valeurs de r , r_{per} (*périastre*) et r_{apo} (*apoastre*) vérifiant $r_{\text{per}} \leq r_{\text{apo}}$ (cf. Fig. 3.7). r_{per} et r_{apo} s’obtiennent en effectuant $dr/d\tau = 0$ dans (3.93). De manière similaire à (3.114), on obtient

$$\frac{\varepsilon^2}{c^4} = \left(1 - \frac{R_S}{r_*} \right) \left[1 + \bar{\ell}^2 \left(\frac{R_S}{r_*} \right)^2 \right], \quad (3.130)$$

où r_* désigne r_{per} ou r_{apo} . Les valeurs de r_{per} et r_{apo} s'obtiennent donc comme les racines de l'équation du troisième ordre ci-dessus.

Établissons à présent l'équation de l'orbite, sous la forme d'une équation différentielle pour la fonction $\varphi(r)$. On tire de (3.93) que

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^2} - c^2 - 2V_{\text{eff}}} = \pm c \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2}\right)}, \quad (3.131)$$

où, pour obtenir la deuxième égalité, nous avons utilisé la forme (3.100) pour $V_{\text{eff}}(r)$. Par ailleurs, $d\varphi/d\tau$ est donné par (3.86) avec $\sin \theta = 1$:

$$\frac{d\varphi}{d\tau} = \frac{\ell}{r^2}. \quad (3.132)$$

En combinant (3.131) et (3.132), on élimine τ ($d\varphi/dr = d\varphi/d\tau \times d\tau/dr$) et on obtient l'équation cherchée :

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\ell}{c r^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2}}. \quad (3.133)$$

Examinons la limite newtonienne de cette équation. À cette fin, utilisons (3.95) pour exprimer ε en fonction de la quantité E_0 qui tend vers l'énergie mécanique newtonienne. Il vient

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2} \left[\left(2 + \frac{E_0}{mc^2}\right) \frac{E_0}{m} + \frac{2GM}{r} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2} \right]^{-1/2}. \quad (3.134)$$

Cette équation reste tout à fait générale : ce n'est qu'une réécriture de (3.133) qui fait apparaître E_0 à la place de ε et où l'on a remplacé un terme R_S par $2GM/c^2$, ainsi que $\bar{\ell}R_S$ par ℓ/c . Nous sommes maintenant en mesure de prendre la limite newtonienne : elle consiste à faire $E_0/(mc^2) \ll 1$ et $R_S/r \ll 1$. Il vient ainsi

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{\ell}{r^2} \left(2 \frac{E_0}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{\ell^2}{r^2} \right)^{-1/2} \quad (\text{lim. newtonienne}). \quad (3.135)$$

En posant $u = 1/r$, cette équation devient

$$\frac{d\varphi}{du} = \mp \frac{\ell}{\sqrt{2 \frac{E_0}{m} + 2GMu - \ell^2 u^2}}. \quad (3.136)$$

Par un changement de variable affine $u' = au + b$, l'Eq. (3.136) s'intègre en $\varphi = \arccos u' + \varphi_0$, de sorte qu'il vient

$$u = \frac{1}{r} = \frac{1}{p}(1 + e \cos \varphi), \quad (3.137)$$

où p et e sont les fonctions suivantes de E_0 et ℓ :

$$p = \frac{\ell^2}{GM} \quad \text{et} \quad e = \sqrt{1 + \frac{2E_0 \ell^2}{G^2 M^2}}. \quad (3.138)$$

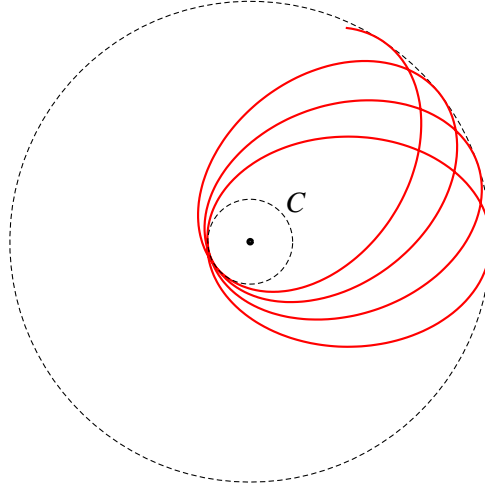


FIGURE 3.8 – Avance du périastre (fortement exagérée dans le cas de Mercure).

On reconnaît dans (3.137)-(3.138) l'équation de l'ellipse keplerienne. Tout comme pour les orbites circulaires discutées au § 3.5.3, nous retrouvons donc la bonne limite newtonienne dans le cas des orbites liées générales. Cela confirme l'interprétation du paramètre M de la métrique de Schwarzschild comme la masse du corps central.

3.5.6 Avance du périastre

Dans le cas relativiste, les orbites ne sont plus des ellipses. Mais elles pourraient rester des courbes fermées. Pour le savoir, il faut intégrer l'Eq. (3.133) entre deux passages successifs au périastre ($r = r_{\text{per}}$). Si la variation $\Delta\varphi$ de φ ainsi obtenue est exactement égale à 2π , l'orbite est fermée. Sinon, il y a *avance du périastre* (cf. Fig. 3.8), dont l'amplitude est donnée par

$$\delta\varphi_{\text{per}} := \Delta\varphi - 2\pi. \quad (3.139)$$

En intégrant (3.133), en tenant compte de ce que $d\varphi/dr > 0$ lorsque r croît de r_{per} à r_{apo} et $d\varphi/dr < 0$ lorsque r décroît de r_{apo} à r_{per} , on obtient

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= \frac{\ell}{c} \int_{r_{\text{per}}}^{r_{\text{apo}}} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2} dr \\ &\quad - \frac{\ell}{c} \int_{r_{\text{apo}}}^{r_{\text{per}}} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2} dr. \end{aligned} \quad (3.140)$$

On a en fait deux fois la même intégrale, si bien que

$$\delta\varphi_{\text{per}} = \frac{2\ell}{c} \int_{r_{\text{per}}}^{r_{\text{apo}}} \frac{1}{r^2} \left[\frac{\varepsilon^2}{c^4} - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 + \bar{\ell}^2 \frac{R_S^2}{r^2}\right) \right]^{-1/2} dr - 2\pi. \quad (3.141)$$

On peut montrer qu'en dehors de la limite newtonienne, $\delta\varphi_{\text{per}}$ n'est jamais nul. En particulier, pour des orbites faiblement relativistes (développement au premier ordre en R_S/r),

on obtient, après quelques calculs que nous ne détaillerons pas ici,

$$\delta\varphi_{\text{per}} = 6\pi \left(\frac{GM}{c\ell} \right)^2. \quad (3.142)$$

En utilisant la valeur newtonienne de ℓ donnée par (3.138), $\ell^2 = GMp$ avec $p = a(1 - e^2)$, $a =$ demi grand axe de l'ellipse, $e =$ excentricité de l'ellipse, il vient

$$\boxed{\delta\varphi_{\text{per}} = 6\pi \frac{GM}{c^2 a(1 - e^2)}}. \quad (3.143)$$

Le tout premier test de la relativité générale a été basé sur cette formule et a été donné par Albert Einstein dès la publication de sa théorie en 1915 [26]. Il s'agit de l'avance du périastre (périhélie) de la planète Mercure autour du Soleil. Les paramètres dans ce cas sont $M = 1 M_{\odot} = 1.989 \times 10^{30}$ kg, $a = 5.79 \times 10^{10}$ m et $e = 0.206$, de sorte que l'on obtient

$$\delta\varphi_{\text{per}} = 5.0 \times 10^{-7} \text{ rad}. \quad (3.144)$$

Il s'agit-là de l'avance du périastre au bout d'une orbite. Comme la période orbitale de Mercure est de 88 jours, l'effet cumulé au bout d'un siècle est

$$\Delta\varphi_{\text{per}} = 43''. \quad (3.145)$$

Pour des systèmes beaucoup plus relativistes comme les pulsars binaires, on a (Will (2006) [72])

$$\delta\varphi_{\text{per}}(\text{PSR B1913+16}) = 4.2^\circ/\text{an} \quad (3.146)$$

$$\delta\varphi_{\text{per}}(\text{PSR J0737-3039}) = 16.9^\circ/\text{an}. \quad (3.147)$$

Remarque : Dans cette section sur le mouvement des particules matérielles autour d'un corps central, nous n'avons à aucun moment parlé de force gravitationnelle : ce concept n'existe pas en relativité générale. Toutes les propriétés ont été dérivées à partir des géodésiques du genre temps de la métrique de Schwarzschild. En particulier, nous avons retrouvé les ellipses képlériennes, non à partir de la loi de Newton, mais comme des géodésiques de la métrique de Schwarzschild lorsque $r \gg GM/c^2$.

3.6 Trajectoires des photons

Intéressons-nous à présent aux géodésiques lumière de la métrique de Schwarzschild. Nous avons déjà traité le cas des géodésiques lumières radiales au § 3.3. Passons à présent au cas général.

3.6.1 Potentiel effectif

Le raisonnement est tout à fait similaire à celui effectué pour les géodésiques du genre temps au § 3.5. Si l'on désigne par \vec{p} la 4-impulsion du photon, les symétries de la métrique

de Schwarzschild impliquent que la trajectoire d'un photon reste dans un plan, que l'on choisit être $\theta = \pi/2$, et que les quantités suivantes

$$\varepsilon := -c \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} \quad (3.148)$$

$$\ell := \vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{p} \quad (3.149)$$

sont conservées le long de la géodésique décrite par le photon. Si le photon atteint la région asymptotique ($r \gg R_S$), ε et ℓ s'interprètent comme respectivement l'énergie et le moment cinétique du photon mesurés par un observateur statique. On déduit des quantités conservées les trois composantes suivantes de la 4-impulsion par rapport aux coordonnées de Schwarzschild :

$$p^0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{c} \quad (3.150)$$

$$p^\theta = 0 \quad (3.151)$$

$$p^\varphi = \frac{\ell}{r^2}. \quad (3.152)$$

La relation (cf. § 2.4.1)

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = 0 \quad (3.153)$$

permet alors d'obtenir la quatrième composante, puisqu'elle conduit à⁶

$$g_{00}(p^0)^2 + g_{rr}(p^r)^2 + g_{\theta\theta}(p^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(p^\varphi)^2 = 0. \quad (3.154)$$

En utilisant les valeurs (3.6) de $g_{\alpha\beta}$ et les expressions (3.150)-(3.152), on obtient

$$(p^r)^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \frac{\ell^2}{r^2} = \frac{\varepsilon^2}{c^2}. \quad (3.155)$$

Introduisons un paramètre affine λ le long de la géodésique lumière tel que

$$\vec{p} = \ell \frac{\overrightarrow{dP}}{d\lambda}, \quad (3.156)$$

où \overrightarrow{dP} est le vecteur déplacement élémentaire introduit au § 2.2.3. Puisque ℓ est constant le long de la géodésique, sa présence dans (3.156) revient à choisir le paramètre affine λ (cf. § 2.6.3). La formule (3.155) peut alors être réécrite comme

$$\boxed{\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + U_{\text{eff}}(r) = b^{-2}}, \quad (3.157)$$

avec

$$\boxed{U_{\text{eff}}(r) = \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)}. \quad (3.158)$$

6. On utilise le fait que les composantes $g_{\alpha\beta}$ de \mathbf{g} par rapport aux coordonnées de Schwarzschild sont diagonales.

et

$$b^2 := \frac{c^2 \ell^2}{\varepsilon^2}. \quad (3.159)$$

Ainsi, tout comme pour les particules matérielles, la partie radiale de la trajectoire du photon obéit à une équation de mouvement unidimensionnel dans un potentiel effectif. La différence est que le potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$ est unique : il ne dépend pas de ℓ . Les trajectoires des photons sont donc entièrement déterminées par le paramètre b . Ce dernier a la dimension d'une longueur et s'interprète comme le paramètre d'impact pour les photons arrivant depuis l'infini. En effet, considérons un photon émis en un point de coordonnées $\theta = \pi/2$, $x = r_{\text{em}} \cos \varphi_{\text{em}}$, $y = y_{\text{em}} = r_{\text{em}} \sin \varphi_{\text{em}}$ avec une impulsion dans la direction de l'axe x . Supposons $r_{\text{em}} \gg R_S$ et φ_{em} petit. La trajectoire du photon est alors initialement à y constant : $y = y_{\text{em}}$ et y_{em} constitue le paramètre d'impact du photon vis-à-vis du corps central. On a, en début de trajectoire, $y = y_{\text{em}} = r \sin \varphi \simeq r\varphi$ (puisque φ est petit), d'où

$$\varphi \simeq \frac{y_{\text{em}}}{r}. \quad (3.160)$$

En dérivant par rapport à la coordonnée t , il vient

$$\frac{d\varphi}{dt} \simeq -\frac{y_{\text{em}}}{r^2} \frac{dr}{dt} \simeq \frac{c y_{\text{em}}}{r^2}, \quad (3.161)$$

où l'on a utilisé $dr/dt \simeq -c$. Par ailleurs, (3.156), (3.150) et (3.152) conduisent à

$$\frac{dt}{d\lambda} = \frac{1}{cb} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \quad (3.162)$$

$$\frac{d\varphi}{d\lambda} = \frac{1}{r^2}, \quad (3.163)$$

d'où, en écrivant $d\varphi/dt = d\varphi/d\lambda \times d\lambda/dt$,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{cb}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right). \quad (3.164)$$

Dans la région asymptotique, on peut négliger le terme en R_S/r . L'identification avec (3.161) conduit alors à

$$b = y_{\text{em}}, \quad (3.165)$$

ce qui montre que b est le paramètre d'impact du photon qui arrive depuis l'infini.

3.6.2 Allure des trajectoires des photons

Le potentiel effectif U_{eff} est représenté sur la Fig. 3.9. Il n'a pas de minimum et un unique maximum en

$$r_{\text{crit}} = \frac{3}{2}R_S = \frac{3GM}{c^2}, \quad (3.166)$$

qui vaut

$$\max U_{\text{eff}} = U_{\text{eff}}(r_{\text{crit}}) = \frac{4}{27 R_S^2} = \frac{c^4}{27 G^2 M^2}. \quad (3.167)$$

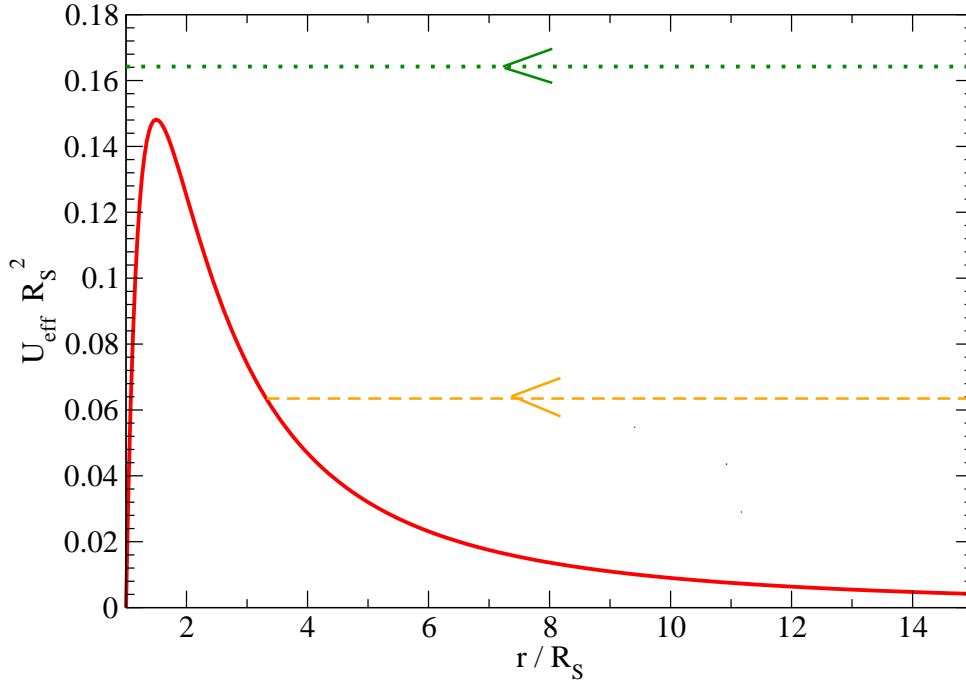


FIGURE 3.9 – Potentiel effectif $U_{\text{eff}}(r)$ défini par l'Eq. (3.94) et donnant la partie radiale du mouvement d'un photon dans l'espace-temps de Schwarzschild. Les lignes horizontales correspondent à deux valeurs du membre de droite b^{-2} de l'Eq. (3.157) : la première vérifie $b < b_{\text{crit}}$ (ligne du haut) et la deuxième $b > b_{\text{crit}}$ (ligne du bas).

Cet extremum correspond à une position d'équilibre pour r : il s'agit donc d'une orbite circulaire pour les photons. Mais comme il s'agit d'un maximum et non d'un minimum de U_{eff} , cette orbite est instable.

D'après la forme de l'Eq. (3.157), on voit que les photons en provenance de l'infini avec un paramètre d'impact b tel que $b^{-2} < \max U_{\text{eff}}$ vont « rebondir » sur la barrière de potentiel constituée par U_{eff} (cf. Fig. 3.9) : ils vont donc repartir vers l'infini. Par contre, les photons pour lesquels $b^{-2} > \max U_{\text{eff}}$ (petit paramètre d'impact) « passent au dessus » de la barrière de potentiel (ligne du haut sur la Fig. 3.9). Si le corps central est un trou noir, ils sont alors irrémédiablement piégés. La valeur critique du paramètre d'impact, qui vérifie $b^{-2} = \max U_{\text{eff}}$ est, d'après (3.167),

$$b_{\text{crit}} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S. \quad (3.168)$$

Il ressort de l'analyse ci-dessus qu'un observateur distant ne peut recevoir de photons de paramètre d'impact $b < b_{\text{crit}}$. Le trou noir lui apparaît alors comme un disque noir de rayon apparent $R_a = b_{\text{crit}}$ et non R_S (cf. le problème B.12 pour plus de détails et des valeurs numériques relatives à des trous noirs connus).

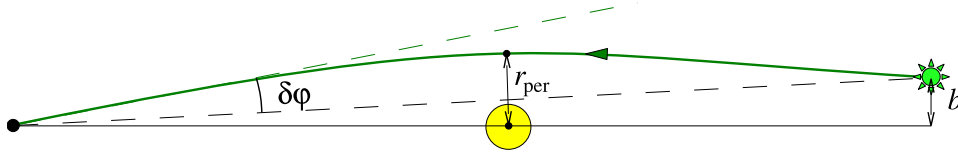


FIGURE 3.10 – Déviation des rayons lumineux au voisinage du Soleil.

3.6.3 Déviation des rayons lumineux

On tire de (3.157)

$$\frac{dr}{d\lambda} = \pm [b^{-2} - U_{\text{eff}}(r)]^{1/2}. \quad (3.169)$$

En combinant avec (3.163), on élimine λ pour obtenir

$$\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} [b^{-2} - U_{\text{eff}}(r)]^{-1/2}. \quad (3.170)$$

En remplaçant $U_{\text{eff}}(r)$ par sa valeur (3.158), on obtient l'équation différentielle qui régit la trajectoire des photons dans le plan $\theta = \pi/2$:

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dr} = \pm \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \right]^{-1/2}}. \quad (3.171)$$

Un photon qui arrive depuis l'infini avec un paramètre d'impact $b > b_{\text{crit}}$ voit sa valeur de r diminuer jusqu'au point r_{per} où il « butte » sur la barrière de potentiel U_{eff} . Sa valeur de r augmente ensuite lorsque le photon repart vers l'infini. Le minimum de r , r_{per} (périastre), est obtenu en faisant $dr/d\lambda = 0$ dans l'Eq. (3.169) ; il vient

$$\frac{1}{b^2} r_{\text{per}}^3 - r_{\text{per}} + R_S = 0. \quad (3.172)$$

La résolution de cette équation du troisième degré fournit r_{per} en fonction du paramètre d'impact b et de la masse M du corps central (via R_S).

La variation totale de l'angle φ lors du trajet du photon est obtenue en intégrant l'Eq. (3.171) :

$$\Delta\varphi = - \int_{+\infty}^{r_{\text{per}}} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \right]^{-1/2} dr + \int_{r_{\text{per}}}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \right]^{-1/2} dr, \quad (3.173)$$

c'est-à-dire

$$\boxed{\Delta\varphi = 2 \int_{r_{\text{per}}}^{+\infty} \frac{1}{r^2} \left[\frac{1}{b^2} - \frac{1}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \right]^{-1/2} dr}. \quad (3.174)$$

Considérons le cas d'un corps non compact, comme le Soleil. Le paramètre d'impact doit être supérieur au rayon de l'objet R : $b > R$. Comme $R \gg R_S$ (objet non compact),

on a alors nécessairement $b \gg R_S$ et on peut effectuer un développement de l'intégrant dans (3.174) par rapport au petit paramètre R_S/b . Le calcul, que nous ne détaillerons pas ici, conduit au résultat suivant :

$$\Delta\varphi \simeq \pi + \frac{2R_S}{b}. \quad (3.175)$$

La déviation par rapport à un trajet en ligne droite, pour lequel $\Delta\varphi = \pi$, est alors (cf. Fig. 3.10)

$$\delta\varphi = \frac{2R_S}{b} = \frac{4GM}{c^2b}. \quad (3.176)$$

Dans le cas du Soleil, la déviation est maximale pour $b = R_\odot$ et vaut

$$\delta\varphi_\odot = 1.75''. \quad (3.177)$$

Cette déviation a pu être mise en évidence en mesurant la position des étoiles au voisinage du disque solaire lors de l'éclipse de 1919 par Arthur Eddington et son équipe. Après l'avance du périhélie de Mercure, il s'agissait du second test passé avec succès par la relativité générale. C'est cet événement qui a rendu Albert Einstein célèbre auprès du grand public. Aujourd'hui, la déviation des rayons « lumineux » a pu être mesurée avec beaucoup plus de précision en considérant les signaux radio émis par des sources extragalactiques (quasars, AGN, etc...) : la prédiction de la relativité générale a été confirmée à mieux que 10^{-3} près [66] (cf. Fig. 3.11).

3.6.4 Mirages gravitationnels

La déviation des rayon lumineux est aujourd'hui très importante en cosmologie observationnelle, puisqu'elle est à l'origine du phénomène de *mirage gravitationnel*, encore appelé *lentille gravitationnelle*. Elle est alors utilisée non plus comme test de la gravitation, mais pour mesurer la masse M (cf. par exemple le Chap. 6 de [15]).

Il est intéressant de remarquer que toute la théorie des mirages gravitationnels est basée sur la formule (3.176), du moins pour un défecteur ponctuel. C'est le seul ingrédient de relativité générale utilisé dans le calcul des images.

3.6.5 Retard de la lumière (effet Shapiro)

Calculons le temps d'aller-retour d'un faisceau radio entre la Terre et une sonde spatiale lorsque le faisceau passe près du Soleil (cf. Fig. 3.12). En combinant (3.162) et (3.169), on obtient, le long de la géodésique lumière empruntée par le faisceau radio,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{dt}{d\lambda} \times \frac{d\lambda}{dr} = \pm \frac{1}{cb} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} [b^{-2} - U_{\text{eff}}(r)]^{-1/2}, \quad (3.178)$$

soit, en remplaçant $U_{\text{eff}}(r)$ par (3.158),

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left[1 - \frac{b^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)\right]^{-1/2}. \quad (3.179)$$

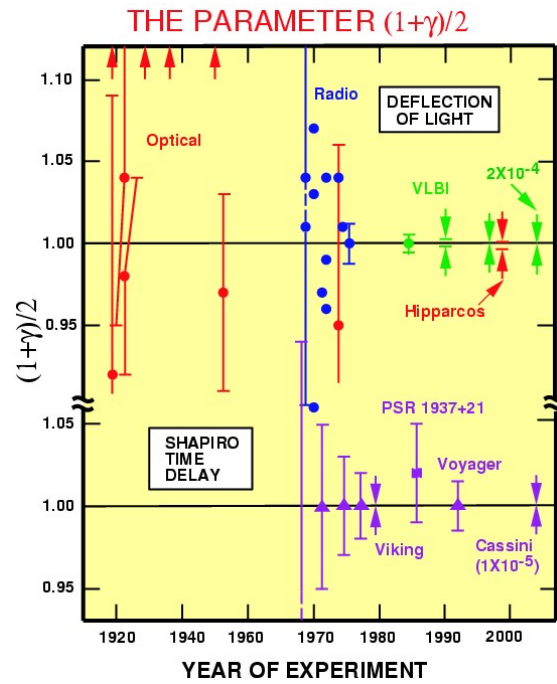


FIGURE 3.11 – Résultats de divers tests de la déviation des rayons lumineux (partie haute de la figure) et de l'effet Shapiro (partie basse), représentés à l'aide du paramètre γ , qui vaut 1 en relativité générale [figure tirée de Will (2006) [72]].

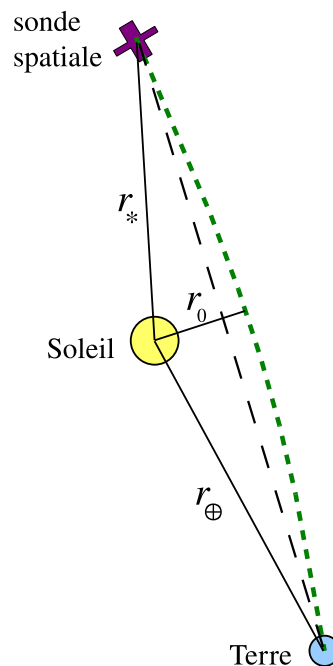


FIGURE 3.12 – Aller-retour d'un faisceau radio entre la Terre et une sonde spatiale (retard Shapiro).

On peut relier b à la distance minimale r_0 du faisceau au Soleil : en effet, pour $r = r_0$, $dr/dt = 0$, ce qui, au vu de (3.179), conduit à

$$1 - \frac{b^2}{r_0^2} \left(1 - \frac{R_S}{r_0}\right) = 0 \quad \Longrightarrow \quad b^2 = r_0^2 \left(1 - \frac{R_S}{r_0}\right)^{-1}. \quad (3.180)$$

En reportant cette valeur dans (3.179), il vient

$$\frac{dt}{dr} = \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \frac{1 - R_S/r}{1 - R_S/r_0}\right]^{-1/2}. \quad (3.181)$$

Comme en tout point du faisceau, $R_S \ll r$, on peut effectuer un développement limité à l'ordre un en R_S/r et R_S/r_0 :

$$\begin{aligned} \frac{dt}{dr} &\simeq \pm \frac{1}{c} \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \left[1 - \frac{r_0^2}{r^2} \left(1 - \frac{R_S}{r} + \frac{R_S}{r_0}\right)\right]^{-1/2} \\ &\simeq \pm \frac{1}{c} \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left[1 + \frac{(r_0/r)^2 (R_S/r - R_S/r_0)}{1 - (r_0/r)^2}\right]^{-1/2} \\ &\simeq \pm \frac{1}{c} \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 - \frac{R_S}{r} \frac{r_0}{r + r_0}\right)^{-1/2} \\ &\simeq \pm \frac{1}{c} \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} \frac{r_0}{r + r_0}\right) \\ &\simeq \pm \frac{1}{c} \left(1 - \frac{r_0^2}{r^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{R_S}{r} + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} \frac{r_0}{r + r_0}\right) \\ \frac{dt}{dr} &\simeq \pm \frac{1}{c} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left(1 + \frac{R_S}{r} + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} \frac{r_0}{r + r_0}\right). \end{aligned} \quad (3.182)$$

Le temps d'aller-retour du faisceau radio est

$$T = 2t(r_{\oplus}, r_0) + 2t(r_*, r_0), \quad (3.183)$$

où r_{\oplus} est la coordonnée r de la Terre et r_* celle de la sonde spatiale (cf. Fig. 3.12) et $t(r_{\oplus}, r_0)$ s'obtient en intégrant (3.182) :

$$t(r_{\oplus}, r_0) := \frac{1}{c} \int_{r_0}^{r_{\oplus}} \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} \left(1 + \frac{R_S}{r} + \frac{1}{2} \frac{R_S}{r} \frac{r_0}{r + r_0}\right) dr. \quad (3.184)$$

$t(r_*, r_0)$ est défini de la même manière que $t(r_{\oplus}, r_0)$, en remplaçant r_{\oplus} par r_* . L'intégrale (3.184) se calcule facilement en développant l'intégrant :

$$t(r_{\oplus}, r_0) = \frac{1}{c} \int_{r_0}^{r_{\oplus}} \left(\frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{R_S}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} + \frac{R_S r_0}{2(r - r_0)^{1/2} (r + r_0)^{3/2}} \right) dr, \quad (3.185)$$

avec les primitives suivantes :

$$\int \frac{r}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} dr = \sqrt{r^2 - r_0^2} \quad (3.186)$$

$$\int \frac{dr}{\sqrt{r^2 - r_0^2}} = \operatorname{argcosh} \left(\frac{r}{r_0} \right) = \ln \left(\frac{r}{r_0} + \sqrt{\frac{r^2}{r_0^2} - 1} \right) \quad (3.187)$$

$$\int \frac{r_0}{(r - r_0)^{1/2}(r + r_0)^{3/2}} dr = \sqrt{\frac{r - r_0}{r + r_0}}. \quad (3.188)$$

On a donc, en remplaçant R_S par $2GM/c^2$ (M étant la masse du Soleil),

$$t(r_\oplus, r_0) = \frac{1}{c} \left[\sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2} + \frac{2GM}{c^2} \ln \left(\frac{r_\oplus}{r_0} + \sqrt{\frac{r_\oplus^2}{r_0^2} - 1} \right) + \frac{GM}{c^2} \sqrt{\frac{r_\oplus - r_0}{r_\oplus + r_0}} \right]. \quad (3.189)$$

Le premier terme dans cette expression est celui que donnerait la théorie newtonienne (cf. Fig. 3.12). Écrivons la durée d'aller-retour du faisceau radio comme

$$T = T_{\text{newt}} + \Delta T, \quad (3.190)$$

où

$$T_{\text{newt}} = \frac{2}{c} \left(\sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2} + \sqrt{r_*^2 - r_0^2} \right) \quad (3.191)$$

est la durée que prédirait la physique newtonienne. D'après (3.183) et (3.189),

$$\Delta T = \frac{2GM}{c^3} \left[2 \ln \left(\frac{(r_\oplus + \sqrt{r_\oplus^2 - r_0^2})(r_* + \sqrt{r_*^2 - r_0^2})}{r_0^2} \right) + \sqrt{\frac{r_\oplus - r_0}{r_\oplus + r_0}} + \sqrt{\frac{r_* - r_0}{r_* + r_0}} \right]. \quad (3.192)$$

On constate que l'on a toujours

$$\Delta T > 0. \quad (3.193)$$

Il s'agit donc d'un retard par rapport à la prédiction newtonienne, appelé *retard de la lumière*, ou encore *retard Shapiro*, du nom de l'astrophysicien américain Irwin Shapiro qui a proposé de mesurer cet effet en 1964. En pratique, on a $r_0 \ll r_\oplus$ et $r_0 \ll r_*$, si bien que la formule ci-dessus se réduit à

$$\Delta T \simeq \frac{4GM}{c^3} \left[\ln \left(\frac{4r_\oplus r_*}{r_0^2} \right) + 1 \right]. \quad (3.194)$$

Pour une sonde sur Mars, ce retard est au maximum d'environ 0.24 ms. Grâce à la sonde Cassini, on a pu montrer en 2003 que le retard de la lumière est en accord avec la relativité générale (c'est-à-dire avec la formule (3.194)) à 2×10^{-5} près [41, 72] (cf. Fig. 3.11).

En 2010, l'effet Shapiro a été utilisé pour mesurer précisément la masse d'une étoile à neutrons en système binaire avec une naine blanche [49] : l'étoile à neutrons est observée comme un pulsar (PSR J1614-2230) et l'inclinaison du système ($i = 89^\circ$) est telle qu'une

fois par orbite, la naine blanche passe devant l'étoile à neutrons. On observe alors un retard de $25 \mu\text{s}$ dans le temps d'arrivée des pulses, qui s'interprète comme l'effet Shapiro dû au champ gravitationnel de la naine blanche. On en déduit la masse de cette dernière et, via les paramètres orbitaux, celle de l'étoile à neutrons : $M = 1.97 \pm 0.04M_{\odot}$. Il s'agit de l'étoile à neutrons la plus massive observée à ce jour. Son existence apporte des contraintes sérieuses sur l'équation d'état de la matière nucléaire.

Remarque : Dans ce chapitre, nous avons calculé de nombreuses géodésiques (géodésiques lumière radiales et non radiales, géodésiques du genre temps) sans jamais utiliser l'équation des géodésiques dérivée au Chap. 2 [Eq. (2.132) ou (2.139)]. Nous avons en effet tiré parti des symétries de l'espace-temps de Schwarzschild qui fournissent des intégrales premières de l'équation des géodésiques en nombre suffisant pour résoudre complètement le problème.

3.7 Exercices

À ce stade du cours, on peut traiter les problèmes suivants de l'Annexe B :

- l'intégralité du problème B.1 (*Décalage spectral au voisinage de la Terre*) ;
- les questions 1 à 6 du problème B.3 (*Trou de ver*) ;
- l'intégralité du problème B.5 (*Expérience de Hafele & Keating*) ;
- les questions 2 à 12 du problème B.11 (*Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild*) ;
- l'intégralité du problème B.12 (*Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs*).

Chapitre 4

Équation d'Einstein

version 2013-2014

Sommaire

4.1 Introduction	93
4.2 Dérivation covariante (connexion)	94
4.3 Tenseur de courbure	106
4.4 Tenseur énergie-impulsion	112
4.5 Équation d'Einstein	115
4.6 Solutions statiques et à symétrie sphérique	116
4.7 Exercices	122

4.1 Introduction

L'équation d'Einstein est l'équation fondamentale de la relativité générale : c'est elle qui détermine le tenseur métrique \mathbf{g} en fonction du contenu en énergie-impulsion de l'espace-temps. À la limite newtonienne, elle se réduit à l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G\rho$, reliant le potentiel gravitationnel Φ à la densité de masse ρ . Avant de l'aborder, il nous faut quelques compléments de géométrie par rapport à ceux introduits au Chap. 2, à savoir la notion de *dérivation covariante* et de *courbure*. Il nous faudra également quelques compléments de physique, pour aller au delà de la description de la matière par des « particules matérielles » utilisée dans les Chap. 2 et 3. Nous allons en effet introduire une description continue de la matière, basée sur un champ tensoriel que l'on appelle le *tenseur énergie-impulsion*. Ce traitement permet notamment de prendre en compte le cas d'un fluide, très important pour l'astrophysique. Avec ces deux outils, courbure d'une part, et tenseur énergie-impulsion d'autre part, nous serons alors en mesure d'écrire l'équation d'Einstein.

4.2 Dérivation covariante (connexion)

Nous avons vu au Chap. 2 que sur la variété d'espace-temps \mathcal{E} , il y a autant d'espaces vectoriels tangents $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ que de points P dans \mathcal{E} (cf. Fig. 2.4). La question se pose alors de comparer des vecteurs définis en des points différents. Par exemple, étant donné un champ vectoriel \vec{v} sur \mathcal{E} , c'est-à-dire la donnée d'un vecteur $\vec{v}(P) \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ en tout point P de \mathcal{E} , nous aimerions définir son « gradient » en évaluant $\vec{v}(P') - \vec{v}(P)$ pour des points P et P' infiniment voisins. Or $\vec{v}(P')$ et $\vec{v}(P)$ appartenant à des espaces vectoriels différents — les espaces tangents $\mathcal{T}_{P'}(\mathcal{E})$ et $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ respectivement — la soustraction $\vec{v}(P') - \vec{v}(P)$ n'est pas bien définie a priori. La situation est plus simple pour un champ scalaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, puisque la différence $f(P') - f(P)$ entre les deux nombres réels $f(P')$ et $f(P)$ est évidemment bien définie. Commençons donc par examiner ce cas ; il nous fournira l'inspiration pour le cas vectoriel.

4.2.1 Gradient d'un champ scalaire

Considérons un champ scalaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$. Nous avons vu au § 2.2.3 que l'on pouvait définir le vecteur déplacement élémentaire \vec{dP} entre deux points de \mathcal{E} P et P' infiniment proches. Ce vecteur est un élément de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ qui vérifie [cf. Eq. (2.35)]

$$\delta f := f(P') - f(P) = \vec{dP}(f). \quad (4.1)$$

Plutôt que de considérer δf comme le résultat du vecteur \vec{dP} agissant sur le champ scalaire f , voyons-le comme le résultat d'un opérateur lié à f , que nous noterons ∇f , agissant sur le vecteur \vec{dP} . Autrement dit posons

$$\langle \nabla f, \vec{dP} \rangle := \vec{dP}(f), \quad (4.2)$$

de sorte que (4.1) s'écrit

$$\delta f = \langle \nabla f, \vec{dP} \rangle \quad (4.3)$$

On peut étendre la définition de ∇f aux vecteurs non-infinitésimaux en posant, pour tout champ vectoriel \vec{v} ⁽¹⁾

$$\langle \nabla f, \vec{v} \rangle := \vec{v}(f). \quad (4.4)$$

Il est clair que, de par sa définition, ∇f est un opérateur linéaire. Le résultat $\langle \nabla f, \vec{v} \rangle$ étant en tout point P un nombre réel, nous en déduisons que ∇f est un champ de formes linéaires, ou encore un champ tensoriel 1-fois covariant, ou encore un champ tensoriel de type $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (cf. § 2.2.4). Cela justifie la notation bra-ket, car elle est conforme à celle que nous avons introduite au § 2.2.4 pour les formes linéaires. La forme linéaire ∇f est appelée *gradient de f* .

1. Rappelons que le membre de droite de la formule (4.4) n'est autre que l'expression de la définition première des vecteurs sur une variété comme des opérateurs de dérivation directionnelle agissant sur les champs scalaires (cf. § 2.2.3).

Remarque : On prendra soin de remarquer que le gradient d'un champ scalaire est une forme linéaire et non un vecteur. En physique non relativiste, on considère le gradient comme un vecteur parce que l'on fait implicitement correspondre à toute forme linéaire ω un unique vecteur $\vec{\omega}$ via le produit scalaire de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 suivant

$$\forall \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \quad \langle \omega, \vec{v} \rangle = \vec{\omega} \cdot \vec{v}, \quad (4.5)$$

si bien que l'on écrit (4.3) comme

$$\delta f = \vec{\nabla} f \cdot d\vec{P}. \quad (4.6)$$

Mais fondamentalement, le gradient est une forme linéaire.

Étant donnée une base vectorielle (\vec{e}_α) de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, il existe une unique base de l'espace des formes linéaires $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$ (espace dual), que nous noterons (e^α) , qui vérifie

$$\langle e^\alpha, \vec{e}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta. \quad (4.7)$$

On l'appelle la *base duale* à la base vectorielle (\vec{e}_α) . Le gradient ∇f d'un champ scalaire f étant un élément de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$, on désigne par $\nabla_\alpha f$ ses composantes par rapport à la base duale :

$$\boxed{\nabla f =: \nabla_\alpha f e^\alpha}. \quad (4.8)$$

Dans le cas où la base vectorielle est une base naturelle, c'est-à-dire liée à un système de coordonnées (x^α) : $\vec{e}_\alpha = \vec{\partial}_\alpha$, la base duale est constituée par les gradients des coordonnées, que nous noterons avec le symbole \mathbf{d} :

$$\boxed{\mathbf{d}x^\alpha := \nabla x^\alpha}. \quad (4.9)$$

En effet, en utilisant successivement la définition (4.4) et (2.14), il vient $\langle \mathbf{d}x^\alpha, \vec{\partial}_\beta \rangle = \vec{\partial}_\beta(x^\alpha) = \partial x^\alpha / \partial x^\beta$, d'où

$$\boxed{\langle \mathbf{d}x^\alpha, \vec{\partial}_\beta \rangle = \delta^\alpha_\beta}. \quad (4.10)$$

On a alors dans ce cas

$$\langle \nabla f, \vec{\partial}_\alpha \rangle = \langle \nabla_\beta f \mathbf{d}x^\beta, \vec{\partial}_\alpha \rangle = \nabla_\beta f \langle \mathbf{d}x^\beta, \vec{\partial}_\alpha \rangle = \nabla_\beta f \delta^\beta_\alpha = \nabla_\alpha f. \quad (4.11)$$

Par ailleurs, d'après (4.4) et (2.14),

$$\langle \nabla f, \vec{\partial}_\alpha \rangle = \vec{\partial}_\alpha(f) = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}. \quad (4.12)$$

On en conclut que les composantes du gradient dans la base duale $(\mathbf{d}x^\alpha)$ sont tout simplement les dérivées partielles par rapport aux coordonnées (x^α) :

$$\boxed{\nabla_\alpha f = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha}}. \quad (4.13)$$

4.2.2 Dérivation covariante d'un vecteur

Revenons à présent au cas d'un champ vectoriel \vec{v} sur \mathcal{E} . Nous aimerions faire correspondre au vecteur déplacement élémentaire \overrightarrow{dP} la variation de \vec{v} entre P et P' par une formule similaire à la formule (4.3) utilisée pour un champ scalaire

$$\delta\vec{v} = \nabla\vec{v}(\overrightarrow{dP}), \quad (4.14)$$

où $\nabla\vec{v}$ serait un opérateur agissant sur \overrightarrow{dP} . La différence majeure est que, comme remarqué plus haut, la quantité $\delta\vec{v}$ ne peut pas être définie comme $\vec{v}(P') - \vec{v}(P)$ puisque les vecteurs $\vec{v}(P')$ et $\vec{v}(P)$ n'appartiennent pas au même espace vectoriel : $\vec{v}(P') \in \mathcal{T}_{P'}(\mathcal{E})$ et $\vec{v}(P) \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$. Au contraire, pour un champ scalaire f , la quantité δf est bien définie comme la différence entre deux nombres réels : $f(P')$ et $f(P)$.

La solution à ce problème consiste à inverser le point de vue et à considérer l'écriture (4.14) comme la *définition* de $\delta\vec{v}$ en tant que vecteur de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ résultant de l'application d'un opérateur donné $\nabla\vec{v}$ agissant sur $\overrightarrow{dP} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$. Plus précisément, en élargissant aux vecteurs non-infinitésimaux $\vec{u} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, en utilisant la notation $\nabla_{\vec{u}}\vec{v}$ plutôt que $\nabla\vec{v}(\vec{u})$ et en désignant par $\mathcal{T}(\mathcal{E})$ l'ensemble des champs vectoriels sur \mathcal{E} , on suppose que l'on dispose d'une application

$$\begin{aligned} \nabla : \mathcal{T}(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathcal{T}(\mathcal{E}) \\ (\vec{u}, \vec{v}) &\longmapsto \nabla_{\vec{u}}\vec{v} \end{aligned} \quad (4.15)$$

qui possède les propriétés que l'on est en droit d'attendre d'un opérateur de dérivation :

1. La dérivée d'une somme est la somme des dérivées :

$$\forall(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{T}(\mathcal{E})^3, \quad \nabla_{\vec{u}}(\vec{v} + \vec{w}) = \nabla_{\vec{u}}\vec{v} + \nabla_{\vec{u}}\vec{w}. \quad (4.16)$$

2. La dérivée le long d'un vecteur somme de deux autres est égale à la somme des deux dérivées :

$$\forall(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) \in \mathcal{T}(\mathcal{E})^3, \quad \nabla_{\vec{a}+\vec{b}}\vec{v} = \nabla_{\vec{a}}\vec{v} + \nabla_{\vec{b}}\vec{v}. \quad (4.17)$$

3. En un point $P \in \mathcal{E}$ donné, la valeur du vecteur $\nabla_{\vec{u}}\vec{v}(P)$ ne dépend que de la valeur de \vec{u} en ce point et non de comment varie le champ \vec{u} au voisinage de P . On assure cette propriété en demandant que pour tout champ scalaire f et tous champs vectoriels \vec{u} et \vec{v} ,

$$\nabla_{f\vec{u}}\vec{v} = f\nabla_{\vec{u}}\vec{v}. \quad (4.18)$$

En effet, si (\vec{e}_α) est un champ de bases vectorielles au voisinage de P , tout champ vectoriel \vec{u}' qui coïncide avec \vec{u} en P peut s'écrire $\vec{u}' = \vec{u} + f^\alpha\vec{e}_\alpha$ où les f^α sont quatre champs scalaires tels que $f^\alpha(P) = 0$. L'application des règles (4.17) et (4.18) conduit alors à $\nabla_{\vec{u}'}\vec{v} = \nabla_{\vec{u}}\vec{v} + f^\alpha\nabla_{\vec{e}_\alpha}\vec{v}$, d'où $\nabla_{\vec{u}'}\vec{v}(P) = \nabla_{\vec{u}}\vec{v}(P)$.

4. Pour tout champ scalaire f et tous champs vectoriels \vec{u} et \vec{v} , on a la règle de Leibniz²

$$\nabla_{\vec{u}}(f\vec{v}) = \langle \nabla f, \vec{u} \rangle \vec{v} + f\nabla_{\vec{u}}\vec{v}. \quad (4.19)$$

2. Le premier terme du membre de droite est le gradient du champ scalaire f agissant sur le vecteur \vec{u} , tel que défini plus haut ; on utilise la même notation ∇ que pour l'opérateur vectoriel discuté ici.

Tout opérateur ∇ agissant sur les paires de champs vectoriels (\vec{u}, \vec{v}) suivant les règles 1 à 4 ci-dessus est appelé une connexion affine (ou simplement connexion) sur la variété \mathcal{E} . On le nomme également une dérivation covariante sur \mathcal{E} . On dit alors que $\nabla_{\vec{u}} \vec{v}$ est la dérivée covariante du champ vectoriel \vec{v} le long du vecteur \vec{u} . Le terme *connexion* vient de ce que ∇ « connecte » des espaces vectoriels tangents infiniment voisins, $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et $\mathcal{T}_{P'}(\mathcal{E})$, en *définissant* la variation du champ vectoriel \vec{v} lorsque l'on passe de P à P' par

$$\boxed{\delta\vec{v} := \nabla_{\vec{dP}} \vec{v}}, \quad (4.20)$$

où \vec{dP} désigne le vecteur déplacement infinitésimal de P à P' . On dit alors que \vec{v} est transporté parallèlement à lui-même pour la connexion ∇ lors du déplacement \vec{dP} ssi

$$\delta\vec{v} = 0. \quad (4.21)$$

Les propriétés 1 à 4 ci-dessus ne garantissent aucunement l'unicité d'une connexion ∇ sur une variété \mathcal{E} donnée. Au contraire, nous verrons plus bas qu'il existe une infinité de connexions. Autrement dit, la structure de variété seule donne toute liberté pour choisir la façon dont on connecte les différents espaces vectoriels tangents $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$. Par contre, nous verrons au § 4.2.4 que la prise en compte du tenseur métrique g conduit à un choix naturel unique pour ∇ .

Pour l'instant considérons une connexion quelconque ∇ . Si l'on fixe le champ vectoriel \vec{v} , en tout point $P \in \mathcal{E}$, on peut considérer l'opérateur $\nabla\vec{v}(P)$ qui associe à toute forme linéaire (élément de l'espace vectoriel dual $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$) et à tout vecteur (élément de l'espace vectoriel tangent en P , $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$) un nombre réel suivant

$$\begin{aligned} \nabla\vec{v}(P) : \mathcal{T}_P(\mathcal{E})^* \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \vec{u}) &\longmapsto \langle \omega, \nabla_{\vec{u}_c} \vec{v}(P) \rangle, \end{aligned} \quad (4.22)$$

où \vec{u}_c est un champ vectoriel qui réalise une extension du vecteur \vec{u} au voisinage de P : $\vec{u}_c(P) = \vec{u}$. L'application (4.22) est bien définie car la propriété 3 de la connexion énoncée ci-dessus assure que le vecteur $\nabla_{\vec{u}_c} \vec{v}(P)$ ne dépend pas du choix de l'extension \vec{u}_c . De plus, en vertu des propriétés 2 et 3 de la connexion, et de la linéarité des formes linéaires, $\nabla\vec{v}(P)$ est une application linéaire par rapport à chacun de ses arguments. Elle satisfait donc à la définition d'un *tenseur* au point P donnée au § 2.2.4. Étant donnés ses arguments, il s'agit d'un tenseur de type $\binom{1}{1}$. En variant P , on obtient un champ tensoriel $\nabla\vec{v}$ sur \mathcal{E} . On l'appelle dérivée covariante de \vec{v} par rapport à la connexion ∇ .

Étant donnée une base vectorielle \vec{e}_α de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et la base duale (e^α) associée (base de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})^*$), une base de l'espace vectoriel formé par l'ensemble des tenseurs de type $\binom{1}{1}$ est constituée par les produits tensoriels $\vec{e}_\alpha \otimes e^\beta$. Ces derniers sont définis comme

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha \otimes e^\beta : \mathcal{T}_P(\mathcal{E})^* \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\omega, \vec{u}) &\longmapsto \langle \omega, \vec{e}_\alpha \rangle \langle e^\beta, \vec{u} \rangle, \end{aligned} \quad (4.23)$$

où le produit de $\langle \omega, \vec{e}_\alpha \rangle$ par $\langle e^\beta, \vec{u} \rangle$ dans le membre de droite n'est autre que la multiplication ordinaire dans \mathbb{R} . On désigne alors par $\nabla_\beta v^\alpha$ les composantes du tenseur $\nabla\vec{v}$ dans cette base :

$$\boxed{\nabla\vec{v} =: \nabla_\beta v^\alpha \vec{e}_\alpha \otimes e^\beta}. \quad (4.24)$$

Remarque : Il convient de faire attention à l'ordre des indices dans la formule ci-dessus. Pour un tenseur de type $\binom{1}{1}$ quelconque, \mathbf{T} , les composantes T^α_β dans la base $\vec{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta$ sont définies par

$$\mathbf{T} = T^\alpha_\beta \vec{e}_\alpha \otimes \mathbf{e}^\beta. \quad (4.25)$$

On a donc, pour $\mathbf{T} = \nabla \vec{v}$, $(\nabla v)^\alpha_\beta = \nabla_\beta v^\alpha$. L'ordre des indices α et β dans l'écriture $\nabla_\beta v^\alpha$ est donc inversé par rapport à l'ordre naturel d'écriture des composantes. De ce point de vue, la notation « point-virgule »

$$v^\alpha_{;\beta} := \nabla_\beta v^\alpha \quad (4.26)$$

utilisée par de nombreux auteurs est plus adaptée.

Les composantes du vecteur $\nabla_{\vec{u}} \vec{v}$ dans la base (\vec{e}_α) se déduisent facilement de celle du tenseur $\nabla \vec{v}$, puisque l'on a

$$(\nabla_{\vec{u}} \vec{v})^\alpha = \langle \mathbf{e}^\alpha, \nabla_{\vec{u}} \vec{v} \rangle = \nabla \vec{v}(\mathbf{e}^\alpha, \vec{u}) = u^\beta \nabla \vec{v}(\mathbf{e}^\alpha, \vec{e}_\beta) = u^\beta \nabla_\beta v^\alpha. \quad (4.27)$$

La première égalité découle de la définition de (\mathbf{e}^α) comme base duale de (\vec{e}_α) [cf. (4.7)], la deuxième de la définition (4.22) de $\nabla \vec{v}$, la troisième de la linéarité du tenseur $\nabla \vec{v}$ par rapport à son deuxième argument et la quatrième de la définition (4.24) des composantes de $\nabla \vec{v}$. On a donc

$$\boxed{\nabla_{\vec{u}} \vec{v} = u^\beta \nabla_\beta v^\alpha \vec{e}_\alpha}. \quad (4.28)$$

Considérons un champ de bases vectorielles (\vec{e}_α) sur \mathcal{E} , c'est-à-dire la donnée d'une base vectorielle $(\vec{e}_\alpha(P))$ de l'espace tangent $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ en chaque point $P \in \mathcal{E}$. Le champ (\vec{e}_α) est également appelé *tétrade* ou *repère mobile*. Par définition de la connexion, pour toute paire (α, β) , $\nabla_{\vec{e}_\beta} \vec{e}_\alpha$ est un champ vectoriel sur \mathcal{E} [cf. (4.15)]. On peut donc le décomposer sur la base (\vec{e}_μ) :

$$\boxed{\nabla_{\vec{e}_\beta} \vec{e}_\alpha =: \gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu}. \quad (4.29)$$

Les coefficients $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ constituent un ensemble de $4^3 = 64$ champs scalaires sur \mathcal{E} . Ils sont appelés coefficients de la connexion ∇ par rapport à la base (\vec{e}_α) . Montrons qu'ils déterminent complètement ∇ : on a

$$\begin{aligned} \nabla_{\vec{u}} \vec{v} &= \nabla_{\vec{u}}(v^\alpha \vec{e}_\alpha) \\ &= \langle \nabla v^\alpha, \vec{u} \rangle \vec{e}_\alpha + v^\alpha \nabla_{\vec{u}} \vec{e}_\alpha \\ &= u^\beta \langle \nabla v^\alpha, \vec{e}_\beta \rangle \vec{e}_\alpha + v^\alpha u^\beta \nabla_{\vec{e}_\beta} \vec{e}_\alpha \\ &= u^\beta \langle \nabla v^\alpha, \vec{e}_\beta \rangle \vec{e}_\alpha + v^\alpha u^\beta \gamma^\mu_{\alpha\beta} \vec{e}_\mu \\ &= u^\beta [\vec{e}_\beta(v^\alpha) + \gamma^\alpha_{\mu\beta} v^\mu] \vec{e}_\alpha, \end{aligned} \quad (4.30)$$

où pour obtenir la seconde ligne, on a utilisé la propriété 4 de la connexion (considérant chaque composante v^α comme un champ scalaire sur \mathcal{E}), pour la troisième ligne, on a utilisé la propriété 3, pour la quatrième ligne la décomposition (4.29), et pour la dernière ligne l'Eq. (4.4) pour écrire $\langle \nabla v^\alpha, \vec{e}_\beta \rangle = \vec{e}_\beta(v^\alpha)$, ce dernier terme représentant l'action du

vecteur \vec{e}_β sur le champ scalaire v^α (définition des vecteurs). En utilisant l'Eq. (4.28), on conclut que

$$\boxed{\nabla_\beta v^\alpha = \vec{e}_\beta(v^\alpha) + \gamma^\alpha_{\mu\beta} v^\mu}. \quad (4.31)$$

Dans le cas où (\vec{e}_α) est une base naturelle, associée à des coordonnées (x^α) , alors $\vec{e}_\beta = \vec{\partial}_\beta$ et l'équation ci-dessus s'écrit

$$\boxed{\nabla_\beta v^\alpha = \frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} + \gamma^\alpha_{\mu\beta} v^\mu}. \quad (4.32)$$

L'Eq. (4.31) ou (4.32) montre que, comme annoncé, la donnée des 64 coefficients $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ détermine complètement la connexion ∇ . Cela montre aussi qu'il existe sur \mathcal{E} une infinité de connexions possibles : une pour chaque choix de 64 champs scalaires (différentiables) $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$. Nous verrons comment fixer cette ambiguïté en faisant intervenir le tenseur métrique g au § 4.2.4.

Remarque : Les 64 coefficients de connexion $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ ne sont pas les composantes d'un tenseur de type $\binom{1}{2}$.

4.2.3 Extension à tous les tenseurs

On définit l'action de n'importe quelle connexion sur un champ scalaire (tenseur de valence 0) comme se réduisant au gradient. Cela explique pourquoi nous avons utilisé la même notation ∇ pour le gradient des champs scalaires et pour les connexions.

On peut étendre facilement l'action d'une connexion aux champs de formes linéaires, en demandant que ∇ satisfasse à la règle de Leibniz si on l'applique à $\langle \omega, \vec{v} \rangle$ considéré comme la somme des produits $\omega_\alpha v^\alpha$ (où ω et \vec{v} sont respectivement un champ de formes linéaires et un champ vectoriel). Autrement dit, on demande que

$$\nabla_\beta(\omega_\alpha v^\alpha) = \nabla_\beta \omega_\alpha v^\alpha + \omega_\alpha \nabla_\beta v^\alpha, \quad (4.33)$$

c'est-à-dire

$$\nabla_\beta \omega_\alpha v^\alpha = \nabla_\beta(\omega_\alpha v^\alpha) - \omega_\alpha \nabla_\beta v^\alpha. \quad (4.34)$$

On définit donc $\nabla \omega$ comme le tenseur de type $\binom{0}{2}$ (c'est-à-dire une forme bilinéaire) qui agit sur les couples de vecteurs (\vec{v}, \vec{u}) de la manière suivante :

$$\nabla \omega(\vec{v}, \vec{u}) := \langle \nabla \langle \omega, \vec{v} \rangle, \vec{u} \rangle - \nabla \vec{v}(\omega, \vec{u}). \quad (4.35)$$

Il est à noter que toutes les expressions qui interviennent dans le membre de droite ont été définies précédemment : $\nabla \langle \omega, \vec{v} \rangle$ est le gradient du champ scalaire $\langle \omega, \vec{v} \rangle$ et $\nabla \vec{v}(\omega, \vec{u})$ désigne l'action du tenseur $\nabla \vec{v}$ de type $\binom{1}{1}$ sur le couple (ω, \vec{u}) , telle que définie par l'Eq. (4.22).

Plus généralement on définit l'action d'une connexion sur les tenseurs de type quelconque en appliquant la règle de Leibniz aux produits tensoriels [cf. (4.23)], car on peut toujours décomposer un tenseur de type $\binom{p}{q}$ en une somme de produits tensoriels de q

formes linéaires par p vecteurs. Ainsi, pour tout champ tensoriel \mathbf{T} de type $\binom{p}{q}$ ($p \geq 0$, $q \geq 0$)³, la *dérivée covariante* de \mathbf{T} par rapport à la connexion ∇ est un champ tensoriel $\nabla\mathbf{T}$ de type $\binom{p}{q+1}$. Étant donnée une base vectorielle (\vec{e}_α) et sa base duale (e^α) , les composantes $T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ du tenseur \mathbf{T} sont définies par

$$\mathbf{T} = T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} \vec{e}_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes \vec{e}_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_q}, \quad (4.36)$$

et les composantes $\nabla_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}$ de $\nabla\mathbf{T}$ par

$$\nabla\mathbf{T} = \nabla_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} e_{\alpha_1} \otimes \dots \otimes e_{\alpha_p} \otimes e^{\beta_1} \otimes \dots \otimes e^{\beta_q} \otimes e^\rho. \quad (4.37)$$

En utilisant la règle de Leibniz et (4.29), il est facile de voir que les composantes de $\nabla\mathbf{T}$ s'expriment en fonction de celles de \mathbf{T} à l'aide des coefficients de connexion, suivant

$$\nabla_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \vec{e}_\rho(T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}) + \sum_{r=1}^p \gamma^{\alpha_r}_{\sigma\rho} T^{\alpha_1 \dots \overset{\downarrow}{\sigma} \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} - \sum_{r=1}^q \gamma^\sigma_{\beta_r\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \overset{\uparrow}{\sigma} \dots \beta_q}. \quad (4.38)$$

Si (\vec{e}_α) est une base naturelle, associée à des coordonnées (x^α) , alors $\vec{e}_\rho = \vec{\partial}_\rho$ et l'équation ci-dessus s'écrit

$$\nabla_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} + \sum_{r=1}^p \gamma^{\alpha_r}_{\sigma\rho} T^{\alpha_1 \dots \overset{\downarrow}{\sigma} \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} - \sum_{r=1}^q \gamma^\sigma_{\beta_r\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \overset{\uparrow}{\sigma} \dots \beta_q}. \quad (4.39)$$

En particulier, pour un vecteur ($p = 1$, $q = 0$), on retrouve (4.32) et pour une forme linéaire ($p = 0$, $q = 1$), on obtient

$$\nabla_\beta \omega_\alpha = \frac{\partial \omega_\alpha}{\partial x^\beta} - \gamma^\sigma_{\alpha\beta} \omega_\sigma. \quad (4.40)$$

Remarque : Notons le signe $-$ dans (4.40), par opposition au signe $+$ dans (4.32). C'est, avec la position de l'indice de dérivation β dans $\gamma^\sigma_{\alpha\beta}$, la seule chose à retenir, car il n'y a ensuite pas d'ambiguïté pour placer les autres indices.

4.2.4 Connexion compatible avec la métrique

Une première tentative...

Pour rejoindre le champ de la physique, il s'agit maintenant de fixer une unique connexion sur la variété d'espace-temps \mathcal{E} . Une première idée serait de choisir pour ∇ tout simplement la *dérivée partielle* des composantes par rapport à un système de coordonnées (x^α) donné :

$$\nabla_\rho T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q} = \frac{\partial}{\partial x^\rho} T^{\alpha_1 \dots \alpha_p}_{\beta_1 \dots \beta_q}. \quad (4.41)$$

3. Rappelons que par convention, les champs scalaires sont des champs tensoriels de type $\binom{0}{0}$.

Cela définit bien une connexion sur \mathcal{E} : au vu de (4.39), il s'agit de la connexion dont tous les coefficients $\gamma^\mu_{\alpha\beta}$ par rapport à la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ sont identiquement nuls. Il est difficile de faire plus simple !

Cependant la connexion ainsi définie souffre de deux inconvénients majeurs :

- elle dépend clairement du choix des coordonnées (x^α) ;
- elle peut avoir un comportement non satisfaisant, comme le montre l'exemple ci-dessous.

Exemple : Prenons $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ et un système de coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$. Considérons le champ vectoriel suivant

$$\vec{v} := \vec{\partial}_x, \quad (4.42)$$

où $\vec{\partial}_x$ est le vecteur de la base naturelle des coordonnées cartésiennes (ct, x, y, z) liées aux coordonnées sphériques via les formules habituelles [cf. (2.21) et Fig. 2.5]. Les composantes cartésiennes de \vec{v} sont $(0, 1, 0, 0)$ et \vec{v} est un champ vectoriel sur \mathbb{R}^4 que l'on a envie de qualifier de constant. Les composantes sphériques de \vec{v} s'obtiennent en inversant le système (2.25), (2.28) et (2.29) ; il vient :

$$\vec{\partial}_x = \sin \theta \cos \varphi \vec{\partial}_r + \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r} \vec{\partial}_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \vec{\partial}_\varphi \quad (4.43)$$

$$\vec{\partial}_y = \sin \theta \sin \varphi \vec{\partial}_r + \frac{\cos \theta \sin \varphi}{r} \vec{\partial}_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \vec{\partial}_\varphi \quad (4.44)$$

$$\vec{\partial}_z = \cos \theta \vec{\partial}_r - \frac{\sin \theta}{r} \vec{\partial}_\theta. \quad (4.45)$$

Les composantes de \vec{v} par rapport aux coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ se lisent sur (4.43) :

$$v^\alpha = \left(0, \sin \theta \cos \varphi, \frac{\cos \theta \cos \varphi}{r}, -\frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \right). \quad (4.46)$$

On a donc, en particulier,

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\beta} \neq 0 \quad \text{pour } \alpha = 1, 2, 3 \quad \text{et } \beta = 2, 3. \quad (4.47)$$

On en conclut que pour la connexion définie par (4.41),

$$\nabla \vec{v} \neq 0, \quad (4.48)$$

ce qui ne correspond pas du tout au comportement que l'on attend pour un champ vectoriel constant !

La solution

La « bonne » définition de la connexion pour la physique passe par la prise en compte du tenseur métrique \mathbf{g} , que nous n'avons pas encore utilisé. Pour ce faire, considérons les

géodésiques données par \mathbf{g} et dont nous avons déjà vu le rôle si important en physique relativiste. Nous avons défini au § 2.6 les géodésiques comme les lignes qui rendent extrémale la distance métrique entre deux points. Une façon alternative, mais équivalente, de voir les géodésiques est de les considérer comme la généralisation des *lignes droites* de l'espace euclidien \mathbb{R}^3 à un espace muni d'une métrique quelconque. De ce point de vue, il est crucial de remarquer qu'une droite de \mathbb{R}^3 peut être définie comme une courbe dont le vecteur tangent garde une direction constante. Autrement dit, le vecteur tangent d'une droite de l'espace euclidien est *transporté parallèlement à lui-même* le long de la droite. Nous souhaiterions donc que le transport parallèle donné par la connexion ∇ et défini par (4.21) soit tel que le champ de vecteur tangent à une géodésique soit transporté parallèlement à lui-même. Nous allons voir que cette exigence détermine complètement la connexion ∇ .

Considérons en effet une géodésique \mathcal{L} de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ que, pour être spécifique, nous supposons être du genre temps. Utilisons alors le temps propre τ comme paramètre le long de \mathcal{L} . Le vecteur tangent à \mathcal{L} associé à ce paramétrage n'est autre que la 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}} := c^{-1} \overrightarrow{d\mathbf{P}}/d\tau$. Étant donné un système de coordonnées (x^α) sur \mathcal{E} , soit $x^\alpha = X^\alpha(\tau)$ l'équation paramétrique de \mathcal{L} . Les quatre fonctions $X^\alpha(\tau)$ obéissent à l'équation des géodésiques (2.132), que l'on peut réécrire en terme de la 4-vitesse comme

$$\frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0. \quad (4.49)$$

Il suffit en effet d'utiliser la relation [cf. Eq. (2.84)]

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dX^\alpha}{d\tau}. \quad (4.50)$$

Dans (4.49), les coefficients $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles de Christoffel de \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) . Ils sont donnés par la formule (2.130) :

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} := \frac{1}{2} g^{\alpha\sigma} \left(\frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial g_{\mu\sigma}}{\partial x^\nu} - \frac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial x^\sigma} \right). \quad (4.51)$$

Par ailleurs, si on demande que le vecteur tangent $\vec{\mathbf{u}}$ soit transporté parallèlement à lui-même le long de \mathcal{L} par la connexion ∇ , on doit avoir, d'après (4.21) et (4.20),

$$\delta \vec{\mathbf{u}} = \nabla_{\overrightarrow{d\mathbf{P}}} \vec{\mathbf{u}} = 0, \quad (4.52)$$

où le déplacement $\overrightarrow{d\mathbf{P}}$ est relié à $\vec{\mathbf{u}}$ par $\overrightarrow{d\mathbf{P}} = cd\tau \vec{\mathbf{u}}$. En utilisant (4.18) (propriété 3 d'une connexion), on constate que cette condition est équivalente à

$$\nabla_{\vec{\mathbf{u}}} \vec{\mathbf{u}} = 0. \quad (4.53)$$

En composantes, cette équation s'exprime en combinant (4.28) et (4.32) :

$$u^\nu \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\nu} + \gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu \right) = 0. \quad (4.54)$$

Remarquons que la dérivée partielle qui apparaît dans cette équation suppose que \vec{u} est un champ vectoriel défini dans un voisinage ouvert autour de \mathcal{L} . Or a priori, \vec{u} n'est défini que sur \mathcal{L} . En toute rigueur, il faudrait donc introduire une extension \vec{u}_* de \vec{u} autour de \mathcal{L} , c'est-à-dire un champ vectoriel défini sur un ouvert qui contient \mathcal{L} et qui vérifie

$$u_*^\alpha(X^\beta(\tau)) = u^\alpha(\tau). \quad (4.55)$$

La contraction avec u^ν dans (4.54) fait que le résultat est indépendant du choix de l'extension \vec{u}_* . En effet, en dérivant (4.55) par rapport à τ , il vient

$$\frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\nu} \frac{dX^\nu}{d\tau} = \frac{du^\alpha}{d\tau}, \quad (4.56)$$

c'est-à-dire, au vu de (4.50),

$$c u^\nu \frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\nu} = \frac{du^\alpha}{d\tau}. \quad (4.57)$$

En reportant dans (4.54), on obtient

$$\frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau} + \gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0. \quad (4.58)$$

En comparant les Eqs. (4.49) et (4.58), on conclut immédiatement que pour que la connexion ∇ assure le transport parallèle des vecteurs tangents aux géodésiques de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, il faut, et il suffit, que les coefficients de connexion relatifs à n'importe quelle base naturelle soient égaux aux symboles de Christoffel de la métrique \mathbf{g} par rapport aux coordonnées définissant ladite base naturelle :

$$\boxed{\gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\mu\nu}}. \quad (4.59)$$

Puisque nous avons vu au § 4.2.2 que les coefficients de connexion $\gamma^\alpha_{\mu\nu}$ définissent entièrement ∇ , la condition (4.59) fixe entièrement la connexion ∇ . C'est l'unique connexion sur l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ que nous utiliserons désormais. Elle est parfois appelée *connexion riemannienne* ou *connexion de Levi-Civita*, ou encore *connexion de Christoffel*.

Une propriété importante de la connexion riemannienne est que les coefficients de connexion sont symétriques dans les deux indices du bas, puisque les symboles de Christoffel le sont, ainsi qu'il est clair sur l'expression (4.51). Une conséquence importante est la suivante. Considérons la dérivée covariante du gradient d'un champ scalaire f ; elle s'obtient via la formule (4.40) :

$$\begin{aligned} \nabla_\beta \nabla_\alpha f &= \frac{\partial}{\partial x^\beta} \nabla_\alpha f - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \nabla_\sigma f \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^\beta \partial x^\alpha} - \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial x^\sigma}. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Ainsi, puisque les dérivées partielles commutent et que $\Gamma^\sigma_{\alpha\beta}$ est symétrique en $\alpha\beta$, il vient

$$\boxed{\nabla_\beta \nabla_\alpha f = \nabla_\alpha \nabla_\beta f}. \quad (4.61)$$

On dit alors que ∇ est une *connexion sans torsion*. Comme on va le voir au § 4.3, cette propriété de commutativité des dérivées covariantes ne s'étend pas, en général, aux champs tensoriels autres que des scalaires.

Une autre propriété fondamentale de la connexion riemannienne est que la dérivée covariante du tenseur métrique est identiquement nulle :

$$\boxed{\nabla \mathbf{g} = 0}. \quad (4.62)$$

Il est facile de l'établir à partir des composantes de $\nabla \mathbf{g}$ que l'on déduit de (4.39) :

$$\nabla_\rho g_{\alpha\beta} = \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\rho} - \Gamma^\sigma_{\alpha\rho} g_{\sigma\beta} - \Gamma^\sigma_{\beta\rho} g_{\alpha\sigma}. \quad (4.63)$$

Exercice : le faire.

En raison de (4.62), on dit que la connexion ∇ est *compatible avec la métrique* \mathbf{g} . C'est en fait la seule connexion sans torsion sur \mathcal{E} qui soit compatible avec \mathbf{g} . Autrement dit, on aurait pu utiliser (4.62) et la condition (4.61) pour définir ∇ plutôt que (4.59).

Exemple : Reprenons l'exemple du champ de vecteur constant dans $\mathcal{E} = \mathbb{R}^4$ donné au § 4.2.4 :

$$\vec{v} := \vec{\partial}_x, \quad (4.64)$$

où $\vec{\partial}_x$ est le vecteur de la base naturelle des coordonnées cartésiennes (ct, x, y, z) sur \mathbb{R}^4 . En prenant pour \mathbf{g} la métrique de Minkowski, ses composantes par rapport aux coordonnées cartésiennes sont $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$ [cf. Eq. (2.64)], de sorte que les symboles de Christoffel par rapport à ces coordonnées sont identiquement nuls. On a donc dans ces coordonnées $\nabla_\beta v^\alpha = \partial v^\alpha / \partial x^\beta$, ce qui, avec $v^\alpha = (0, 1, 0, 0)$ conduit à

$$\nabla \vec{v} = 0. \quad (4.65)$$

Si l'on considère maintenant les coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (x^0 = ct, r, \theta, \varphi)$, les composantes de \mathbf{g} sont données par la matrice (2.65) :

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (4.66)$$

Les symboles de Christoffel correspondants s'obtiennent en utilisant (4.51); ils sont tous nuls sauf

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \quad \text{et} \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2 \theta \quad (4.67)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos \theta \sin \theta \quad (4.68)$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} \quad \text{et} \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan \theta}. \quad (4.69)$$

On peut alors calculer les composantes de la dérivée covariante de \vec{v} suivant la formule (4.32). En utilisant les composantes v^α données par (4.46), on obtient [Exercice : le faire]

$$\nabla_\beta v^\alpha = 0, \quad (4.70)$$

comme il se doit.

4.2.5 Divergence d'un champ vectoriel

Étant donné un champ vectoriel \vec{v} , on définit sa divergence vis-à-vis de la connexion ∇ comme le champ scalaire formé par la trace de $\nabla\vec{v}$:

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} := \nabla_\alpha v^\alpha}. \quad (4.71)$$

L'expression ci-dessus est indépendante du choix de la base vectorielle où l'on définit les composantes (v^α) .

Remarque : Il faut prendre garde aux notations et ne pas confondre $\nabla \cdot \vec{v}$ (la divergence), qui est un champ scalaire, avec $\nabla\vec{v}$, qui est un champ tensoriel de type $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

En utilisant les composantes de \vec{v} dans une base naturelle, il vient, grâce à la formule (4.32),

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^\mu}{\partial x^\mu} + \Gamma^\nu{}_{\mu\nu} v^\mu. \quad (4.72)$$

Or, d'après l'expression (4.51) des symboles de Christoffel,

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\nu} \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu}. \quad (4.73)$$

Comme $(g^{\sigma\nu})$ est la matrice inverse de $(g_{\sigma\nu})$ et que l'on se souvient de l'expression de la variation du déterminant d'une matrice A inversible :

$$\delta \ln |\det A| = \text{Tr}(A^{-1} \times \delta A), \quad (4.74)$$

il vient [en faisant $A = (g_{\sigma\nu})$]

$$\Gamma^\nu{}_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln |g| = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \ln \sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \sqrt{-g}, \quad (4.75)$$

où l'on a posé :

$$\boxed{g := \det(g_{\alpha\beta})}. \quad (4.76)$$

La valeur de g dépend du choix des coordonnées où l'on exprime $g_{\alpha\beta}$, mais on a toujours $g < 0$. En reportant (4.75) dans (4.72), on obtient une formule simple pour la divergence de \vec{v} :

$$\boxed{\nabla \cdot \vec{v} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} v^\mu)}. \quad (4.77)$$

Exemple : Prenons pour $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ l'espace-temps de Minkowski. Dans un système de coordonnées cartésiennes $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ liées à un repère inertiel, on a $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, de sorte que $g = -1$ et la formule ci-dessus s'écrit tout simplement

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^0}{\partial x^0} + \frac{\partial v^x}{\partial x} + \frac{\partial v^y}{\partial y} + \frac{\partial v^z}{\partial z}. \quad (4.78)$$

Si on utilise plutôt les coordonnées sphériques $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ liées aux coordonnées cartésiennes via les formules (2.21), les composantes $g_{\alpha\beta'}$ de \mathbf{g} sont données par la matrice (4.66), dont le déterminant vaut

$$g = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (4.79)$$

La divergence en terme des composantes sphériques s'écrit donc

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^0}{\partial x^0} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^r) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v^\theta) + \frac{\partial v^\varphi}{\partial \varphi}. \quad (4.80)$$

Les composantes $(v^0, v^r, v^\theta, v^\varphi)$ ci-dessus sont relatives à la base naturelle $(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ associée aux coordonnées sphériques. Si on utilise plutôt une base orthonormale $(\vec{e}_{\hat{\alpha}})$ reliée à la base naturelle par (2.66), les composantes $(v^{\hat{\alpha}})$ dans cette base sont telles que

$$v^0 = v^{\hat{0}}, \quad v^r = v^{\hat{r}}, \quad v^\theta = \frac{v^{\hat{\theta}}}{r}, \quad v^\varphi = \frac{v^{\hat{\varphi}}}{r \sin \theta}. \quad (4.81)$$

L'Eq. (4.80) devient alors

$$\nabla \cdot \vec{v} = \frac{\partial v^{\hat{0}}}{\partial x^0} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v^{\hat{r}}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta v^{\hat{\theta}}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v^{\hat{\varphi}}}{\partial \varphi}. \quad (4.82)$$

On retrouve là une formule bien connue.

4.3 Tenseur de courbure

4.3.1 Transport parallèle non infinitésimal et courbure

La variation d'un vecteur $\delta \vec{v}$ d'un champ vectoriel \vec{v} lors d'un déplacement infinitésimal a été définie grâce à la connexion ∇ au § 4.2.2, suivant l'Eq. (4.20) :

$$\delta \vec{v} := \nabla_{\vec{dP}} \vec{v}. \quad (4.83)$$

On peut alors définir la variation du champ \vec{v} entre deux points A et B non infiniment proches en intégrant (4.83) le long d'un chemin reliant A à B . Mais en général, le résultat dépend du choix de ce chemin. D'une manière équivalente, si l'on transporte un vecteur de A à B parallèlement à lui même (c'est-à-dire en assurant $\delta \vec{v} = 0$ sur chaque tronçon infinitésimal), le vecteur obtenu en B dépend du choix du chemin (cf. Fig. 4.1). Il s'agit d'une manifestation de la *courbure* de la connexion ∇ .

Voyons cela dans le détail. Considérons le cas simple où il y a deux tronçons élémentaires \vec{dP}_1 et \vec{dP}_2 pour aller de A à B . Autrement dit, nous considérons un point intermédiaire I entre A et B . Fixons un système de coordonnées (x^α) et écrivons les coordonnées de ces points comme (cf. Fig. 4.2) :

$$\begin{aligned} x^\alpha(A) &= x_0^\alpha \\ x^\alpha(I) &= x_0^\alpha + dx_1^\alpha \\ x^\alpha(B) &= x_0^\alpha + dx_1^\alpha + dx_2^\alpha \end{aligned} \quad (4.84)$$

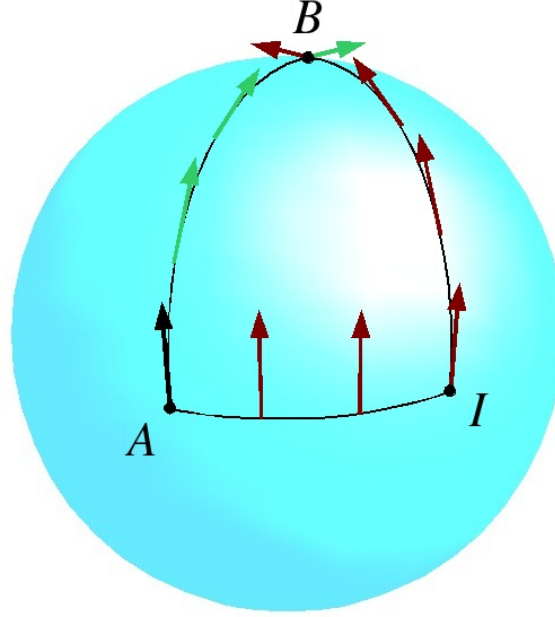


FIGURE 4.1 – Transport parallèle d'un vecteur depuis un point A jusqu'à un point B en suivant deux chemins différents à la surface d'une sphère : (i) $A \rightarrow B$ le long d'un méridien, (ii) $A \rightarrow I$ le long de l'équateur, puis $I \rightarrow B$ le long d'un méridien. Le vecteur au point d'arrivée dépend du chemin suivi, en raison de la courbure de la sphère.

Soit \vec{v}_0 un vecteur au point A , c'est-à-dire un élément de l'espace tangent $\mathcal{T}_A(\mathcal{E})$. On peut étendre \vec{v}_0 en un champ de vecteurs propagés parallèlement à eux-mêmes le long d'un déplacement \overrightarrow{dP} en imposant

$$\nabla_{\overrightarrow{dP}} \vec{v} = 0. \quad (4.85)$$

En composantes, cette condition s'écrit (les composantes de \overrightarrow{dP} étant (dx^μ))

$$\nabla_\mu v^\alpha dx^\mu = 0, \quad (4.86)$$

d'où, en vertu de (4.32)

$$\frac{\partial v^\alpha}{\partial x^\mu} dx^\mu = -\Gamma^\alpha_{\beta\mu} v^\beta dx^\mu. \quad (4.87)$$

On déduit immédiatement de cette formule que si on propage \vec{v} parallèlement à lui-même de A à I , on a :

$$v^\alpha(I) = v^\alpha(A) - \Gamma^\alpha_{\beta\mu}(A) v^\beta(A) dx_1^\mu. \quad (4.88)$$

De même, si on propage ensuite \vec{v} parallèlement à lui-même de I à B , (4.87) conduit à

$$v^\alpha(B) = v^\alpha(I) - \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(I) v^\beta(I) dx_2^\nu, \quad (4.89)$$

avec, au premier ordre en dx_1^μ ,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\nu}(I) = \Gamma^\alpha_{\beta\nu}(A) + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu}(A) dx_1^\mu. \quad (4.90)$$

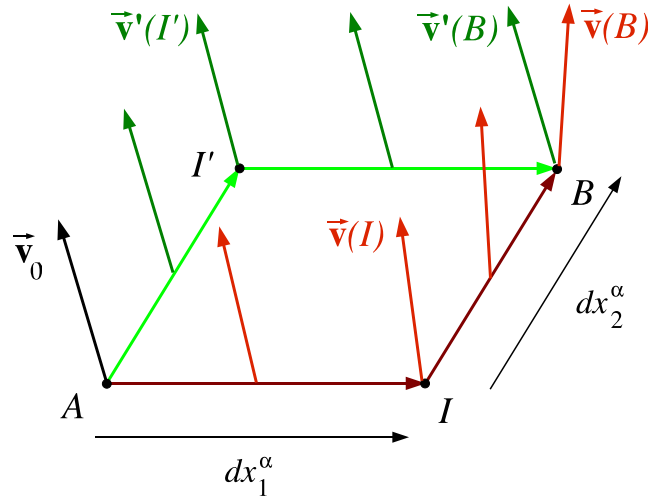


FIGURE 4.2 – Transport parallèle d'un vecteur \vec{v}_0 depuis un point A jusqu'à un point B en suivant deux chemins infinitésimaux : $A \rightarrow I \rightarrow B$ et $A \rightarrow I' \rightarrow B$. Dans le premier cas, le transport parallèle génère un champ vectoriel noté \vec{v} , dans le second, un champ vectoriel noté \vec{v}' . Le fait que $\vec{v}'(B) \neq \vec{v}(B)$ traduit la courbure de la connexion ∇ qui a assuré le transport parallèle.

En reportant (4.88) et (4.90) dans (4.89), il vient

$$v^\alpha(B) = v_0^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} v_0^\beta dx_1^\mu - \left(\Gamma^\alpha_{\beta\nu} + \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} dx_1^\mu \right) \left(v_0^\beta - \Gamma^\beta_{\sigma\mu} v_0^\sigma dx_1^\mu \right) dx_2^\nu, \quad (4.91)$$

où l'on a effectué $v^\alpha(A) = v_0^\alpha$ et où toutes les valeurs de $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ et de ses dérivées sont prises au point A . En développant, il vient

$$v^\alpha(B) = v_0^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} v_0^\beta dx_1^\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} v_0^\beta dx_2^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} v_0^\sigma dx_1^\mu dx_2^\nu - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} v_0^\beta dx_1^\mu dx_2^\nu. \quad (4.92)$$

Considérons à présent le trajet de A à B en passant par le point I' de coordonnées (cf. Fig. 4.2)

$$x^\alpha(I') = x_0^\alpha + dx_2^\alpha. \quad (4.93)$$

Soit alors \vec{v}' le champ vectoriel obtenu par transport parallèle de \vec{v}_0 de A à I' , puis de I' à B . La seule différence avec le calcul précédent est que l'on intervertit dx_1^μ et dx_2^ν . Par conséquent

$$v'^\alpha(B) = v_0^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} v_0^\beta dx_2^\mu - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} v_0^\beta dx_1^\nu + \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} v_0^\sigma dx_2^\mu dx_1^\nu - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} v_0^\beta dx_2^\mu dx_1^\nu, \quad (4.94)$$

ou encore en permutant les indices muets μ et ν :

$$v'^\alpha(B) = v_0^\alpha - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} v_0^\beta dx_2^\nu - \Gamma^\alpha_{\beta\mu} v_0^\beta dx_1^\mu + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\sigma\nu} v_0^\sigma dx_1^\mu dx_2^\nu - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} v_0^\beta dx_1^\mu dx_2^\nu. \quad (4.95)$$

En soustrayant (4.92) de (4.95), il vient

$$v'^\alpha(B) - v^\alpha(B) = \left(\frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\nu}}{\partial x^\mu} v_0^\beta - \frac{\partial \Gamma^\alpha_{\beta\mu}}{\partial x^\nu} v_0^\beta + \Gamma^\alpha_{\beta\mu} \Gamma^\beta_{\sigma\nu} v_0^\sigma - \Gamma^\alpha_{\beta\nu} \Gamma^\beta_{\sigma\mu} v_0^\sigma \right) dx_1^\mu dx_2^\nu, \quad (4.96)$$

c'est-à-dire

$$v'^{\alpha}(B) - v^{\alpha}(B) = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} v_0^{\beta} dx_1^{\mu} dx_2^{\nu}, \quad (4.97)$$

avec

$$R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} := \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\nu}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{\beta\mu}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\nu} - \Gamma^{\alpha}_{\sigma\nu} \Gamma^{\sigma}_{\beta\mu}. \quad (4.98)$$

Ainsi si $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} \neq 0$, le vecteur $\vec{v}'(B)$ obtenu par transport parallèle du vecteur \vec{v}_0 de A à B en passant par I' n'est pas égal au vecteur $\vec{v}(B)$ obtenu par transport parallèle de \vec{v}_0 de A à B en passant par I . $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ est donc l'expression de la courbure de l'espace-temps \mathcal{E} muni de la connexion ∇ .

Bien que cela ne soit pas évident sur l'expression (4.98), les quantités $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ sont les composantes d'un tenseur, appelé *tenseur de courbure* ou *tenseur de Riemann* et noté⁴ **Riem**. Pour le voir, il suffit d'établir que pour tout champ vectoriel \vec{v} , on a

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\alpha} - \nabla_{\nu} \nabla_{\mu} v^{\alpha} = R^{\alpha}_{\beta\mu\nu} v^{\beta}. \quad (4.99)$$

En effet, si cette identité est vraie, comme le membre de gauche désigne clairement les composantes d'un champ tensoriel, il en va de même du membre de droite et donc de $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$. L'identité (4.99) s'appelle *identité de Ricci*. Pour l'établir, il suffit d'exprimer la dérivée covariante du tenseur $\nabla \vec{v}$ en employant (4.39) avec $p = 1$ et $q = 1$:

$$\nabla_{\mu} \nabla_{\nu} v^{\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^{\mu}} (\nabla_{\nu} v^{\alpha}) + \Gamma^{\alpha}_{\sigma\mu} \nabla_{\nu} v^{\sigma} - \Gamma^{\sigma}_{\nu\mu} \nabla_{\sigma} v^{\alpha}. \quad (4.100)$$

En remplaçant $\nabla_{\nu} v^{\alpha}$, $\nabla_{\nu} v^{\sigma}$ et $\nabla_{\sigma} v^{\alpha}$ par les expressions déduites de (4.32), puis en permutant μ et ν et en soustrayant, on constate que les dérivées partielles premières et secondes de v^{α} disparaissent et on obtient (4.99) avec $R^{\alpha}_{\beta\mu\nu}$ tel que donné par (4.98).

L'identité de Ricci (4.99) implique qu'un tenseur de courbure non nul est une obstruction à la commutativité des doubles dérivées covariantes d'un vecteur. À cet égard, il convient de rappeler que pour un champ scalaire, les doubles dérivées covariantes commutent toujours, ainsi que nous l'avons vu plus haut [cf. Eq. (4.61), absence de torsion].

Remarque : Nous avons défini le tenseur de courbure pour la connexion compatible avec la métrique \mathbf{g} , mais il peut être défini pour n'importe quelle connexion. Il suffirait de remplacer les symboles de Christoffel par des coefficients de connexion généraux $\gamma^{\alpha}_{\mu\nu}$ dans les calculs ci-dessus. On remarque en effet que nous n'avons nulle part utilisé explicitement la métrique \mathbf{g} .

On dit que l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est plat si, et seulement si,

$$\mathbf{Riem} = 0. \quad (4.101)$$

4. Afin de réserver le symbole \mathbf{R} pour un autre tenseur, celui de Ricci, nous utilisons **Riem** pour le tenseur de Riemann. Cependant, comme il n'y a pas d'ambiguïté au niveau des composantes, puisque les tenseurs de Riemann et de Ricci n'ont pas le même nombre d'indices, nous utilisons le symbole R pour les composantes des deux tenseurs.

En supposant que \mathcal{E} ait la topologie de \mathbb{R}^4 , on peut montrer que cette condition est nécessaire et suffisante pour que $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ soit l'espace-temps de Minkowski : on peut alors trouver un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ tel que les composantes de \mathbf{g} soient $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$.

Remarque : Le tenseur de courbure a été introduit ci-dessus à partir de la dépendance du chemin suivi lors du transport parallèle d'un vecteur, ou encore à partir de la non-commutativité des dérivées covariantes (identité de Ricci). Une autre caractérisation du tenseur de courbure repose sur la déviation géodésique ; elle est étudiée en détail dans le problème B.15 de l'Annexe B et exprime le fait que dans un espace courbe des géodésiques voisines initialement parallèles peuvent ensuite diverger ou converger.

4.3.2 Propriétés du tenseur de Riemann

Par construction, le tenseur de Riemann est un tenseur de type $\binom{1}{3}$ qui est antisymétrique dans ses deux derniers indices :

$$\boxed{R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} = -R^\alpha{}_{\nu\mu\beta}}. \quad (4.102)$$

Deux autres propriétés sont (i) l'antisymétrie des deux premiers indices abaissés

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = -R_{\beta\alpha\mu\nu}}, \quad (4.103)$$

où

$$R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\sigma} R^\sigma{}_{\beta\mu\nu}, \quad (4.104)$$

et (ii) la symétrie par permutation des première et deuxième paires d'indices :

$$\boxed{R_{\alpha\beta\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\beta}}. \quad (4.105)$$

On a également une symétrie cyclique sur les trois derniers indices :

$$\boxed{R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + R^\alpha{}_{\mu\nu\beta} + R^\alpha{}_{\nu\beta\mu} = 0}. \quad (4.106)$$

Toutes ces symétries réduisent à 20 le nombre de composantes indépendantes du tenseur de Riemann (au lieu de $4^4 = 256$!).

Enfin les dérivées covariantes du tenseur de Riemann vérifient une propriété très importante, appelée *identité de Bianchi* :

$$\boxed{\nabla_\rho R^\alpha{}_{\beta\mu\nu} + \nabla_\mu R^\alpha{}_{\beta\nu\rho} + \nabla_\nu R^\alpha{}_{\beta\rho\mu} = 0}. \quad (4.107)$$

Remarque : Il n'y a pas de consensus dans la littérature sur l'ordre des indices du tenseur de Riemann. Nous utilisons ici la même que dans les livres de Carroll [3], Hartle [6], Hawking & Ellis [17], Misner, Thorne & Wheeler [18] et Poisson [19]. Elle diffère de celle utilisée par Wald [21]. Pour vérifier quelle convention est utilisée dans un ouvrage donné, un bon moyen consiste à regarder comment est écrite l'identité de Ricci (4.99).

4.3.3 Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein

Le *tenseur de Ricci* \mathbf{R} est le tenseur de type $\binom{0}{2}$ (forme bilinéaire) obtenu par contraction des premier et troisième indices du tenseur de Riemann :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} := R^{\sigma}{}_{\alpha\sigma\beta}}. \quad (4.108)$$

En vertu de la propriété (4.105), \mathbf{R} est une forme bilinéaire symétrique :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = R_{\beta\alpha}}. \quad (4.109)$$

Les composantes du tenseur de Ricci se déduisent de (4.98) :

$$\boxed{R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta}}{\partial x^{\mu}} - \frac{\partial \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\mu}}{\partial x^{\beta}} + \Gamma^{\mu}{}_{\alpha\beta} \Gamma^{\nu}{}_{\mu\nu} - \Gamma^{\nu}{}_{\alpha\mu} \Gamma^{\mu}{}_{\nu\beta}}. \quad (4.110)$$

On définit le *scalaire de courbure* (également appelé *scalaire de Ricci*) comme la trace du tenseur de Ricci prise à l'aide de la métrique \mathbf{g} :

$$\boxed{R := g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}}. \quad (4.111)$$

En contractant l'identité de Bianchi (4.107) sur les indices α et μ et en utilisant la définition (4.108) du tenseur de Ricci, il vient

$$\nabla_{\rho} R_{\beta\nu} + \nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\beta\nu\rho} + \nabla_{\nu} R^{\mu}{}_{\beta\rho\mu} = 0.$$

Grâce à la propriété d'antisymétrie (4.102), le dernier terme s'écrit $\nabla_{\nu} R^{\mu}{}_{\beta\rho\mu} = -\nabla_{\nu} R^{\mu}{}_{\beta\mu\rho} = -\nabla_{\nu} R_{\beta\rho}$. On a donc

$$\nabla_{\rho} R_{\beta\nu} + \nabla_{\mu} R^{\mu}{}_{\beta\nu\rho} - \nabla_{\nu} R_{\beta\rho} = 0.$$

En contractant cette équation avec $g^{\beta\nu}$, il vient, puisque⁵ $\nabla_{\rho} g^{\beta\nu} = 0$,

$$\nabla_{\rho} \underbrace{(g^{\beta\nu} R_{\beta\nu})}_R + \nabla_{\mu} (g^{\beta\nu} R^{\mu}{}_{\beta\nu\rho}) - g^{\beta\nu} \nabla_{\nu} R_{\beta\rho} = 0.$$

Le terme du milieu se simplifie comme suit :

$$g^{\beta\nu} R^{\mu}{}_{\beta\nu\rho} = g^{\beta\nu} g^{\mu\sigma} R_{\sigma\beta\nu\rho} = -g^{\beta\nu} g^{\mu\sigma} R_{\beta\sigma\nu\rho} = -g^{\mu\sigma} R^{\nu}{}_{\sigma\nu\rho} = -g^{\mu\sigma} R_{\sigma\rho} = -g^{\sigma\mu} R_{\sigma\rho},$$

où l'on a utilisé la propriété d'antisymétrie (4.103) pour établir la deuxième égalité. Il vient donc (en utilisant $\nabla_{\mu} g^{\mu\sigma} = 0$)

$$\nabla_{\rho} R - g^{\sigma\mu} \nabla_{\mu} R_{\sigma\rho} - g^{\beta\nu} \nabla_{\nu} R_{\beta\rho} = 0.$$

Les indices σ et μ étant muets, les deux derniers termes sont identiques, si bien que l'on peut réécrire l'équation comme

$$\nabla_{\rho} R - 2g^{\beta\nu} \nabla_{\nu} R_{\beta\rho} = 0,$$

5. C'est une conséquence de $\nabla \mathbf{g} = 0$, cf. Eq. (4.62).

En multipliant cette relation par $-1/2$, en utilisant $R_{\beta\rho} = R_{\rho\beta}$ [Eq. (4.109)] et en effectuant les changements de notation $\nu \rightarrow \mu$ et $\rho \rightarrow \alpha$, on obtient

$$g^{\beta\mu}\nabla_{\mu}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\nabla_{\alpha}R = 0.$$

Puisque $\nabla_{\alpha}R = \delta^{\mu}_{\alpha}\nabla_{\mu}R = g_{\alpha\beta}g^{\beta\mu}\nabla_{\mu}R = g^{\beta\mu}\nabla_{\mu}(g_{\alpha\beta}R)$, il vient au final

$$\nabla^{\beta}\left(R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}\right) = 0, \quad (4.112)$$

où

$$\nabla^{\beta} := g^{\beta\sigma}\nabla_{\sigma}. \quad (4.113)$$

L'Eq. (4.112) suggère d'introduire le tenseur suivant :

$$\boxed{\mathbf{G} := \mathbf{R} - \frac{1}{2}R\mathbf{g}}, \quad (4.114)$$

qui est appelé *tenseur d'Einstein*. L'Eq. (4.112) signifie que ce tenseur est à divergence nulle :

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{G} = 0}. \quad (4.115)$$

C'est en fait le seul tenseur symétrique de valence 2 que l'on peut former à partir des dérivées secondes de \mathbf{g} qui ait cette propriété.

4.4 Tenseur énergie-impulsion

4.4.1 Définition

La dernière pièce manquante avant de mettre en place l'équation d'Einstein est le tenseur énergie-impulsion de la matière. Ce dernier est un champ tensoriel \mathbf{T} sur \mathcal{E} qui décrit le contenu en matière de l'espace-temps. En fait, il ne décrit que l'énergie et l'impulsion associée à la matière, ou à tout autre forme de champ non gravitationnel, comme par exemple le champ électromagnétique. Ainsi \mathbf{T} ne contient pas toute l'information sur le détail microscopique des constituants de la matière. Plus précisément, \mathbf{T} est un champ tensoriel de type $\binom{0}{2}$, symétrique⁶ qui vérifie les propriétés suivantes, étant donné un observateur \mathcal{O} de 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}_0$:

- La densité d'énergie de la matière mesurée par \mathcal{O} est

$$\varepsilon = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0) \quad (4.116)$$

- La composante i ($i = 1, 2, 3$) de la densité d'impulsion de la matière mesurée par \mathcal{O} est

$$p^i = -\frac{1}{c}\mathbf{T}(\vec{\mathbf{e}}_i, \vec{\mathbf{u}}_0), \quad (4.117)$$

6. \mathbf{T} est donc une forme bilinéaire symétrique, tout comme le tenseur métrique, le tenseur de Ricci ou le tenseur d'Einstein.

où (\vec{e}_i) constitue une base orthonormale de l'espace local de repos de \mathcal{O} , c'est-à-dire de l'hyperplan orthogonal à \mathcal{O} (cf. § 2.5.2). Le vecteur densité d'impulsion mesuré par \mathcal{O} est alors

$$\vec{p} = p^i \vec{e}_i. \quad (4.118)$$

- Le vecteur flux d'énergie de la matière mesuré par \mathcal{O} est

$$\vec{\varphi} = \varphi^i \vec{e}_i, \quad (4.119)$$

avec

$$\varphi^i = -c \mathbf{T}(\vec{u}_0, \vec{e}_i). \quad (4.120)$$

Ainsi, l'énergie par unité de temps (puissance) qui traverse un élément de surface de normale \vec{n} et d'aire dS dans l'espace de repos de \mathcal{O} est

$$\frac{dE}{dt} = \vec{\varphi} \cdot \vec{n} dS. \quad (4.121)$$

- Le tenseur des contraintes mesuré par \mathcal{O} est

$$S_{ij} = \mathbf{T}(\vec{e}_i, \vec{e}_j). \quad (4.122)$$

Autrement dit, $\mathbf{T}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)$ est la force exercée par la matière dans la direction de \vec{e}_i sur l'unité de surface dont \vec{e}_j est la normale.

Remarque : Quand nous disons « matière » dans les expressions ci-dessus, il faut le prendre au sens large, c'est-à-dire inclure toute forme d'énergie-impulsion présente dans l'espace-temps, y compris celle du champ électromagnétique. Dans ce dernier cas, $\vec{\varphi}$ n'est autre que le vecteur de Poynting relatif à l'observateur \mathcal{O} et S_{ij} est appelé tenseur des contraintes de Maxwell.

La symétrie du tenseur énergie-impulsion implique $\mathbf{T}(\vec{e}_i, \vec{u}_0) = \mathbf{T}(\vec{u}_0, \vec{e}_i)$. Au vu de (4.117) et (4.120), on en déduit l'égalité, à un facteur c^2 près, des vecteurs flux d'énergie et densité d'impulsion :

$$\boxed{\vec{\varphi} = c^2 \vec{p}}. \quad (4.123)$$

On peut voir cette égalité comme une conséquence de l'équivalence masse-énergie en relativité.

On dit que la matière satisfait à la condition d'énergie faible si l'énergie $\varepsilon = \mathbf{T}(\vec{u}_0, \vec{u}_0)$ est positive quelle que soit la 4-vitesse \vec{u}_0 . Si de plus, $\vec{p} \cdot \vec{p} c^2 \leq \varepsilon$ quelle que soit \vec{u}_0 , on dit que la matière satisfait à la condition d'énergie dominante. Toutes les formes ordinaires de matière, ainsi que le champ électromagnétique, satisfont à la condition d'énergie dominante (et donc à la condition d'énergie faible).

4.4.2 Tenseur énergie-impulsion du fluide parfait

Un modèle de matière très important est constitué par le *fluide parfait*. Dans ce cas, la matière est décrite par un champ de 4-vitesses \vec{u} , qui représente en chaque point la 4-vitesse d'une particule fluide, et par une pression isotrope dans le référentiel du fluide

(c'est-à-dire vis-à-vis d'un observateur dont la 4-vitesse serait $\vec{\mathbf{u}}$). Plus précisément, un fluide parfait est défini par le tenseur énergie-impulsion suivant :

$$\boxed{\mathbf{T} = (\rho c^2 + p) \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + p \mathbf{g}}, \quad (4.124)$$

où

- ρ et p sont deux champs scalaires, qui représentent respectivement la densité d'énergie du fluide (divisée par c^2) et la pression du fluide, toutes deux mesurées dans le référentiel du fluide;
- $\underline{\mathbf{u}}$ est la forme linéaire associée au vecteur $\vec{\mathbf{u}}$ par le tenseur métrique via

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{\mathbf{v}} &\longmapsto \mathbf{g}(\vec{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}}) = \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}. \end{aligned} \quad (4.125)$$

En termes des composantes : si $\underline{\mathbf{u}} = \underline{u}_\alpha e^\alpha$ et $\vec{\mathbf{u}} = u^\alpha \vec{e}_\alpha$ où (\vec{e}_α) est une base vectorielle et (e^α) sa base duale, alors

$$\underline{u}_\alpha = g_{\alpha\beta} u^\beta. \quad (4.126)$$

On dit que l'on a « baissé » l'indice de u^α à l'aide de \mathbf{g} . Comme il n'y a pas d'ambiguïté, on note souvent u_α à la place de \underline{u}_α .

- Le produit tensoriel $\underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}}$ est défini de manière similaire à (4.23) :

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \times \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\vec{\mathbf{v}}, \vec{\mathbf{w}}) &\longmapsto \langle \underline{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{v}} \rangle \langle \underline{\mathbf{u}}, \vec{\mathbf{w}} \rangle. \end{aligned} \quad (4.127)$$

Les composantes du tenseur énergie-impulsion par rapport à une base vectorielle (\vec{e}_α) sont

$$T_{\alpha\beta} = (\rho c^2 + p) u_\alpha u_\beta + p g_{\alpha\beta}. \quad (4.128)$$

Considérons un observateur \mathcal{O} de 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}_0$. D'après la formule (4.116), cet observateur mesure la densité d'énergie du fluide suivante :

$$\varepsilon = \mathbf{T}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0) = (\rho c^2 + p) \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_0)}_{=-\Gamma} \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_0)}_{=-\Gamma} + p \underbrace{\mathbf{g}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{u}}_0)}_{=-1}, \quad (4.129)$$

où l'on a introduit le facteur de Lorentz Γ (à ne pas confondre avec les symboles de Christoffel!). On a donc

$$\varepsilon = \Gamma^2(\rho c^2 + p) - p. \quad (4.130)$$

Le lecteur pourra être surpris par le carré du facteur de Lorentz, car il s'attendait peut-être à un facteur Γ et non Γ^2 , en vertu de la formule $E = \Gamma mc^2$ [cf. Eq. (2.105)]. En fait, il ne faut pas oublier que ε est une *densité* d'énergie et non une énergie. Le facteur Γ supplémentaire vient donc de la « contraction des longueurs » dans la direction du mouvement, qui diminue le volume et augmente la densité.

Par ailleurs, la densité d'impulsion du fluide mesurée par \mathcal{O} s'obtient en appliquant la formule (4.117) :

$$p^i = -\frac{1}{c} \mathbf{T}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{e}_i) = -\frac{1}{c} (\rho c^2 + p) \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}}_0)}_{=-\Gamma} \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{e}_i)}_{=\Gamma v^i/c} - \frac{p}{c} \underbrace{\mathbf{g}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{e}_i)}_{=0}, \quad (4.131)$$

où $V^i := c\Gamma^{-1}\vec{e}_i \cdot \vec{\mathbf{u}}$ désigne la vitesse du fluide par rapport à \mathcal{O} dans la direction \vec{e}_i . On a donc

$$p^i = \Gamma^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) V^i. \quad (4.132)$$

Enfin, le tenseur des contraintes mesuré par \mathcal{O} est donné par (4.122) :

$$S_{ij} = \mathbf{T}(\vec{e}_i, \vec{e}_j) = (\rho c^2 + p) \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{e}_i)}_{=\Gamma V^i/c} \underbrace{(\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{e}_j)}_{=\Gamma V^j/c} + p \underbrace{\mathbf{g}(\vec{e}_i, \vec{e}_j)}_{=\delta_{ij}}, \quad (4.133)$$

soit

$$S_{ij} = p \delta_{ij} + \Gamma^2 \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) V^i V^j. \quad (4.134)$$

Dans le cas où \mathcal{O} est comobile avec le fluide, $\vec{\mathbf{u}}_0 = \vec{\mathbf{u}}$, $\Gamma = 1$, $V^i = 0$, et les formules ci-dessus se réduisent à

$$\varepsilon = \rho c^2, \quad (4.135)$$

$$p^i = 0, \quad (4.136)$$

$$S_{ij} = p \delta_{ij}. \quad (4.137)$$

On retrouve ainsi l'interprétation des champs scalaires ρ et p donnée plus haut.

Un fluide parfait satisfait la condition d'énergie faible ssi $\rho \geq 0$ et $\rho c^2 + p \geq 0$ et à la condition d'énergie dominante ssi $\rho c^2 \geq |p|$.

4.5 Équation d'Einstein

4.5.1 Énoncé

L'équation d'Einstein relie le tenseur d'Einstein \mathbf{G} au tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} via

$$\boxed{\mathbf{G} + \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}}, \quad (4.138)$$

où Λ est une constante, appelée *constante cosmologique*, et G est la constante de Newton donnée par (3.7). Une des motivations d'Einstein était en effet de trouver une formulation qui assure que le tenseur énergie-impulsion soit à divergence nulle, ce qui est une forme de conservation locale de l'énergie et de l'impulsion. Comme on l'a vu au § 4.3.3, le tenseur d'Einstein vérifie cette propriété [identité de Bianchi contractée (4.115)] et par ailleurs $\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$, puisque la connexion ∇ est compatible avec la métrique \mathbf{g} [Eq. (4.62)]. La forme (4.138) implique donc

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{T} = 0}. \quad (4.139)$$

En explicitant le tenseur d'Einstein en terme du tenseur de Ricci [cf Eq. (4.114)], l'équation d'Einstein s'écrit sous la forme

$$\boxed{\mathbf{R} - \frac{1}{2} R \mathbf{g} + \Lambda \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}}. \quad (4.140)$$

On peut soit postuler l'équation d'Einstein (ce que nous ferons ici), soit la dériver à partir d'un principe variationnel, en utilisant l'action d'Hilbert-Einstein (cf. le cours de Jérôme Perez [11] ou de Sean Carroll [3]).

4.5.2 Limite newtonienne

En champ gravitationnel faible, on peut toujours trouver un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ où les composantes de la métrique s'écrivent

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^2 c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.141)$$

Φ désigne le potentiel gravitationnel newtonien et doit vérifier

$$|\Phi| \ll c^2. \quad (4.142)$$

On peut également écrire (4.141) sous la forme équivalente au premier ordre en Φ/c^2 :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (4.143)$$

Un exemple de coordonnées où $g_{\alpha\beta}$ a la forme (4.143) est constitué par les coordonnées cartésiennes associées aux coordonnées isotropes $(ct, \bar{r}, \theta, \varphi)$ introduites au § 3.2.5 pour l'espace-temps de Schwarzschild. En effet si l'on fait $\Phi = -GM/\bar{r}$ dans l'Eq. (3.18) et que l'on effectue un développement limité en Φ/c^2 , on obtient (4.143).

En calculant les symboles de Christoffel à partir des composantes (4.143), puis le tenseur de Ricci via (4.110), le tout au premier ordre en Φ/c^2 , on constate que les dix composantes de l'équation d'Einstein avec comme source un fluide parfait non relativiste ($p \ll \rho c^2$) se réduisent à une seule équation non triviale (la composante 00), qui est

$$\Delta\Phi = 4\pi G \rho. \quad (4.144)$$

On retrouve donc l'équation de Poisson de la gravitation newtonienne, ce qui montre que la relativité générale est bien une extension de cette dernière.

4.6 Solutions statiques et à symétrie sphérique

Cherchons à présent les solutions de l'équation d'Einstein avec $\Lambda = 0$ dans le cas simple, mais astrophysiquement intéressant, d'un corps à symétrie sphérique et statique. On supposera que le tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} est soit nul dans tout l'espace, soit celui d'un fluide parfait dans une région limitée de l'espace. Dans le premier cas, la solution correspondra à un trou noir de Schwarzschild, et dans le deuxième à une étoile fluide.

4.6.1 Écriture de l'équation d'Einstein

Nous avons vu au § 3.2.1, que dans tout espace-temps à symétrie sphérique, on peut choisir des coordonnées $(x^\alpha) = (x^0 = ct, r, \theta, \varphi)$ telles que les composantes du tenseur métrique se mettent sous la forme (3.3). Si de plus on suppose que l'espace-temps est statique, alors on peut supprimer la dépendance en t dans les composantes (3.3) et obtenir :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N(r)^2 c^2 dt^2 + A(r)^2 dr^2 + B(r)^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.145)$$

De plus, on peut toujours choisir comme coordonnée r le rayon aréolaire des sphères d'invariance liées à la symétrie sphérique (cf. page 59). Cela revient à faire $B(r) = r$. On a alors

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (4.146)$$

où l'on a posé $\nu(r) := \ln N(r)$ et $\alpha(r) := \ln A(r)$. Nous avons besoin de la matrice inverse $g^{\alpha\beta}$, qui est évidemment

$$g^{\alpha\beta} = \text{diag} \left(-e^{-2\nu(r)}, e^{-2\alpha(r)}, \frac{1}{r^2}, \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \right). \quad (4.147)$$

On peut alors calculer les symboles de Christoffel suivant (4.51); on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0r} &= \Gamma^0_{r0} = \nu' \\ \Gamma^r_{00} &= e^{2(\nu-\alpha)} \nu' & \Gamma^r_{rr} &= \alpha' & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r e^{-2\alpha} & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r \sin^2 \theta e^{-2\alpha} \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan \theta}, \end{aligned} \quad (4.148)$$

où $\nu' = d\nu/dr$ et $\alpha' = d\alpha/dr$. Tous les autres symboles de Christoffel sont nuls. On vérifie que si $\nu = 0$ et $\alpha = 0$ (métrique de Minkowski), on retrouve bien (4.67)-(4.69).

À partir des symboles de Christoffel, nous pouvons calculer les composantes du tenseur de Ricci suivant (4.110); il vient

$$R_{00} = e^{2(\nu-\alpha)} \left[\nu'' + (\nu')^2 - \nu' \alpha' + \frac{2}{r} \nu' \right] \quad (4.149)$$

$$R_{rr} = -\nu'' - (\nu')^2 + \nu' \alpha' + \frac{2}{r} \alpha' \quad (4.150)$$

$$R_{\theta\theta} = e^{-2\alpha} [r(\alpha' - \nu') - 1] + 1 \quad (4.151)$$

$$R_{\varphi\varphi} = \sin^2 \theta \{ e^{-2\alpha} [r(\alpha' - \nu') - 1] + 1 \}. \quad (4.152)$$

Tous les autres composantes sont nulles. On vérifie que pour $\nu = 0$ et $\alpha = 0$, $R_{\alpha\beta} = 0$.

Le scalaire de Ricci s'obtient par $R = g^{\alpha\beta} R_{\alpha\beta}$ [Eq. (4.111)] :

$$R = -e^{-2\nu} R_{00} + e^{-2\alpha} R_{rr} + \frac{1}{r^2} R_{\theta\theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} R_{\varphi\varphi}. \quad (4.153)$$

Avec les valeurs ci-dessus, il vient

$$R = 2e^{-2\alpha} \left[-\nu'' - (\nu')^2 + \nu' \alpha' + \frac{2}{r} (\alpha' - \nu') + \frac{1}{r^2} (e^{2\alpha} - 1) \right]. \quad (4.154)$$

À partir de $R_{\alpha\beta}$ et R , on forme le tenseur d'Einstein via l'Eq. (4.114) :

$$G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2} R (-e^{2\nu}) \quad (4.155)$$

$$G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}Re^{2\alpha} \quad (4.156)$$

$$G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rr^2 \quad (4.157)$$

$$G_{\varphi\varphi} = R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}Rr^2 \sin^2 \theta. \quad (4.158)$$

En remplaçant $R_{\alpha\beta}$ et R par leurs valeurs ci-dessus, on obtient

$$G_{00} = \frac{e^{2(\nu-\alpha)}}{r^2} (2r\alpha' + e^{2\alpha} - 1) \quad (4.159)$$

$$G_{rr} = \frac{1}{r^2} (2r\nu' + 1 - e^{2\alpha}) \quad (4.160)$$

$$G_{\theta\theta} = r^2 e^{-2\alpha} \left[\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') \right] \quad (4.161)$$

$$G_{\varphi\varphi} = r^2 \sin^2 \theta e^{-2\alpha} \left[\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') \right]. \quad (4.162)$$

Les composantes non triviales de l'équation d'Einstein (4.138) avec $\Lambda = 0$ s'écrivent alors

$$2r\alpha' + e^{2\alpha} - 1 = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 T_{00} e^{2(\alpha-\nu)} \quad (4.163)$$

$$2r\nu' + 1 - e^{2\alpha} = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 T_{rr} \quad (4.164)$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{T_{\theta\theta}}{r^2} e^{2\alpha} \quad (4.165)$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') = \frac{8\pi G}{c^4} \frac{T_{\varphi\varphi}}{r^2 \sin^2 \theta} e^{2\alpha}. \quad (4.166)$$

Les autres composantes conduisent à la contrainte

$$T_{\alpha\beta} = 0 \quad \text{pour } \alpha \neq \beta. \quad (4.167)$$

4.6.2 Solution de Schwarzschild

Nous sommes à présent en mesure de dériver la solution de Schwarzschild, que nous avons admise au Chap. 3. Il s'agit d'une solution du vide, c'est-à-dire de tenseur énergie-impulsion identiquement nul sur \mathcal{E} : $\mathbf{T} = 0$. Les dix équations d'Einstein (4.163)-(4.167) se réduisent alors à

$$2r\alpha' + e^{2\alpha} - 1 = 0 \quad (4.168)$$

$$2r\nu' + 1 - e^{2\alpha} = 0 \quad (4.169)$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') = 0. \quad (4.170)$$

La première équation est simple car elle ne contient que la fonction $\alpha(r)$. En posant

$$e^{2\alpha(r)} =: \frac{1}{f(r)} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha(r) =: -\frac{1}{2} \ln f(r), \quad (4.171)$$

elle devient

$$rf' + 1 - f = 0. \quad (4.172)$$

La solution qui vaut 1 lorsque $r \rightarrow +\infty$ (de manière à assurer $\alpha = 0$ et donc une métrique asymptotiquement plate) est

$$f(r) = 1 + \frac{K}{r}, \quad (4.173)$$

où K est une constante. On a donc

$$\alpha(r) = -\frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{K}{r} \right). \quad (4.174)$$

En reportant cette valeur dans (4.169), il vient

$$2r\nu' + 1 - \frac{1}{1 + K/r} = 0, \quad (4.175)$$

soit

$$\nu' = \frac{1}{2} \frac{-K/r^2}{1 + K/r} \quad (4.176)$$

On en déduit immédiatement que

$$\nu(r) = \frac{1}{2} \ln \left(1 + \frac{K}{r} \right), \quad (4.177)$$

la constante d'intégration étant choisie nulle pour assurer $\nu \rightarrow 0$ lorsque $r \rightarrow +\infty$. On peut vérifier que les fonctions $\alpha(r)$ et $\nu(r)$ données par (4.174) et (4.177) satisfont la troisième équation [Eq. (4.170)].

En reportant α et ν dans (4.146), on obtient l'expression de la solution de l'équation d'Einstein dans le vide, dans le cas statique et à symétrie sphérique :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 + \frac{K}{r} \right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{K}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (4.178)$$

En comparant avec l'Eq. (3.6), on reconnaît tout de suite la solution de Schwarzschild correspondant à une masse centrale

$$M = -\frac{c^2 K}{2G}. \quad (4.179)$$

Remarque : Dans le cas $\mathbf{T} = 0$ (vide) et $\Lambda = 0$ (pas de constante cosmologique), l'équation d'Einstein (4.140) est équivalente à

$$\mathbf{R} = 0. \quad (4.180)$$

En effet, en prenant la trace de (4.140) avec $\mathbf{T} = 0$ et $\Lambda = 0$, on obtient $R - 1/2 R \times 4 = 0$, c'est-à-dire $R = 0$. Le report de cette valeur dans (4.140) conduit à (4.180). Une solution de l'équation d'Einstein du vide avec $\Lambda = 0$, comme la solution de Schwarzschild (4.178), est donc une métrique dont le tenseur de Ricci est identiquement nul. Par contre, le tenseur de Riemann n'est pas nul, sauf dans le cas de la solution triviale constituée par la métrique de Minkowski (espace-temps plat).

4.6.3 Équations de Tolman-Oppenheimer-Volkoff

Traisons à présent le cas où l'espace-temps n'est pas vide, mais contient une étoile centrale, que nous supposons constituée d'un fluide parfait. Le tenseur énergie-impulsion est donc de la forme (4.124), avec toutefois des restrictions sur la 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ en raison des hypothèses de symétrie sphérique et de staticité. Cette dernière condition impose que $\vec{\mathbf{u}}$ soit colinéaire au vecteur de Killing $\vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t$ (cf. § 3.2.1) :

$$\vec{\mathbf{u}} = u^0 \vec{\partial}_0. \quad (4.181)$$

La relation de normalisation $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = -1$ permet alors de déterminer u^0 en fonction de la composante g_{00} de la métrique, puisque (4.181) implique $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{u}} = g_{00}(u^0)^2 = -e^{2\nu}(u^0)^2$. On a ainsi

$$\vec{\mathbf{u}} = e^{-\nu} \vec{\partial}_0. \quad (4.182)$$

Pour former le tenseur énergie-impulsion, il nous faut la forme linéaire $\underline{\mathbf{u}}$ associée à $\vec{\mathbf{u}}$ par le tenseur métrique. Ses composantes sont $u_\alpha = g_{\alpha\beta}u^\beta$ [Eq. (4.126)]. Étant donnée la forme (4.146) de $g_{\alpha\beta}$ et le fait que $u^\alpha = (e^{-\nu}, 0, 0, 0)$, on obtient

$$u_\alpha = (-e^\nu, 0, 0, 0). \quad (4.183)$$

Les composantes du tenseur énergie-impulsion sont alors [cf. Eq. (4.128)]

$$T_{00} = (\rho c^2 + p)e^{2\nu} + p(-e^{2\nu}) = e^{2\nu} \rho c^2 \quad (4.184)$$

$$T_{rr} = e^{2\alpha} p \quad (4.185)$$

$$T_{\theta\theta} = p r^2 \quad (4.186)$$

$$T_{\varphi\varphi} = p r^2 \sin^2 \theta, \quad (4.187)$$

les composantes non diagonales étant nulles. En reportant ces valeurs dans les composantes (4.163)-(4.166) de l'équation d'Einstein, il vient

$$2r\alpha'e^{-2\alpha} - e^{-2\alpha} + 1 = \frac{8\pi G}{c^2} r^2 \rho \quad (4.188)$$

$$(2r\nu' + 1)e^{-2\alpha} - 1 = \frac{8\pi G}{c^4} r^2 p \quad (4.189)$$

$$\nu'' + (\nu')^2 - \nu'\alpha' + \frac{1}{r}(\nu' - \alpha') = \frac{8\pi G}{c^4} p e^{2\alpha}. \quad (4.190)$$

Par analogie avec la métrique de Schwarzschild, effectuons le changement de variable suivant :

$$e^{-2\alpha(r)} =: 1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}, \quad (4.191)$$

où $m(r)$ est la nouvelle inconnue. En remarquant que

$$2\alpha'e^{-2\alpha(r)} = -\frac{d}{dr}e^{-2\alpha(r)} = -\frac{d}{dr}\left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r}\right) = \frac{2G}{c^2}\left(\frac{m'(r)}{r} - \frac{m(r)}{r^2}\right), \quad (4.192)$$

l'Eq. (4.188) se simplifie considérablement et devient

$$m'(r) = 4\pi r^2 \rho. \quad (4.193)$$

Dans le cas de Schwarzschild, on aurait eu $\rho = 0$ (vide) et donc $m(r) = \text{const.} = M$.

De son côté, l'Eq. (4.189) devient, lorsqu'on y reporte (4.191),

$$\nu'(r) = \frac{G}{c^2} \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{m(r)}{r^2} + 4\pi r \frac{p}{c^2} \right). \quad (4.194)$$

Enfin, plutôt que d'utiliser la composante (4.190) de l'équation d'Einstein, il est plus commode de considérer l'équation de conservation de l'énergie-impulsion $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ [Eq. (4.139)]. Rappelons qu'en vertu de l'identité de Bianchi, cette équation est une conséquence de l'équation d'Einstein. Dans le cas présent, elle n'a qu'une seule composante non nulle, la composante r , qui s'écrit très simplement

$$\frac{dp}{dr} + (\rho c^2 + p) \frac{d\nu}{dr} = 0. \quad (4.195)$$

Posons

$$\nu(r) =: \frac{\Phi(r)}{c^2}, \quad (4.196)$$

de manière à ce qu'à la limite non relativiste, $\Phi(r)$ redonne le potentiel gravitationnel newtonien [comparer le terme g_{00} dans (4.146) et (4.143)]. On peut alors réécrire les équations (4.193), (4.194) et (4.195) sous la forme

$$\boxed{\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r)} \quad (4.197)$$

$$\boxed{\frac{d\Phi}{dr} = \left(1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right)^{-1} \left(\frac{Gm(r)}{r^2} + 4\pi G r \frac{p(r)}{c^2} \right)} \quad (4.198)$$

$$\boxed{\frac{dp}{dr} = - \left(\rho(r) + \frac{p(r)}{c^2} \right) \frac{d\Phi}{dr}}. \quad (4.199)$$

Ce système d'équations différentielles du premier ordre en $m(r)$, $\Phi(r)$, $\rho(r)$ et $p(r)$ s'appelle systeme de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (TOV). Il doit être complété par la donnée d'une équation d'état reliant p et ρ (7) :

$$p = p(\rho). \quad (4.200)$$

Il détermine alors complètement la structure d'une étoile relativiste statique et à symétrie sphérique. Un exemple de solution exacte du système TOV est donné au § B.7 de l'Annexe B : il s'agit de la solution de Schwarzschild interne pour une étoile incompressible.

7. Nous ne considérons ici que de la matière froide, pour laquelle la pression est uniquement fonction de la densité. C'est une excellente approximation pour les naines blanches et les étoiles à neutrons [cf. cours TH9 (Frédéric Daigne)]. Si on doit prendre en compte la température, l'équation d'état devient $p = p(\rho, T)$ et il faut ajouter une loi qui gouverne $T(r)$ pour fermer le système.

À la limite newtonienne ($Gm(r)/(c^2r) \ll 1$) et pour un fluide non relativiste ($p/c^2 \ll \rho$), le système TOV se réduit aux équations de l'hydrostatique bien connues :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (4.201)$$

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{Gm(r)}{r^2} \quad (4.202)$$

$$\frac{dp}{dr} = -\rho(r) \frac{d\Phi}{dr}. \quad (4.203)$$

4.6.4 Pour aller plus loin...

Nous renvoyons au livre de Haensel, Potekhin & Yakovlev [55] pour une discussion approfondie des solutions du système TOV et de leur stabilité, et à [54] pour une introduction aux modèles stellaires axisymétriques en rotation.

4.7 Exercices

À ce stade du cours, on peut traiter les problèmes suivants de l'Annexe B :

- le problème B.2 (*Équation de Killing*) ;
- les questions 7 et 8 du problème B.3 (*Trou de ver*), les questions 1 à 6 relevant du chapitre précédent ;
- le problème B.6 (*Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker*) ;
- le problème B.7 (*Modèle d'étoile incompressible*) ;
- le problème B.8 (*Vitesse du son relativiste*) ;
- le problème B.9 (*Photon émis par une étoile*) ;
- le problème B.10 (*Pression de radiation et effet Poynting-Robertson*) ;
- les questions 1 à 4 du problème B.13 (*Tenseur de Killing et constante de Carter*).
- le problème B.15 (*Déviations géodésiques*)

Chapitre 5

Trous noirs

version 2013-2014

Sommaire

5.1 Introduction	123
5.2 Singularité de coordonnées et singularité centrale	124
5.3 Horizon des événements	127
5.4 Effondrement gravitationnel	131
5.5 Trous noirs en rotation	131
5.6 Mouvement géodésique dans l'espace-temps de Kerr	135
5.7 Exercices	141

5.1 Introduction

Les trous noirs sont sans doute les objets les plus fascinants de la relativité générale. Dans les quarante dernières années, ils sont passés du statut de curiosités abstraites, en tant que solutions mathématiques de l'équation d'Einstein, à celui de membre à part entière du bestiaire de l'astrophysique.

Les trous noirs statiques (sans rotation) sont décrits par la métrique de Schwarzschild, que nous avons obtenue au Chap. 4 en résolvant l'équation d'Einstein et dont nous avons étudié les propriétés à l'extérieur du rayon de Schwarzschild au Chap. 3. Dans le chapitre présent, nous allons nous focaliser sur les propriétés de la métrique de Schwarzschild qui sont propres au trou noir, à savoir la présence d'un *horizon des événements*. Nous discuterons aussi du cas très important pour l'astrophysique des trous noirs en rotation. Ces derniers sont décrits par une solution axisymétrique et stationnaire de l'équation d'Einstein : la *métrique de Kerr*, qui généralise celle de Schwarzschild.

Auparavant, ouvrons une parenthèse sur la notion de trou noir en régime newtonien. On peut en effet prédire l'existence de trous noirs dans le cadre de la théorie newtonienne

de la gravitation, pour peu que l'on traite les photons comme des particules ordinaires soumises à la gravitation. Ainsi que l'ont remarqué l'Anglais John Michell et le Français Pierre Simon de Laplace à la fin du XVIII^e siècle [31, 30], la vitesse de libération depuis la surface d'un corps massif atteint la vitesse de la lumière lorsque

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{GM}{R}, \quad (5.1)$$

où M est la masse du corps (supposé sphérique) et R son rayon. Ainsi, un corps dont le rapport M/R obéirait à l'équation ci-dessus ne laisserait pas s'échapper la lumière : ce serait donc un trou noir.

Comme nous l'avons déjà souligné dans la remarque faite page 57, les trous noirs ne correspondent pas nécessairement à des objets extrêmement denses. En effet le critère (5.1) est en M/R , alors que la densité varie comme M/R^3 . Si l'on définit la densité moyenne par $\bar{\rho} := M/(4/3\pi R^3)$, on peut récrire (5.1) comme

$$\frac{1}{2}c^2 = \frac{4}{3}\pi G\bar{\rho}R^2, \quad (5.2)$$

de sorte que pour toute valeur de $\bar{\rho}$, même petite, il suffit que le corps soit suffisamment étendu (R grand) pour satisfaire au critère de trou noir. Ainsi Michell avait calculé en 1784 qu'un astre de même densité que le Soleil mais de rayon 500 fois plus grand serait un trou noir [31]. Laplace considère quant à lui un corps de même densité que la Terre et écrit, dans les deux premières éditions de son *Exposition du système du monde*, parues en 1796 et 1799 [30],

Un astre lumineux, de la même densité que la Terre, et dont le diamètre serait 250 fois plus grand que le Soleil, ne permettrait, en vertu de son attraction, à aucun de ses rayons de parvenir jusqu'à nous. Il est dès lors possible que les plus grands corps lumineux de l'univers puissent, par cette cause, être invisibles.

Notons également que l'impossibilité pour la lumière de s'échapper d'« étoiles » de trop grande taille est mentionnée par l'astronome François Arago dans une communication à l'Académie des Sciences en 1810, qui ne sera publiée qu'en 1853 [22].

Remarquons qu'en terme du paramètre de compacité Ξ introduit au Chap. 3, le critère (5.1) se traduit par

$$\Xi = \frac{1}{2}, \quad (5.3)$$

ce qui montre bien que les trous noirs doivent avoir un champ gravitationnel intense. Il convient donc d'arrêter là leur description newtonienne et de se tourner vers la relativité générale.

5.2 Singularité de coordonnées et singularité centrale

5.2.1 Nature de la singularité au rayon de Schwarzschild

Un trou noir statique est décrit par la métrique de Schwarzschild, qui est la solution du vide de l'équation d'Einstein que nous avons dérivée au § 4.6.2. Dans les coordonnées

$(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ dites *coordonnées de Schwarzschild*, cette solution prend la forme (3.6) :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (5.4)$$

où R_S est le rayon de Schwarzschild défini par

$$R_S := \frac{2GM}{c^2}. \quad (5.5)$$

Ainsi que nous l'avons déjà noté au § 3.2.2, on constate sur (5.4) que les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont singulières en $r = 0$ et $r = R_S$. Examinons tout d'abord la nature de la singularité en $r = R_S$. Pour ce faire, utilisons les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes $x^{\tilde{\alpha}} = (v, r, \theta, \varphi)$ introduites au § 3.3.2, plutôt que les coordonnées de Schwarzschild (ct, r, θ, φ) . Les composantes du tenseur métrique sont alors données par (3.40) :

$$g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) dv^2 + 2 dv dr + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.6)$$

Les hypersurfaces $x^{\tilde{0}} = v = \text{const}$ sont du genre lumière. Cela signifie que la métrique induite y est dégénérée¹ : sa signature est $(0, +, +)$ comme le montre l'absence de terme en dr^2 dans (5.6). Pour retrouver le cas plus familier des hypersurfaces $x^{\tilde{0}} = \text{const}$ du genre espace (c'est-à-dire avec une métrique induite définie positive), choisissons pour $x^{\tilde{0}}$ la coordonnée

$$\tilde{t} := \frac{1}{c}(v - r) \quad (5.7)$$

plutôt que v . En remplaçant v par l'expression (3.34) : $v = ct + r + R_S \ln(r/R_S - 1)$, on peut relier \tilde{t} à la coordonnée de Schwarzschild t :

$$\tilde{t} = t + \frac{R_S}{c} \ln \left(\frac{r}{R_S} - 1 \right). \quad (5.8)$$

On appelle alors coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1 les coordonnées

$$x^{\tilde{\alpha}} = (c\tilde{t}, r, \theta, \varphi). \quad (5.9)$$

Remarquons qu'elles ne diffèrent des coordonnées de Schwarzschild que par \tilde{t} à la place de t . Le premier vecteur de la base naturelle associée à ces coordonnées n'est autre que le vecteur de Killing $\vec{\xi}_0$ associé à la stationnarité de la métrique de Schwarzschild [cf. Eq. (3.41)] :

$$\vec{\partial}_{\tilde{t}} = \vec{\partial}_t = c \vec{\xi}_{(0)}. \quad (5.10)$$

Il est facile d'établir (5.10) : pour tout champ scalaire f sur \mathcal{E} , on a en effet, au vu de la transformation (5.8)-(5.9),

$$\vec{\partial}_{\tilde{t}}(f) = \frac{\partial f}{\partial \tilde{t}} = \frac{\partial f}{\partial t} \underbrace{\frac{\partial t}{\partial \tilde{t}}}_{=1} + \frac{\partial f}{\partial r} \underbrace{\frac{\partial r}{\partial \tilde{t}}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial \theta} \underbrace{\frac{\partial \theta}{\partial \tilde{t}}}_{=0} + \frac{\partial f}{\partial \varphi} \underbrace{\frac{\partial \varphi}{\partial \tilde{t}}}_{=0} = \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{\partial}_t(f). \quad (5.11)$$

1. cf. § 2.3.1 pour un rappel de la définition de *dégénérée*.

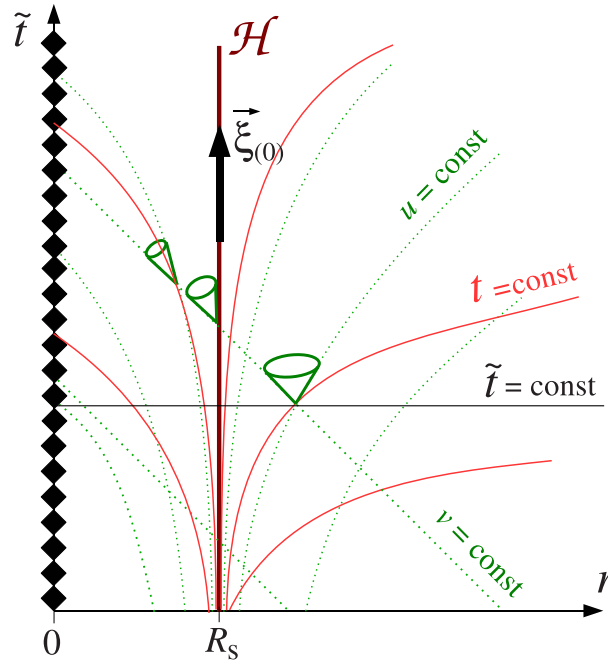


FIGURE 5.1 – Espace-temps de Schwarzschild en coordonnées d’Eddington-Finkelstein 3+1 $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$. Les lignes en traits continus rouges représentent les hypersurfaces $t = \text{const}$ où t est la coordonnée de Schwarzschild. Les droites en pointillés inclinées à -45° représentent les géodésiques lumière radiales entrantes et les autres lignes en pointillés les géodésiques lumière radiales sortantes. \mathcal{H} est l’horizon des événements, situé en $r = R_S$. Le vecteur de Killing associé à la stationnarité, $\vec{\xi}_{(0)} = c^{-1}\vec{\partial}_{\tilde{t}}$, est une normale lumière de \mathcal{H} . Il est donc tangent à \mathcal{H} .

Cela montre bien que les vecteurs $\vec{\partial}_{\tilde{t}}$ et $\vec{\partial}_t$ sont égaux.

En différenciant (5.7), il vient $dv = c d\tilde{t} + dr$, que l’on reporte dans (5.6) pour obtenir les composantes de la métrique dans les coordonnées d’Eddington-Finkelstein 3+1 :

$$g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 d\tilde{t}^2 + 2\frac{R_S}{r} c d\tilde{t} dr + \left(1 + \frac{R_S}{r}\right) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.12)$$

Ces composantes ne sont pas singulières en $r = R_S$. En particulier, $g_{rr}|_{r=R_S} = 2$. On a certes $g_{\tilde{t}\tilde{t}}|_{r=R_S} = 0$, mais cela n’implique pas que \mathbf{g} soit dégénérée en ce point, car la matrice $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}$ n’est pas diagonale. Son déterminant vaut d’ailleurs

$$\det(g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}}) = -r^4 \sin^2 \theta. \quad (5.13)$$

Puisque $\det(g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}})|_{r=R_S} \neq 0$, \mathbf{g} n’est donc pas dégénérée en $r = R_S$. Nous concluons donc que la singularité $r = R_S$ des coefficients métriques $g_{\alpha\beta}$ dans les coordonnées de Schwarzschild est due à ces coordonnées et ne reflète pas une singularité du tenseur métrique \mathbf{g} . C’est un exemple de ce que l’on appelle une *singularité de coordonnées*.

L’espace-temps de Schwarzschild est représenté sur la Fig. 5.1 en coordonnées d’Eddington-Finkelstein 3+1. On voit clairement sur cette figure que les coordonnées de Schwarzschild

(ct, r, θ, φ) sont pathologiques en $r = R_S$ car les hypersurfaces de coordonnée t constante ne traversent jamais l'hypersurface $r = R_S$ (elles « s'accumulent » en $r = R_S$).

5.2.2 Singularité centrale

Examinons à présent la singularité en $r = 0$, qui est présente, non seulement dans les composantes du tenseur métrique en coordonnées de Schwarzschild [Eq. (5.4)], mais aussi dans celles en coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1 [Eq. (5.12)]. Après avoir évalué le tenseur de Riemann associé à la métrique de Schwarzschild [par exemple en calculant ses composantes en coordonnées de Schwarzschild via l'Eq. (4.98)], on peut former le scalaire de Kretschmann $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$, où $R_{\alpha\beta\mu\nu} := g_{\alpha\sigma}R^{\sigma}_{\beta\mu\nu}$ et $R^{\alpha\beta\mu\nu} := g^{\beta\gamma}g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}R^{\alpha}_{\gamma\rho\sigma}$. On obtient

$$R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu} = 12 \frac{R_S^2}{r^6}. \quad (5.14)$$

[Exercice : le faire]. On note que $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ diverge lorsque $r \rightarrow 0$. Il s'agit là d'une singularité du tenseur métrique \mathbf{g} , et non d'une simple singularité de coordonnées, car $R_{\alpha\beta\mu\nu}R^{\alpha\beta\mu\nu}$ étant un champ scalaire, sa valeur en un point est indépendante de tout système de coordonnées.

Remarque 1: *Un autre invariant auquel on aurait pu penser est le scalaire de Ricci $R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}$ [cf. Eqs. (4.111) et (4.154)]. Mais ce dernier est identiquement zéro, ainsi qu'on peut aisément le vérifier sur l'Eq. (4.154), car la métrique de Schwarzschild est solution de l'équation d'Einstein du vide (cf. la remarque faite page 119).*

Remarque 2: *Le déterminant de la matrice des composantes $g_{\alpha\beta}$ n'est pas un invariant. Il dépend en effet du choix des coordonnées (x^α). Ce n'est donc pas une bonne quantité pour localiser les singularités du tenseur métrique.*

La singularité du tenseur métrique \mathbf{g} en $r = 0$ marque la limite de la description des trous noirs par la relativité générale. Il faudrait sans doute recourir à une théorie quantique de la gravitation — qui n'existe pas encore vraiment à ce jour² — pour avoir une description de la région centrale exempte de toute singularité. Du point de vue astrophysique, tout cela n'est pas important puisque, comme nous allons le voir, la singularité est cachée sous l'horizon des événements et ne peut, en aucune manière, influencer le monde extérieur.

5.3 Horizon des événements

La singularité en $r = 0$ n'est pas la caractéristique première d'un trou noir. Cette dernière est en effet l'horizon des événements, que nous introduisons à présent.

2. les recherches actuelles dans cette voie sont essentiellement basées sur deux approches : la *théorie des cordes* d'un côté, et la *gravité quantique à boucles* de l'autre, cf. par exemple le livre de Lee Smolin [67].

5.3.1 Définition

Déterminons l'équation des géodésiques lumière radiales en coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1 : en effectuant dans (5.12) $g_{\tilde{\alpha}\tilde{\beta}} dx^{\tilde{\alpha}} dx^{\tilde{\beta}} = 0$ (géodésique lumière) et $d\theta = d\varphi = 0$ (trajectoire radiale), il vient

$$\left(1 + \frac{R_S}{r}\right) \frac{V^2}{c^2} + 2\frac{R_S}{r} \frac{V}{c} - 1 + \frac{R_S}{r} = 0, \quad (5.15)$$

où l'on a noté V la vitesse-coordonnée des photons :

$$V := \frac{dr}{d\tilde{t}}. \quad (5.16)$$

L'équation du second degré (5.15) admet deux racines :

$$V = -c \quad (5.17)$$

$$V = c \frac{1 - R_S/r}{1 + R_S/r}. \quad (5.18)$$

La première solution correspond aux géodésiques lumière entrantes et ne doit pas nous surprendre : de par leur définition, les coordonnées d'Eddington-Finkelstein entrantes (v, r, θ, φ) assurent $v = \text{const}$ le long de ces géodésiques, ce qui, via (5.7), implique $r = -c\tilde{t} + \text{const}$ et donc $V = -c$. C'est d'ailleurs pour cette raison que les géodésiques lumière entrantes sont simplement des droites inclinées à 45° sur la Fig. 5.1.

La deuxième solution (5.18) correspond aux géodésiques « sortantes ». On constate qu'elle vérifie

$$r < R_S \iff V < 0. \quad (5.19)$$

Cela signifie qu'un photon émis dans la direction radiale depuis un point situé en $r < R_S$ voit sa coordonnée r décroître. En conséquence il n'atteindra jamais la région de l'espace-temps située en $r > R_S$. Autrement dit, pour $r < R_S$, les géodésiques radiales « sortantes » se comportent comme les géodésiques entrantes (cf. Fig. 5.1).

L'hypersurface $r = R_S$ sépare donc l'espace-temps de Schwarzschild en deux régions bien distinctes : l'une ($r > R_S$) où les photons peuvent atteindre l'infini s'ils sont émis dans la direction radiale sortante et l'autre ($r < R_S$) où les photons sont piégés, quelle que soit leur direction d'émission. Cette deuxième région ne peut donc pas avoir d'influence causale sur la première. Pour cette raison, on dit que l'hypersurface³ $r = R_S$ est un *horizon des événements*. On le notera \mathcal{H} dans ce qui suit.

D'une manière plus générale, c'est l'existence d'un horizon des événements qui définit un *trou noir*, et non l'existence d'une singularité centrale. Une singularité qui ne serait pas entourée d'un horizon des événements est appelée *singularité nue*.

La *conjecture de censure cosmique* stipule que tout effondrement gravitationnel d'étoile conduit à un trou noir et non à une singularité nue. À ce jour, cette conjecture n'a pas été rigoureusement démontrée.

3. Dans l'espace-temps \mathcal{E} couvert par les coordonnées $(\tilde{t}, r, \theta, \varphi)$, la condition $r = \text{const}$ définit une sous-variété de dimension $4 - 1 = 3$, donc une hypersurface.

5.3.2 Genre lumière de l'horizon des événements

L'horizon des événements \mathcal{H} est une *hypersurface du genre lumière*, c'est-à-dire que la métrique induite par \mathbf{g} y est dégénérée. En effet, puisque l'horizon des événements correspond à $r = \text{const.} = R_S$, le triplet $(\tilde{t}, \theta, \varphi)$ constitue un système de coordonnées sur \mathcal{H} où la métrique induite s'écrit, d'après (5.12),

$$ds^2|_{\mathcal{H}} = -0 \times c^2 d\tilde{t}^2 + R_S^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = R_S^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (5.20)$$

L'absence de terme en $d\tilde{t}^2$ dans l'expression ci-dessus montre clairement que la direction \tilde{t} constitue une direction de dégénérescence de la métrique induite. Pour cette raison, les cônes de lumière sont tangents à \mathcal{H} , ainsi que dessiné sur la Fig. 5.1.

Le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)} = c^{-1} \vec{\partial}_{\tilde{t}}$ [cf. (5.10)] est du genre lumière sur \mathcal{H} , car

$$\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{\xi}_{(0)} \Big|_{r=R_S} = g_{00} \Big|_{r=R_S} = - \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) \Big|_{r=R_S} = 0. \quad (5.21)$$

Par ailleurs, $\vec{\xi}_{(0)}$ est normal à \mathcal{H} :

$$\forall \vec{v} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{H}), \quad \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{v} = 0. \quad (5.22)$$

C'est facile à vérifier puisque tout vecteur tangent à \mathcal{H} s'écrit

$$\vec{v} = v^0 \vec{\xi}_{(0)} + v^\theta \vec{\partial}_\theta + v^\varphi \vec{\partial}_\varphi, \quad (5.23)$$

et que $\vec{\xi}_{(0)}$ est orthogonal à chacun des trois vecteurs du membre de droite (dont lui-même, puisqu'il est du genre lumière). Le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$ est également tangent à \mathcal{H} (il vérifie l'égalité ci-dessus avec $v^0 = 1$ et $v^\theta = v^\varphi = 0$). On retrouve ainsi une propriété caractéristique des hypersurfaces du genre lumière : leur normale leur est également tangente (cf. Fig. 5.1).

La propriété que nous venons d'établir pour le trou noir de Schwarzschild est en fait générique : l'horizon des événements est toujours une hypersurface du genre lumière. Cela signifie qu'il s'agit d'une « membrane » qu'une particule matérielle, voyageant nécessairement sur une ligne d'univers du genre temps, ne peut traverser que dans un sens : de l'extérieur vers l'intérieur. Notons que cette propriété n'est pas l'apanage de l'horizon des événements : la nappe du futur de n'importe quel cône de lumière de l'espace-temps plat la possède également. Ce qui distingue vraiment l'horizon des événements, c'est que les photons émis à l'intérieur de cette « membrane » n'atteignent jamais la région asymptotiquement plate située à l'infini.

L'horizon des événements est une membrane immatérielle et aucune expérience de physique *locale* ne peut le mettre en évidence. Sa définition même est grandement *non locale*. Il faut en effet construire la totalité des géodésiques lumière de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ pour déterminer si un horizon des événements existe et le localiser.

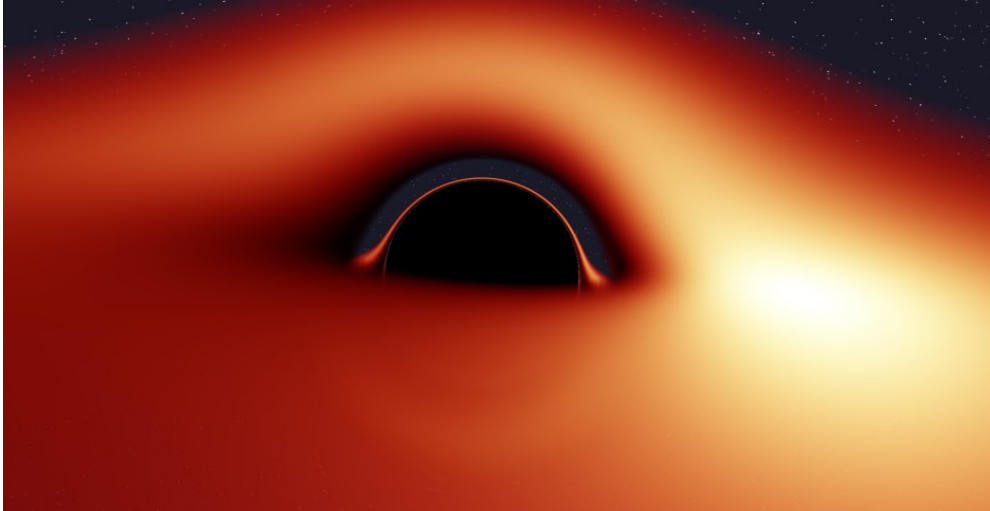


FIGURE 5.2 – Image d'un disque d'accrétion autour d'un trou noir calculée par J.-A. Marck (1996) [59] en intégrant les géodésiques lumière dans la métrique de Schwarzschild. Le bord interne du disque est situé à l'ISCO : $r = 3R_S$ [cf Eq. (3.126)].

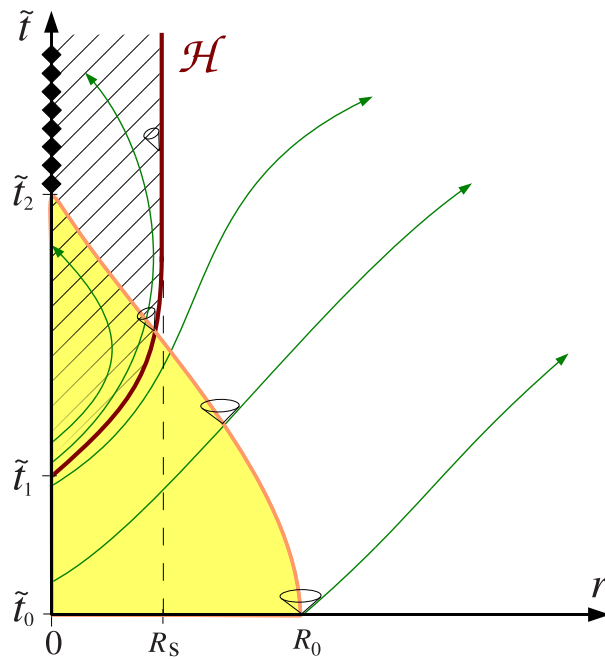


FIGURE 5.3 – Diagramme d'espace-temps décrivant l'effondrement gravitationnel d'une étoile dans des coordonnées de type Eddington-Finkelstein 3+1. La partie de l'espace-temps occupée par la matière est la partie coloriée en jaune. Les lignes avec des extrémités fléchées représentent les lignes d'univers des photons émis vers l'extérieur. A l'instant initial \tilde{t}_0 , le rayon de l'étoile est R_0 . A l'instant \tilde{t}_1 l'horizon des événements \mathcal{H} apparaît au centre de l'étoile. Tous les photons émis à l'intérieur du domaine délimité par \mathcal{H} sont piégés. Ce domaine, hachuré sur la figure, est l'intérieur du trou noir. À l'instant \tilde{t}_2 l'effondrement est achevé et une singularité apparaît en $r = 0$.

5.4 Effondrement gravitationnel

Les trous noirs stellaires se forment lors de l'effondrement du cœur de fer d'une étoile massive en fin d'évolution, événement qui donne lieu au phénomène de supernova. L'effondrement gravitationnel est représenté schématiquement sur la Fig. 5.3. Nous renvoyons au cours de Frédéric Daigne (unité d'enseignement Th9) pour plus de détails.

5.5 Trous noirs en rotation

5.5.1 Solution de Kerr

Comme tous les corps dans l'Univers, les trous noirs réels doivent être en rotation. La solution de Schwarzschild, qui est statique, ne fournit alors qu'une description approchée. Les trous noirs étant accélérés par l'accrétion de matière, on s'attend à ce que la plupart d'entre eux soient en rotation rapide. La description par la métrique de Schwarzschild n'est alors pas satisfaisante. Il se trouve qu'une solution exacte de l'équation d'Einstein correspondant à un trou noir en rotation a été découverte en 1963 par le mathématicien néo-zélandais Roy Kerr. De plus, cette solution, comme nous le verrons au § 5.5.2, recouvre tous les trous noirs stationnaires en rotation !

Dans un système de coordonnées $x^\alpha = (ct, r, \theta, \varphi)$, appelées coordonnées de Boyer-Lindquist, la métrique de Kerr a pour composantes :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GMr}{c^2\rho^2} \right) c^2 dt^2 - \frac{4GMa r \sin^2 \theta}{c^2\rho^2} c dt d\varphi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2GMa^2 r \sin^2 \theta}{c^2\rho^2} \right) \sin^2 \theta d\varphi^2, \quad (5.24)$$

où

$$\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta := r^2 - \frac{2GM}{c^2} r + a^2 \quad (5.25)$$

et a et M sont deux constantes, respectivement de la dimension d'une longueur et d'une masse. M est en fait la masse du trou noir et a est relié au moment cinétique du trou noir J par

$$a = \frac{J}{cM}. \quad (5.26)$$

La constante sans dimension

$$\bar{a} := \frac{c^2}{G} \frac{a}{M} = \frac{c}{G} \frac{J}{M^2} \quad (5.27)$$

est appelée paramètre de Kerr de la solution.

Exercice : vérifier à l'aide d'un logiciel de calcul formel (par exemple le logiciel libre Sage⁴ ou son extension SageManifolds⁵, cf. Annexe D) que la métrique donnée par (5.24) est bien une solution de l'équation d'Einstein du vide.

4. <http://www.sagemath.org/>

5. <http://sagemanifolds.obspm.fr/>

Au vu de (5.24), on peut faire les constatations suivantes :

- L'espace-temps de Kerr $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est stationnaire et axisymétrique : les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont indépendantes des coordonnées t et φ (cf. § 3.2.1). Les vecteurs de Killing correspondant à ces deux symétries sont

$$\boxed{\vec{\xi}_{(0)} := \vec{\partial}_0 = c^{-1} \vec{\partial}_t} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\xi}_{(z)} := \vec{\partial}_\varphi}. \quad (5.28)$$

Contrairement à l'espace-temps de Schwarzschild, il n'y a pas d'autres symétries.

- Pour $a \neq 0$, l'espace-temps de Kerr n'est pas statique, le vecteur $\vec{\xi}_{(0)}$ n'étant pas orthogonal aux hypersurfaces $t = \text{const}$, en raison du terme $g_{t\varphi} \neq 0$ dans (5.24) (cf. § 3.2.1).
- Lorsque $a = 0$, $\rho = r$ et l'espace-temps de Kerr se réduit à celui de Schwarzschild, puisque (5.24) redonne alors les composantes (5.4) de la métrique de Schwarzschild en coordonnées de Schwarzschild. Les coordonnées de Boyer-Lindquist peuvent donc être perçues comme une généralisation des coordonnées de Schwarzschild au cas en rotation.
- Tout comme la métrique de Schwarzschild, la métrique de Kerr est asymptotiquement plate.
- Les composantes $g_{\alpha\beta}$ sont singulières en $\rho = 0$ et $\Delta = 0$.

On peut montrer que la singularité en $\Delta = 0$ est une simple singularité des coordonnées de Boyer-Lindquist, qui généralise la singularité des coordonnées de Schwarzschild en $r = R_S$ (cf. § 5.2.1). Par contre, la singularité en $\rho = 0$ est une singularité du tenseur métrique \mathbf{g} , tout comme la singularité en $r = 0$ de la métrique de Schwarzschild.

5.5.2 Théorème d'unicité (absence de chevelure)

L'immense intérêt de la métrique de Kerr pour l'astrophysique vient du *théorème d'unicité* démontré au début des années 1970 par Brandon Carter, Stephen Hawking et Werner Israel. Ce théorème stipule que tous les trous noirs stationnaires en rotation et non chargés électriquement sont décrits par la métrique de Kerr. Ce théorème confirme la conjecture dite *d'absence de chevelure* établie au milieu des années 1960 par les physiciens soviétiques Vitaly L. Ginzburg, Yakov B. Zeldovich et Igor D. Novikov (cf. l'excellent livre de Thorne pour un compte rendu de cette épopée [69]). L'absence de chevelure signifie que la structure d'un trou noir en rotation est extrêmement simple. Il suffit en effet de deux nombres réels, M et a , pour la décrire entièrement. Le contraste avec les étoiles en rotation est patent : pour ces dernières, la métrique ne peut pas être décrite par seulement quelques paramètres scalaires, même à l'extérieur de l'étoile. Elle dépend en effet de la distribution de masse et d'impulsion à l'intérieur de l'étoile.

Remarque 1: *Il n'existe pas d'équivalent axisymétrique du théorème de Birkhoff énoncé au § 3.2.4. Autrement dit, la métrique de Kerr n'est pas la solution de l'équation d'Einstein à l'extérieur d'une étoile axisymétrique en rotation. Elle ne décrit que les trous noirs.*

Remarque 2: *Si l'on autorise une charge électrique non nulle, le théorème d'absence de chevelure prévaut toujours ; il stipule alors que tous les trous noirs stationnaires*

sont décrits par la métrique de Kerr-Newman, qui ne dépend que de trois paramètres réels : M , a et Q , ce dernier étant la charge électrique totale du trou noir.

5.5.3 Horizon des événements

Pour un paramètre de Kerr $\bar{a} \leq 1$, nous admettrons que l'horizon des événements \mathcal{H} de la métrique de Kerr est l'hypersurface définie par $r = R_{\mathcal{H}}$, où

$$R_{\mathcal{H}} := \frac{GM}{c^2} \left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2} \right). \quad (5.29)$$

À la limite $a = 0$, on retrouve $R_{\mathcal{H}} = 2GM/c^2 = R_S$.

Pour $\bar{a} > 1$, la métrique de Kerr n'admet pas d'horizon des événements : elle décrit alors une *singularité nue* et non un trou noir (cf. § 5.3.1). Le cas critique $\bar{a} = 1$ est appelé *espace-temps de Kerr extrême*.

L'horizon des événements \mathcal{H} est une hypersurface de genre lumière (cf. § 5.3.2), qui admet le vecteur suivant comme normale :

$$\vec{\ell} := \vec{\xi}_{(0)} + \frac{\Omega_{\mathcal{H}}}{c} \vec{\xi}_{(z)}, \quad (5.30)$$

avec

$$\Omega_{\mathcal{H}} := \frac{c\bar{a}}{2R_{\mathcal{H}}}. \quad (5.31)$$

En tant que combinaison linéaire de vecteurs de Killing avec des coefficients constants (1 et $\Omega_{\mathcal{H}}$), $\vec{\ell}$ est également un vecteur de Killing⁶. On peut vérifier que

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \Big|_{r=R_{\mathcal{H}}} = 0, \quad (5.32)$$

comme il se doit pour toute normale à une hypersurface lumière. Les lignes de champ du vecteur $\vec{\ell}$ sont des géodésiques lumière tangentes à \mathcal{H} . $\Omega_{\mathcal{H}}$ mesure leur enroulement et on l'appelle *vitesse de rotation* du trou noir de Kerr. Une autre interprétation de $\Omega_{\mathcal{H}}$ sera fournie par l'Eq. (5.53) plus bas.

5.5.4 Ergosphère

Le carré scalaire du vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_0$ est

$$\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{\xi}_{(0)} = g_{00} = -1 + \frac{2GMr}{c^2(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)}. \quad (5.33)$$

Les zéros de cette fonction sont

$$r = \frac{GM}{c^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (5.34)$$

6. Comme $\vec{\ell}$ n'est pas linéairement indépendant de $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$, il n'introduit pas de nouvelle symétrie de l'espace-temps de Kerr

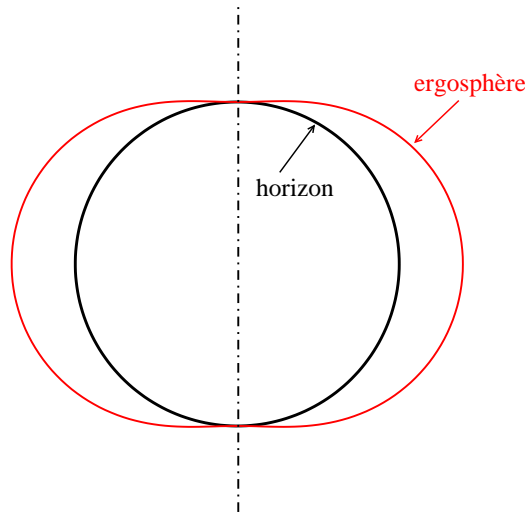


FIGURE 5.4 – Coupe dans un plan-coordonnées $\{t = \text{const}, \varphi = \text{const}\}$ de l'espace-temps de Kerr pour $\bar{a} = 0.9$. L'horizon des événements et l'ergosphère sont dessinés comme des courbes en coordonnées polaires, d'équation $r = R_{\mathcal{H}}$ et $r = R_{\text{ergo}}(\theta)$, où r et θ sont les coordonnées de Boyer-Lindquist et $R_{\mathcal{H}}$ et $R_{\text{ergo}}(\theta)$ sont définis par respectivement (5.29) et (5.36). NB : l'horizon des événements \mathcal{H} , dessiné comme un cercle sur cette figure puisque $R_{\mathcal{H}}$ ne dépend pas de θ , n'est pas aussi sphérique qu'il paraît, car pour $\bar{a} \neq 0$ la métrique induite sur \mathcal{H} n'est pas la métrique canonique d'une sphère.

On en déduit qu'à l'extérieur de l'horizon des événements ($r \geq r_{\mathcal{H}}$), le vecteur $\vec{\xi}_{(0)}$ est du genre espace pour

$$r < R_{\text{ergo}}(\theta), \quad (5.35)$$

avec

$$R_{\text{ergo}}(\theta) = \frac{GM}{c^2} \left(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2 \cos^2 \theta} \right). \quad (5.36)$$

À t fixé, la surface $r = R_{\text{ergo}}(\theta)$ est appelée *ergosphère* et le domaine compris entre l'horizon des événements et l'ergosphère est appelé *ergorégion*. L'ergosphère est représentée sur la Fig. 5.4. Il est à noter que pour l'espace-temps de Schwarzschild, l'ergosphère est confondue avec l'horizon des événements ($\bar{a} = 0 \Rightarrow R_{\text{ergo}}(\theta) = R_S$), de sorte qu'il n'existe pas d'ergorégion dans ce cas.

La propriété importante de l'ergorégion est qu'il ne peut y exister d'observateur statique par rapport à l'infini. En effet, un observateur statique par rapport à l'infini est un observateur dont la ligne d'univers est à (r, θ, φ) fixés. Sa 4-vitesse est donc nécessairement colinéaire à $\vec{\partial}_t$:

$$\vec{u} = u^t \vec{\partial}_t = u^0 \vec{\xi}_{(0)}. \quad (5.37)$$

$\vec{\xi}_{(0)}$ étant du genre espace dans l'ergorégion et la 4-vitesse \vec{u} devant être du genre temps, nous concluons qu'il ne peut exister d'observateur statique dans l'ergorégion. Autrement dit, toutes les lignes d'univers du genre temps sont « entraînées » par le mouvement de rotation du trou noir.

5.6 Mouvement géodésique dans l'espace-temps de Kerr

5.6.1 Quantités conservées

Les orbites des particules matérielles dans l'espace-temps de Kerr sont beaucoup plus compliquées que celle dans l'espace-temps de Schwarzschild. En particulier, elles ne sont en général pas planes, sauf pour celles confinées dans le plan équatorial $\theta = \pi/2$. Nous ne discuterons ici que ce dernier cas. La situation est alors assez similaire à celle traitée au § 3.5 pour l'espace-temps de Schwarzschild, car les quantités conservées le long d'une géodésique du genre temps sont similaires.

Considérons en effet une particule matérielle soumise uniquement à la gravitation dans l'espace-temps de Kerr $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. Sa ligne d'univers \mathcal{L} est alors une géodésique du genre temps. En désignant par \vec{u} , \vec{p} et m respectivement la 4-vitesse, la 4-impulsion et la masse de la particule, les quantités suivantes sont conservées le long de \mathcal{L} :

$$\boxed{\varepsilon := -\frac{c}{m} \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} = -c^2 \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{u}}, \quad (5.38)$$

$$\boxed{\ell := \frac{1}{m} \vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{p} = c \vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{u}} \quad (5.39)$$

$$u^\theta = 0. \quad (5.40)$$

Tout comme dans le cas traité au § 3.5, les deux premières quantités s'interprètent comme l'énergie par unité de masse et la composante z du moment cinétique par unité de masse, toutes deux mesurées par un observateur à l'infini (dans le cas où la particule atteint cette région). La conservation de ε et de ℓ le long de la géodésique \mathcal{L} est assurée par le fait que $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$ sont deux vecteurs de Killing, tout comme dans le cas de la métrique de Schwarzschild (cf. § 3.4.1). Enfin, la conservation de $u^\theta = c^{-1} d\theta/d\tau$ n'est autre que la conséquence de $\theta = \text{const.} = \pi/2$.

Remarque : En plus de ε et ℓ , il existe une autre quantité conservée le long des géodésiques de l'espace-temps de Kerr : la constante de Carter (cf. problème B.13). Cette constante est spécifique à la métrique de Kerr et n'a pas d'équivalent dans un espace-temps stationnaire et axisymétrique quelconque, contrairement à ε et ℓ . Dans le cas d'un mouvement dans le plan équatorial, la constante de Carter est identiquement nulle.

En utilisant les composantes de la métrique dans les coordonnées de Boyer-Lindquist données par (5.24), il vient

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = -g_{\alpha\beta} (\partial_0)^\alpha u^\beta = -g_{0\beta} u^\beta = -g_{00} u^0 - g_{0\varphi} u^\varphi \quad (5.41)$$

$$\frac{\ell}{c} = g_{\alpha\beta} (\partial_\varphi)^\alpha u^\beta = g_{\varphi\beta} u^\beta = g_{\varphi 0} u^0 + g_{\varphi\varphi} u^\varphi, \quad (5.42)$$

c'est-à-dire, en faisant $\sin \theta = 1$ et $\rho = r$ (puisque $\theta = \pi/2$) dans (5.24),

$$\frac{\varepsilon}{c^2} = \left(1 - \frac{R_*}{r}\right) u^0 + \frac{aR_*}{r} u^\varphi \quad (5.43)$$

$$\frac{\ell}{c} = -\frac{aR_*}{r} u^0 + \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 R_*}{r} \right) u^\varphi, \quad (5.44)$$

où nous avons introduit la notation

$$R_* := \frac{2GM}{c^2}. \quad (5.45)$$

R_* est en fait la même quantité que le rayon de Schwarzschild associé à la masse M , mais nous préférons utiliser la notation R_* plutôt que R_S dans le cas présent, afin d'éviter toute confusion [en particulier, le rayon de l'horizon n'est pas R_* , mais $R_{\mathcal{H}} = R_*(1 + \sqrt{1 - \bar{a}^2})/2$]. On peut vérifier qu'à la limite $a = 0$, les Eqs. (5.43) et (5.44) se réduisent bien à (3.87) et (3.89).

5.6.2 Effet Lense-Thirring

La formule (5.44) permet de mettre en évidence un effet classique de la relativité générale : *l'effet Lense-Thirring*. Considérons en effet une particule matérielle lâchée sans vitesse initiale depuis l'infini. Loin du trou noir, elle va avoir une direction purement radiale, si bien que son moment cinétique est nul :

$$\ell = 0. \quad (5.46)$$

Comme ℓ est conservé le long de la géodésique suivie par la particule, on déduit de (5.44) qu'en tout point de la trajectoire

$$\frac{aR_*}{r} u^0 = \left(r^2 + a^2 + \frac{a^2 R_*}{r} \right) u^\varphi. \quad (5.47)$$

Par le même argument que celui présenté au § 3.5.3, la vitesse angulaire de la particule dans la direction azimutale mesurée par un observateur au repos à l'infini est $d\varphi/dt$. Or, en introduisant le temps propre τ de la particule,

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\varphi}{d\tau} \times \frac{d\tau}{dt} = cu^\varphi \times (cu^t)^{-1} = cu^\varphi \times (u^0)^{-1}. \quad (5.48)$$

On déduit donc de (5.47) que

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} = c \frac{aR_*}{r \left[r^2 + a^2 \left(1 + \frac{R_*}{r} \right) \right]}}. \quad (5.49)$$

Loin du trou noir, on peut négliger a^2 devant r^2 et cette formule se simplifie en

$$\frac{d\varphi}{dt} \simeq c \frac{aR_*}{r^3} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (5.50)$$

En exprimant a en fonction du moment cinétique J via (5.26), il vient

$$\boxed{\frac{d\varphi}{dt} \simeq \frac{2GJ}{c^2 r^3}} \quad (r \rightarrow \infty). \quad (5.51)$$

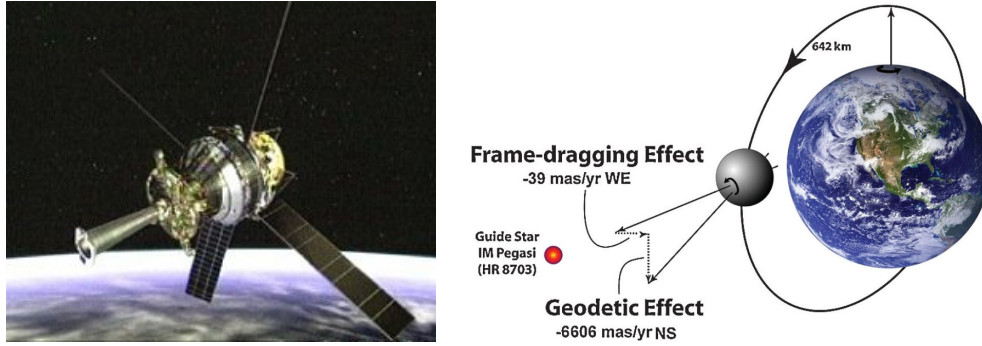


FIGURE 5.5 – Satellite Gravity Probe B lancé en 2004 pour tester l'effet Lense-Thirring (5.51) engendré par la rotation de la Terre (source : Stanford University et [52]).

La formule (5.49) ou (5.51) signifie qu'une particule en chute radiale vers le trou noir acquiert un mouvement suivant φ ; autrement dit sa trajectoire ne peut rester purement radiale. Elle a tendance à s'enrouler dans le sens de rotation du trou noir. C'est l'*effet Lense-Thirring*, encore appelé *effet gravito-magnétique* ou *entraînement des référentiels inertiels*. Le terme *gravito-magnétique* vient de ce que le mouvement de la particule dans le champ gravitationnel du trou noir en rotation peut être perçu comme obéissant à une « force » du même type que la force de Lorentz $q\vec{v} \wedge \vec{B}$, en plus de la « force » gravitationnelle centripète, analogue à la force électrostatique $q\vec{E}$. De son côté, la dénomination *entraînement des référentiels inertiels* fait référence au fait que la particule est en chute libre, si bien qu'on ne perçoit pas d'accélération due à la gravitation dans son référentiel local. Ce dernier peut donc être considéré comme un référentiel (local) inertiel. On peut montrer que l'effet Lense-Thirring se traduit également par la précession par rapport à l'infini d'un gyroscope d'un observateur localement inertiel.

Bien que nous l'ayons établie dans le cas spécifique du trou noir de Kerr, la formule asymptotique (5.51) est en fait valable pour tous les corps en rotation⁷. En particulier, pour la Terre, on obtient la valeur numérique suivante

$$\frac{d\varphi}{dt} = 0.22'' \text{an}^{-1} \left(\frac{R_{\oplus}}{r} \right)^3. \quad (5.52)$$

Cette valeur minuscule peut être mise en évidence en mesurant la précession d'un gyroscope en orbite terrestre par rapport à une étoile lointaine. C'était le but de l'expérience *Gravity Probe B (GP-B)* de la NASA et de l'Université de Stanford, qui a été satellisée en 2004 [Fig. 5.5]. La phase d'acquisition des données a duré 16 mois; leur qualité s'est avérée beaucoup moins bonne qu'initialement escompté en raison de bruits d'origine électrostatique. En mai 2011, l'équipe de GP-B a annoncé un résultat compatible avec l'effet Lense-Thirring prédit par la relativité générale avec une précision de l'ordre de 20 % [52].

Dans le cas du trou noir de Kerr, si on applique la formule (5.49) en $r = r_{\mathcal{H}}$ et que

7. Rappelons cependant que la métrique de Kerr n'est pas la métrique externe d'un corps quelconque en rotation, mais seulement celle d'un trou noir; par opposition avec la métrique de Schwarzschild, qui est la métrique externe de tous les corps à symétrie sphérique et sans rotation.

l'on compare avec (5.31), on constate que

$$\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{r=r_{\mathcal{H}}} = \Omega_{\mathcal{H}}. \quad (5.53)$$

Ainsi, lorsqu'elle atteint l'horizon des événements, la particule vue de l'infini a la même vitesse de rotation que les générateurs lumière de l'horizon.

5.6.3 Orbites circulaires dans l'espace-temps de Kerr

Reprenons l'analyse du mouvement d'une particule matérielle dans l'espace-temps de Kerr à partir des Eqs. (5.43)-(5.44). Il est facile de résoudre le système (5.43)-(5.44) en u^0 et u^φ ; on obtient

$$u^0 = \frac{1}{\Delta} \left\{ \left[r^2 + a^2 \left(1 + \frac{R_*}{r} \right) \right] \frac{\varepsilon}{c^2} - \frac{aR_*}{r} \frac{\ell}{c} \right\} \quad (5.54)$$

$$u^\varphi = \frac{1}{\Delta} \left[\frac{aR_*}{r} \frac{\varepsilon}{c^2} + \left(1 - \frac{R_*}{r} \right) \frac{\ell}{c} \right], \quad (5.55)$$

où $\Delta = r^2 (1 - R_*/r) + a^2$ [Eq. (5.25)]. On poursuit ensuite comme au § 3.5.2 pour la métrique de Schwarzschild, c'est-à-dire que l'on utilise la normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ de la 4-vitesse pour déterminer u^r :

$$g_{00}(u^0)^2 + 2g_{0\varphi}u^0u^\varphi + g_{rr}(u^r)^2 + g_{\theta\theta}(u^\theta)^2 + g_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = -1. \quad (5.56)$$

En reportant les valeurs (5.54), (5.55), (5.40) et (5.24) pour respectivement u^0 , u^φ , u^θ et $g_{\alpha\beta}$, il vient, après quelques simplifications et en écrivant $u^r = c^{-1}dr/d\tau$,

$$\boxed{\frac{1}{2} \left(\frac{dr}{d\tau} \right)^2 + V_{\text{eff}}(r) = \frac{\varepsilon^2 - c^4}{2c^2}}, \quad (5.57)$$

avec le potentiel effectif

$$\boxed{V_{\text{eff}}(r) := -\frac{GM}{r} + \frac{\ell^2 - a^2(\varepsilon^2/c^2 - c^2)}{2r^2} - \frac{GM}{c^2r^3} \left(\ell - \frac{a\varepsilon}{c} \right)^2}. \quad (5.58)$$

On retombe donc dans le même cas que celui traité au § 3.5, à savoir un mouvement unidimensionnel dans un puits de potentiel. La seule différence est que $V_{\text{eff}}(r)$ dépend désormais de ε , en plus de ℓ . En cherchant les minima de $V_{\text{eff}}(r)$, on obtient les orbites circulaires. Tout comme pour le cas de la métrique de Schwarzschild, il existe une dernière orbite stable (ISCO), en deçà de laquelle les orbites sont instables. Pour un trou noir de Kerr extrême la coordonnée r de cette orbite vaut

$$r_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 1) = \frac{GM}{c^2} = r_{\mathcal{H}}. \quad (5.59)$$

L'ISCO atteint alors l'horizon des événements. Rappelons que pour un trou noir de Schwarzschild, ce n'est jamais le cas, puisque [cf. (3.126)] :

$$r_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 0) = \frac{6GM}{c^2} = 3r_{\mathcal{H}}. \quad (5.60)$$

L'énergie par unité de masse d'une particule à l'ISCO dans le cas $\bar{a} = 1$ (Kerr extrême) est

$$\varepsilon_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 1) = \frac{c^2}{\sqrt{3}}. \quad (5.61)$$

On en déduit que l'énergie de liaison de la particule est

$$E_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 1) = \varepsilon_{\text{ISCO}} m - mc^2 = - \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) mc^2. \quad (5.62)$$

Cela signifie que l'accrétion sur un trou noir de Kerr extrême peut libérer jusqu'à $1 - 1/\sqrt{3} \simeq 42\%$ de l'énergie de masse d'une particule. Dans le cas d'un trou noir de Schwarzschild, la valeur correspondante est obtenue en reportant $r = 3R_{\text{S}}$ et $\bar{\ell} = \bar{\ell}_{\text{crit}} = \sqrt{3}$ dans (3.114) :

$$\varepsilon_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 0) = \frac{2\sqrt{2}}{3} c^2, \quad (5.63)$$

d'où l'énergie de liaison

$$E_{\text{ISCO}}(\bar{a} = 0) = - \left(1 - \frac{2\sqrt{2}}{3}\right) mc^2. \quad (5.64)$$

L'accrétion sur un trou noir de Schwarzschild ne libère donc qu'une fraction égale à $1 - 2\sqrt{2}/3 \simeq 5.7\%$ de l'énergie de masse, soit 7 fois moins que pour un trou noir de Kerr extrême.

En conclusion, l'accrétion sur un trou noir en rotation rapide libère une énergie maximale

$$\boxed{\max \Delta E = 0.42 mc^2}. \quad (5.65)$$

Il s'agit du mécanisme de production d'énergie le plus efficace dans l'Univers, loin devant les réactions thermonucléaires, qui ne libèrent pas plus de 0.7% de l'énergie de masse. Il n'est donc pas étonnant de retrouver les trous noirs au cœur des sources les plus énergétiques de l'univers (quasars, noyaux actifs de galaxies) [48].

5.6.4 Processus d'extraction d'énergie de Penrose

Il est possible d'extraire de l'énergie de rotation d'un trou noir de Kerr, de la manière suivante : considérons une capsule qu'on lâche depuis l'infini vers un trou noir de Kerr en rotation. Lorsque elle est entrée dans l'ergorégion décrite au § 5.5.4, elle se scinde en deux et largue une partie de sa masse dans le trou noir (cf. Fig. 5.6). Supposons que la trajectoire initiale ait été choisie de manière à ce que la capsule puisse ensuite repartir vers l'infini, toujours en suivant une géodésique. Cela est possible car l'ergorégion est située

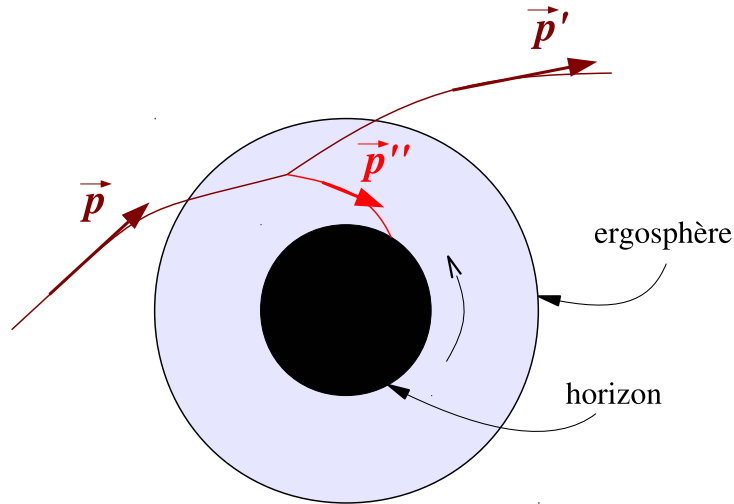


FIGURE 5.6 – Processus de Penrose pour extraire de l'énergie d'un trou noir en rotation.

en dehors de l'horizon. En notant \vec{p} (resp. \vec{p}') la 4-impulsion de la capsule le long de sa ligne d'univers, avant (resp. après) le largage et \vec{p}'' la 4-impulsion de la partie qui tombe dans le trou noir, la conservation de l'énergie-impulsion implique qu'au point de largage

$$\vec{p} = \vec{p}' + \vec{p}'' . \quad (5.66)$$

L'énergie de la capsule mesurée à l'infini avant son départ est donnée par (5.38) :

$$E = -c \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} , \quad (5.67)$$

et celle mesurée à son retour est

$$E' = -c \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}' . \quad (5.68)$$

On a donc

$$\Delta E = E' - E = c \vec{\xi}_{(0)} \cdot (\vec{p} - \vec{p}') . \quad (5.69)$$

Les quantités E et E' étant conservées le long des géodésiques, on peut évaluer $E' - E$ au point de largage, via (5.66) :

$$\Delta E = c \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}'' . \quad (5.70)$$

Si le largage avait eu lieu en dehors de l'ergorégion, $\vec{\xi}_{(0)}$ et \vec{p}'' seraient deux vecteurs de genre temps dirigés vers le futur et leur produit scalaire serait forcément négatif, de sorte que $\Delta E < 0$: la capsule posséderait moins d'énergie au retour qu'à l'arrivée. Mais dans l'ergorégion, le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$ est du genre espace, de sorte que, pour certaines configurations, on peut avoir $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}'' > 0$, et donc

$$\Delta E > 0 . \quad (5.71)$$

Ce mécanisme de gain d'énergie est appelé *processus de Penrose*. On peut montrer que l'énergie acquise est prélevée sur l'énergie de rotation du trou noir.

En astrophysique des hautes énergies, on invoque un mécanisme similaire, mais basé sur l'interaction électromagnétique, pour extraire de l'énergie d'un trou noir et accélérer un jet depuis un disque d'accrétion magnétisé. Il s'agit du *mécanisme de Blandford-Znajek*, que nous ne détaillerons pas ici.

5.7 Exercices

À ce stade du cours, on peut traiter les problèmes suivants de l'Annexe B :

- le problème B.4 (*Observateur accéléré et horizon de Rindler*);
- les questions 13 à 14 du problème B.11 (*Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild*), les questions 1 à 12 relevant du Chap. 3;
- les questions 5 à 7 du problème B.13 (*Tenseur de Killing et constante de Carter*).

Chapitre 6

Ondes gravitationnelles

version 2013-2014

Sommaire

6.1 Introduction	143
6.2 Linéarisation de l'équation d'Einstein	144
6.3 Jauge de Lorenz et jauge TT	148
6.4 Effets d'une onde gravitationnelle sur la matière	154
6.5 Génération d'ondes gravitationnelles	159
6.6 Sources astrophysiques et détecteurs	165

6.1 Introduction

Les ondes gravitationnelles ont été prédites en 1916 par Albert Einstein (dans un article qui sera corrigé en 1918 [27]), comme conséquences naturelles de la relativité générale. Nous avons vu au Chap. 4 que l'espace-temps possède une dynamique propre, dictée par son contenu en matière et régie par l'équation d'Einstein. Dans ce chapitre, nous allons voir plus précisément que toute accélération de matière comprenant une composante au moins quadrupolaire engendre des perturbations de l'espace-temps qui se propagent à la vitesse de la lumière, tout comme les ondes électromagnétiques résultent de l'accélération de charges électriques. Une différence est que les ondes électromagnétiques sont des oscillations du champ électromagnétique qui se propagent *à travers* l'espace-temps alors que les ondes gravitationnelles sont des oscillations de l'espace-temps *lui-même*. En termes naïfs, ce dernier point signifie que l'écoulement du temps et la mesure des distances sont modifiés au passage d'une onde gravitationnelle, ainsi que nous le quantifierons au § 6.4. Bien entendu, l'effet est extrêmement petit, si bien que nos sens ne le perçoivent jamais. Même à l'aide de dispositifs expérimentaux, aucune onde gravitationnelle n'a pour l'instant été détectée. Nous verrons au § 6.5.3 qu'aucune expérience du type de celle de



FIGURE 6.1 – Vue aérienne du détecteur interférométrique d’ondes gravitationnelles VIRGO, situé à Cascina, près de Pise (Italie). La construction de VIRGO s’est achevée en 2003. Les cavités Fabry-Pérot de chacun des bras de 3 km ont été alignées avec succès et les premières franges d’interférence ont été obtenues en février 2004 [source : CNRS / Istituto Nazionale di Fisica Nucleare]. Après une première phase d’acquisition de données de 2007 à 2011, VIRGO est actuellement en cours d’*upgrade*, pour un redémarrage en 2015 avec une sensibilité 10 fois meilleure.

Hertz pour la mise en évidence des ondes électromagnétiques ne peut générer d’ondes gravitationnelles détectables en laboratoire. Il n’en va pas de même pour les sources astrophysiques. L’amplitude estimée de leur rayonnement gravitationnel se situe au dessus du seuil de détectabilité des détecteurs actuellement en fonctionnement, comme l’interféromètre franco-italien VIRGO (Fig. 6.1), ou en en projet, comme le détecteur spatial européen eLISA (Fig. 6.2). Ceci marque le début de l’astronomie « gravitationnelle ».

6.2 Linéarisation de l’équation d’Einstein

6.2.1 Perturbation de la métrique de Minkowski

L’équation d’Einstein (4.140) constitue, une fois écrite en composantes, un système de 10 équations aux dérivées partielles (EDP) du second ordre pour les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique. Ces équations sont non-linéaires. En champ gravitationnel faible, c’est-à-dire loin des trous noirs et des étoiles à neutrons, ou encore au voisinage des corps de faible compacité ($\Xi \ll 1$, cf. § 3.2.3), on peut toujours trouver un système de coordonnées cartésiennes $x^\alpha = (ct, x, y, z)$ telles que

$$\boxed{g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}}, \quad (6.1)$$

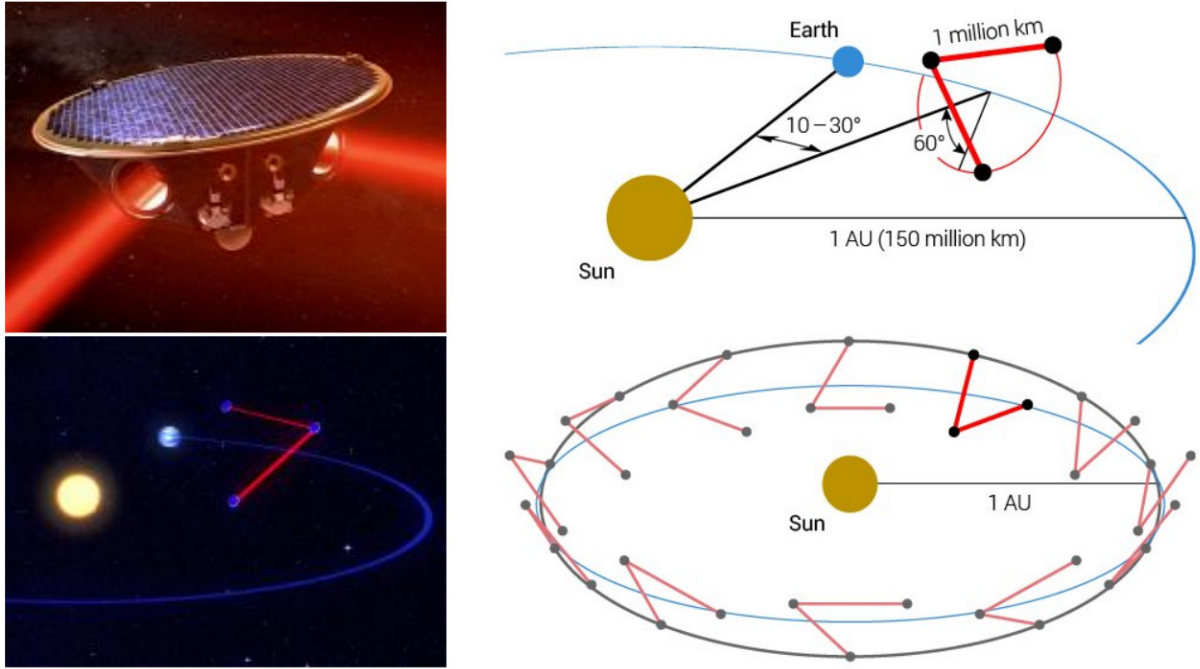


FIGURE 6.2 – Projet eLISA de détecteur spatial d'ondes gravitationnelles. La thématique d'eLISA a été sélectionnée en novembre 2013 par l'ESA pour sa future grande mission L3 (lancement vers 2030) [source : <http://www.elisascience.org/>].

où $\eta_{\alpha\beta}$ est la matrice de Minkowski définie par (2.62) :

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1) \quad (6.2)$$

et

$$|h_{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (6.3)$$

Cela revient à considérer que la métrique \mathbf{g} est celle de l'espace-temps de Minkowski plus une petite déviation \mathbf{h} . Au voisinage d'un objet non compact, de paramètre de compacité Ξ (cf. § 3.2.3) nous avons vu au § 4.5.2 que

$$|h_{\alpha\beta}| \sim \Xi. \quad (6.4)$$

Les ordres de grandeur donnés dans le tableau 3.1 montrent que la condition (6.3) est largement satisfaite au voisinage de la Terre ($\Xi \sim 10^{-10}$), du Soleil ($\Xi \sim 10^{-6}$) et même des naines blanches ($\Xi \sim 10^{-3}$). L'idée est alors de linéariser l'équation d'Einstein, c'est-à-dire de l'écrire au premier ordre en \mathbf{h} .

Auparavant, introduisons quelques notations. La matrice de Minkowski η est sa propre inverse. Nous la désignerons toutefois par $\eta^{\alpha\beta}$ lorsque nous l'utiliserons en tant qu'inverse. Ainsi, on écrit le produit matriciel $\eta^{-1} \times \eta = \text{Id}$ comme

$$\eta^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \quad (6.5)$$

mais, numériquement,

$$\eta^{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1), \quad (6.6)$$

soit la même valeur que (6.2). La matrice inverse de $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$, peut s'écrire comme $\eta^{\alpha\beta}$, plus une petite perturbation $k^{\alpha\beta}$:

$$g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} + k^{\alpha\beta}, \quad \text{avec } |k^{\alpha\beta}| \ll 1. \quad (6.7)$$

Il est facile de relier $k^{\alpha\beta}$ à $h_{\alpha\beta}$ en utilisant la définition de $g^{\alpha\beta}$ comme inverse de $g_{\alpha\beta}$:

$$\begin{aligned} g^{\alpha\mu} g_{\mu\beta} &= \delta^\alpha_\beta \\ (\eta^{\alpha\mu} + k^{\alpha\mu}) (\eta_{\mu\beta} + h_{\mu\beta}) &= \delta^\alpha_\beta \\ \eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} + k^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} + k^{\alpha\mu} h_{\mu\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Au premier ordre en $h_{\alpha\beta}$ ou $k^{\alpha\beta}$, on peut négliger le terme quadratique $k^{\alpha\mu} h_{\mu\beta}$. On obtient alors

$$k^{\alpha\mu} \eta_{\mu\beta} = -\eta^{\alpha\mu} h_{\mu\beta}, \quad (6.9)$$

c'est-à-dire, après multiplication matricielle par η^{-1} :

$$k^{\alpha\beta} = -\eta^{\alpha\mu} h_{\mu\nu} \eta^{\nu\beta} = -\eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\mu\nu}. \quad (6.10)$$

Cette expression suggère d'introduire

$$h^{\alpha\beta} := \eta^{\alpha\mu} \eta^{\beta\nu} h_{\mu\nu}. \quad (6.11)$$

Notons qu'en tant que matrice, $h^{\alpha\beta}$ est identique à $h_{\alpha\beta}$.

Remarque : Contrairement à $g^{\alpha\beta}$ qui désigne l'inverse de la matrice $g_{\alpha\beta}$, ou $\eta^{\alpha\beta}$ qui désigne l'inverse de la matrice $\eta_{\alpha\beta}$, $h^{\alpha\beta}$ n'est pas l'inverse de la matrice $h_{\alpha\beta}$. Cette dernière n'est d'ailleurs pas forcément inversible.

Au vu de (6.10), on peut écrire (6.7) sous la forme

$$\boxed{g^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\beta} - h^{\alpha\beta}}. \quad (6.12)$$

6.2.2 Équation d'Einstein linéarisée

La première étape consiste à calculer les symboles de Christoffel associés à la métrique g et aux coordonnées (x^α) via l'expression (4.51). En y portant (6.1) et (6.12) et en utilisant $\partial\eta_{\alpha\beta}/\partial x^\gamma = 0$, il vient

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} (\eta^{\alpha\nu} - h^{\alpha\nu}) \left(\frac{\partial h_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right), \quad (6.13)$$

d'où, au premier ordre en h ,

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\nu} \left(\frac{\partial h_{\nu\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\beta\nu}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^\nu} \right). \quad (6.14)$$

L'étape suivante passe par le calcul du tenseur de Ricci via l'Éq. (4.110). Comme les symboles de Christoffel obtenus ci-dessus sont du premier ordre en \mathbf{h} , on peut négliger les termes en $\Gamma \times \Gamma$ dans (4.110), qui se réduit donc à

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta}. \quad (6.15)$$

En y reportant (6.14), il vient

$$R_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}, \quad (6.16)$$

où l'on a introduit la trace de \mathbf{h} par rapport à $\boldsymbol{\eta}$:

$$\boxed{h := \eta^{\mu\nu} h_{\mu\nu}}. \quad (6.17)$$

Le scalaire de courbure R se déduit ensuite du tenseur de Ricci suivant (4.111). Au premier ordre en \mathbf{h} , cette relation devient

$$R = \eta^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (6.18)$$

Avec l'expression (6.16) de $R_{\alpha\beta}$, on obtient

$$R = \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 h_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \right). \quad (6.19)$$

On peut ensuite former le tenseur d'Einstein suivant (4.114). Au premier ordre en \mathbf{h} , il vient

$$\begin{aligned} G_{\alpha\beta} &= R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} R \eta_{\alpha\beta} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \eta^{\mu\nu} \left(-\frac{\partial^2 h_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial^2 h_{\beta\nu}}{\partial x^\alpha \partial x^\mu} + \frac{\partial^2 h_{\alpha\nu}}{\partial x^\beta \partial x^\mu} \right) - \frac{\partial^2 h}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} \right. \\ &\quad \left. + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 h}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} - \eta^{\mu\nu} \eta^{\rho\sigma} \frac{\partial^2 h_{\sigma\nu}}{\partial x^\rho \partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta} \right\}. \end{aligned} \quad (6.20)$$

On peut faire disparaître les termes en h de cette expression si l'on introduit la quantité

$$\boxed{\bar{h}_{\alpha\beta} := h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} h \eta_{\alpha\beta}}, \quad (6.21)$$

qui est appelée *perturbation métrique à trace renversée*. Puisque $\eta^{\mu\nu} \eta_{\mu\nu} = 4$, on a en effet $\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} = h - 2h = -h$. En remplaçant $h_{\alpha\beta}$ par $\bar{h}_{\alpha\beta} + (h/2)\eta_{\alpha\beta}$ dans (6.20), les dérivées secondes de h s'éliminent et il ne reste que des dérivées de $\bar{h}_{\alpha\beta}$:

$$G_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} \left(-\eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} + \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} + \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\alpha} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} \right), \quad (6.22)$$

où l'on a posé

$$\boxed{V_\alpha := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial \bar{h}_{\alpha\nu}}{\partial x^\mu} = \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\nu})}. \quad (6.23)$$

Le premier terme dans l'expression de $G_{\alpha\beta}$ ci-dessus n'est autre que l'opérateur d'Alembertien associé à la métrique de Minkowski et appliqué à $\bar{h}_{\alpha\beta}$:

$$\boxed{\square \bar{h}_{\alpha\beta} := \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu \partial x^\nu} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{h}_{\alpha\beta}}{\partial z^2}}. \quad (6.24)$$

L'équation d'Einstein (4.138) sans constante cosmologique s'écrit alors

$$\boxed{\square \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{\partial V_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial V_\beta}{\partial x^\alpha} + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial V_\mu}{\partial x^\nu} \eta_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}}. \quad (6.25)$$

Il s'agit-là de la forme générale de l'équation d'Einstein linéarisée. Si il n'y avait pas de termes en V_α , ce serait une équation d'onde pour la perturbation $h_{\alpha\beta}$ par rapport à la métrique de Minkowski. Nous allons voir qu'on peut toujours se ramener à ce cas-là par un choix de coordonnées.

6.3 Jauge de Lorenz et jauge TT

6.3.1 Changement de coordonnées infinitésimal

Remarquons que la forme (6.1)-(6.3) des composantes $g_{\alpha\beta}$ ne fixe absolument pas les coordonnées x^α sur \mathcal{E} . Considérons en effet un changement de coordonnées

$$\boxed{x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha} \quad (6.26)$$

où les quatre fonctions $\xi^\alpha = \xi^\alpha(x^\beta)$ sont telles que

$$\left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \sim |h_{\alpha\beta}|, \quad (6.27)$$

« \sim » signifiant « du même ordre de grandeur que ». En particulier

$$\left| \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta} \right| \ll 1. \quad (6.28)$$

On qualifie un tel changement de coordonnées d'*infinitésimal*. D'après la loi (2.57) de transformation des composantes du tenseur métrique, les composantes de \mathbf{g} dans les coordonnées (x'^α) sont

$$g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\beta}. \quad (6.29)$$

Or

$$x^\mu = x'^\mu - \xi^\mu \quad (6.30)$$

conduit à

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \left(\delta^\nu_\alpha - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\rho} \frac{\partial x^\rho}{\partial x'^\alpha} \right), \quad (6.31)$$

soit, au premier ordre en $\partial \xi^\mu / \partial x^\nu$,

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x'^\alpha} = \delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\nu} \delta^\nu_\alpha = \delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}. \quad (6.32)$$

En reportant cette relation dans (6.29), il vient, en ne gardant que les termes du premier ordre,

$$\begin{aligned} g'_{\alpha\beta} &= g_{\mu\nu} \left(\delta^\mu_\alpha - \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \right) \left(\delta^\nu_\beta - \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} \right) \\ &= g_{\alpha\beta} - g_{\alpha\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} - g_{\beta\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha} \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \eta_{\alpha\nu} \frac{\partial \xi^\nu}{\partial x^\beta} - \eta_{\beta\mu} \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\alpha}, \\ &= \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha}, \end{aligned} \quad (6.33)$$

où l'on a posé

$$\xi_\alpha := \eta_{\alpha\mu} \xi^\mu. \quad (6.34)$$

La relation (6.33) montre que les composantes du tenseur métrique dans les nouvelles coordonnées sont de la forme (6.1)-(6.3), à savoir

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}, \quad (6.35)$$

avec

$$\boxed{h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha}}. \quad (6.36)$$

6.3.2 Point de vue « théorie de jauge »

La relation (6.36) rappelle celle d'un changement de jauge en électromagnétisme, où le 4-potentiel A_α se transforme comme

$$A'_\alpha = A_\alpha + \frac{\partial \Psi}{\partial x^\alpha} \quad (6.37)$$

sans modifier le champ électromagnétique (\vec{E}, \vec{B}) . La différence principale est que $h_{\alpha\beta}$ est une forme bilinéaire, alors que A_α est une forme linéaire : le scalaire Ψ est ainsi remplacé par la forme linéaire ξ_α . On peut même pousser l'analogie plus loin en constatant que les composantes du tenseur de Riemann sont invariantes dans le changement de coordonnées (6.26) :

$$R'^\alpha_{\beta\mu\nu} = R^\alpha_{\beta\mu\nu}. \quad (6.38)$$

On peut l'établir pour le tenseur de Ricci en injectant (6.36) dans (6.16) :

$$R'_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta}. \quad (6.39)$$

Pour le tenseur de Riemann, il faudrait obtenir d'abord une expression analogue à (6.16). *Exercice* : le faire et en déduire (6.38).

Autrement dit, on peut considérer la gravitation linéarisée comme une théorie des champs sur l'espace-temps de Minkowski, avec un potentiel tensoriel $h_{\alpha\beta}$ dont les transformations de jauge sont de la forme (6.36). ξ_α ne s'interprète alors plus comme un changement de coordonnées mais comme le potentiel donnant le changement de jauge. Le champ physique qui dérive du potentiel $h_{\alpha\beta}$ est le tenseur de Riemann $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$, qui est invariant de jauge. Il représente le champ gravitationnel, de la même manière que les vecteurs \vec{E} et \vec{B} représentent le champ électromagnétique et dérivent du potentiel A_α qui est sujet à des transformations de jauge.

Pour cette raison, on qualifie le changement de coordonnées infinitésimal (6.26) de changement de jauge.

6.3.3 Jauge de Lorenz

On dit que le potentiel $\bar{h}_{\alpha\beta}$ satisfait à la jauge de Lorenz (on rencontre aussi parfois l'appellation jauge de Hilbert [20]) ssi

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\nu}) = 0}, \quad (6.40)$$

c'est-à-dire [cf. (6.23)]

$$V_\alpha = 0. \quad (6.41)$$

Cette dénomination se fait par analogie avec l'électromagnétisme, où la jauge de Lorenz¹ est définie par l'annulation de la divergence du 4-potentiel :

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} A_\nu) = 0. \quad (6.42)$$

Montrons que l'on peut toujours trouver un changement de coordonnées infinitésimal ξ^α qui conduise à la jauge de Lorenz. Constatant que la loi de transformation de jauge (6.36) conduit à la loi suivante pour la trace de $h_{\alpha\beta}$:

$$h' = h - 2 \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu}, \quad (6.43)$$

1. Il s'agit bien de *Lorenz*, du nom du physicien danois Ludvig Valentin Lorenz (1829-1891), et non de *Lorentz*, qui désigne le physicien hollandais Hendrik Antoon Lorentz (1853-1928). Ce dernier a donné son nom à la transformation de Lorentz, au facteur de Lorentz et à la force de Lorentz, mais pas à la jauge, qui a été publiée en 1867 par L. Lorenz (cf. par exemple Ref. [58]). De nombreux ouvrages se trompent sur ce point (dont les célèbres manuels de Jackson (2ème édition, mais pas 3ème), Landau & Lifchitz et Feynman).

on obtient facilement la loi de transformation de $\bar{h}_{\alpha\beta}$ sous l'effet du changement de coordonnées infinitésimal (6.26) :

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x^\beta} - \frac{\partial \xi_\beta}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \xi^\mu}{\partial x^\mu} \eta_{\alpha\beta}. \quad (6.44)$$

On en déduit [cf. (6.23)]

$$V'_\alpha = V_\alpha - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \xi_\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} - \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \xi_\mu}{\partial x^\alpha \partial x^\nu} + \eta^{\mu\nu} \frac{\partial^2 \xi^\rho}{\partial x^\rho \partial x^\nu} \eta_{\alpha\mu}, \quad (6.45)$$

soit puisque $\eta^{\mu\nu} \eta_{\alpha\mu} = \delta^\nu_\alpha$,

$$V'_\alpha = V_\alpha - \square \xi_\alpha. \quad (6.46)$$

Ainsi

$$V'_\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \square \xi_\alpha = V_\alpha. \quad (6.47)$$

Autrement dit, étant donné un potentiel $\bar{h}_{\alpha\beta}$ qui ne satisfait pas la jauge de Lorenz ($V_\alpha \neq 0$), il suffit de résoudre l'équation de d'Alembert $\square \xi_\alpha = V_\alpha$ pour obtenir un ξ^α qui conduit à la jauge de Lorenz.

L'intérêt de la jauge de Lorenz est de réduire l'équation d'Einstein linéarisée (6.25) à une équation d'onde :

$$\boxed{\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}}. \quad (6.48)$$

On déduit immédiatement de cette équation une propriété fondamentale des ondes gravitationnelles : puisque c'est l'opérateur d'Alembertien de la métrique de Minkowski qui apparaît dans le membre de gauche, les ondes gravitationnelles se propagent à la vitesse de la lumière par rapport à l'espace-temps plat (dont on considère qu'elles sont des perturbations).

6.3.4 Jauge TT

La jauge de Lorenz ne détermine pas complètement le système de coordonnées, ou autrement dit le potentiel $\bar{h}^{\alpha\beta}$. En effet, au vu de (6.47), étant donné un système de coordonnées (x^α) en jauge de Lorenz, tout quadruplet de fonctions infinitésimales ξ^α tel que

$$\square \xi^\alpha = 0 \quad (6.49)$$

conduit à un système de coordonnées $x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha$ qui satisfait lui aussi à la jauge de Lorenz. Pour fixer complètement la jauge, il faut donc se donner des conditions supplémentaires.

Considérons une propagation dans le vide ($T_{\alpha\beta} = 0$) et en jauge de Lorenz : les équations (6.48) et (6.40) conduisent au système

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = 0 \quad (6.50)$$

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} \bar{h}_{\alpha\nu}) = 0. \quad (6.51)$$

Cherchons une solution en onde plane progressive monochromatique : c'est-à-dire de la forme

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(x^\mu) = A_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (6.52)$$

où $A_{\alpha\beta}$ est une matrice symétrique 4×4 constante et k_α est une forme bilinéaire constante. Pour que (6.52) soit une solution de (6.50), il faut et il suffit que k_α soit du genre lumière pour la métrique de Minkowski :

$$k_\mu k^\mu = 0, \quad (6.53)$$

avec

$$k^\alpha := \eta^{\alpha\mu} k_\mu. \quad (6.54)$$

Par exemple, pour une propagation dans la direction z , $k_\alpha = (\omega/c, 0, 0, -\omega/c)$, de sorte que $k_\mu x^\mu = \omega(x^0/c - z/c) = \omega(t - z/c)$. Par ailleurs, la condition de Lorenz (6.51) est équivalente à

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu} (\eta^{\mu\nu} A_{\alpha\nu} e^{ik_\sigma x^\sigma}) = 0, \quad (6.55)$$

c'est-à-dire à

$$A_{\alpha\mu} k^\mu = 0. \quad (6.56)$$

Cela réduit de 10 à 6 le nombre de composantes indépendantes $A_{\alpha\beta}$. Effectuons, au sein de la jauge de Lorenz, un changement de coordonnées infinitésimal de manière à annuler certaines composantes $A_{\alpha\beta}$. Pour cela posons

$$\xi^\alpha = B^\alpha e^{ik_\mu x^\mu}, \quad (6.57)$$

où B^α sont quatre constantes infinitésimales (c'est-à-dire du même ordre de grandeur que $A_{\alpha\beta}$) à déterminer. Par construction, ξ^α est solution de l'équation de d'Alembert (6.49). Il génère donc un changement infinitésimal de coordonnées qui préserve la jauge de Lorenz. La valeur de la perturbation métrique résultant du changement de jauge généré par ξ^α est donnée par la formule (6.44) ; en notant $B_\alpha := \eta_{\alpha\mu} B^\mu$, il vient :

$$\begin{aligned} \bar{h}'_{\alpha\beta} &= \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{\partial}{\partial x^\beta} (B_\alpha e^{ik_\mu x^\mu}) - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (B_\beta e^{ik_\mu x^\mu}) + \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (B^\sigma e^{ik_\mu x^\mu}) \eta_{\alpha\beta} \\ &= A_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu} - iB_\alpha k_\beta e^{ik_\mu x^\mu} - iB_\beta k_\alpha e^{ik_\mu x^\mu} + B^\sigma k_\sigma e^{ik_\mu x^\mu} \eta_{\alpha\beta} \\ &= A'_{\alpha\beta} e^{ik_\mu x^\mu}, \end{aligned} \quad (6.58)$$

avec

$$A'_{\alpha\beta} = A_{\alpha\beta} - iB_\alpha k_\beta - iB_\beta k_\alpha + B^\sigma k_\sigma \eta_{\alpha\beta}. \quad (6.59)$$

Demandons les quatre conditions suivantes² $\eta^{\mu\nu} A'_{\mu\nu} = 0$ et $A'_{0i} = 0$ pour $i = 1, 2, 3$. Cela revient à avoir

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} - ik_\mu B^\mu - ik_\mu B^\mu + B^\sigma k_\sigma \times 4 = 0 \quad (6.60)$$

$$A_{0i} - ik_0 B^i + ik_i B^0 + B^\sigma k_\sigma \times 0 = 0, \quad (6.61)$$

2. Rappelons que par convention les indices latins i, j, \dots varient dans $\{1, 2, 3\}$, alors que les indices grecs α, β, \dots varient dans $\{0, 1, 2, 3\}$.

c'est-à-dire

$$2k_\mu B^\mu = -\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} \quad (6.62)$$

$$k_i B^0 - k_0 B^i = iA_{0i}. \quad (6.63)$$

Il s'agit d'un système linéaire de 4 équations pour les 4 inconnues B^α . Le déterminant de ce système est $k_0^2(k_0^2 + k_1^2 + k_2^2 + k_3^2) \neq 0$. Le système est donc toujours inversible. On en conclut qu'il existe une sous-jauge de la jauge de Lorenz où (on enlève les primes)

$$\eta^{\mu\nu} A_{\mu\nu} = 0 \quad (6.64)$$

$$A_{0i} = 0. \quad (6.65)$$

La condition de jauge de Lorenz (6.56) pour $\alpha = 0$ conduit alors à

$$A_{00}k^0 + \underbrace{A_{0i}}_0 k^i = 0, \quad (6.66)$$

c'est-à-dire (puisque $k^0 \neq 0$),

$$A_{00} = 0. \quad (6.67)$$

Ainsi nous pouvons remplacer (6.65) par

$$A_{0\alpha} = 0. \quad (6.68)$$

Retranscrites en terme de $\bar{h}_{\alpha\beta}$ via l'Éq. (6.52), les propriétés (6.64) et (6.68) deviennent

$$\bar{h} = 0 \quad (6.69)$$

$$\bar{h}_{0\alpha} = 0. \quad (6.70)$$

Comme les traces de $\bar{\mathbf{h}}$ et \mathbf{h} sont reliées par $\bar{h} = -h$, on a donc $h = 0$ et par conséquent :

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta}. \quad (6.71)$$

Ainsi (6.69) et (6.70) s'écrivent tout aussi bien

$$h = 0 \quad (6.72)$$

$$h_{0\alpha} = 0, \quad \alpha \in \{0, 1, 2, 3\} \quad (6.73)$$

Ces conditions fixent complètement la jauge, qu'on appelle alors *jauge transverse et sans trace* ou encore *jauge TT* (de l'anglais *transverse-traceless*). L'appellation *sans trace* vient évidemment de (6.72) et *transverse* vient de ce que $h_{\alpha\beta}$ est transverse à la direction $\vec{\partial}_t$ [Éq. (6.73)].

La jauge TT épuise tous les degrés de liberté possibles dans le choix du potentiel $\bar{h}_{\alpha\beta}$. $\bar{h}_{\alpha\beta}$ étant une matrice 4×4 symétrique, on a au départ 10 degrés de liberté. La condition de jauge de Lorenz (6.40), qui a 4 composantes, réduit ce nombre à 6. Ensuite les 4 conditions (6.64)-(6.65) le réduisent à 2. Ce sont les 2 degrés de liberté fondamentaux du champ gravitationnel. On peut exhiber ces deux degrés de liberté en choisissant les

coordonnées TT (ct, x, y, z) de manière à ce que la propagation s'effectue suivant l'axe des z : ainsi $k_\alpha = (\omega/c, 0, 0, -\omega/c)$ et la condition de jauge de Lorenz (6.56) devient

$$A_{\alpha 0}\omega - A_{\alpha z}\omega = 0. \quad (6.74)$$

Tenant compte de $A_{\alpha 0} = 0$ en jauge TT [Éq. (6.68)], on en déduit immédiatement

$$A_{z\alpha} = 0. \quad (6.75)$$

Ainsi les seules composantes non nulles de A sont A_{xx} , A_{xy} et A_{yy} . La condition de jauge TT (6.64) impose alors $A_{xx} + A_{yy} = 0$. En notant $A_{xx} = a_+$ et $A_{xy} = a_\times$, on en déduit que $h_{\alpha\beta}$ a la forme suivante :

$$h_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+(t - z/c) & h_\times(t - z/c) & 0 \\ 0 & h_\times(t - z/c) & -h_+(t - z/c) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (6.76)$$

avec

$$h_+(t - z/c) := a_+ e^{i\omega(t - z/c)} \quad (6.77)$$

$$h_\times(t - z/c) := a_\times e^{i\omega(t - z/c)}. \quad (6.78)$$

Les quantités h_+ et h_\times sont appelées les deux modes de polarisation de l'onde gravitationnelle.

6.4 Effets d'une onde gravitationnelle sur la matière

6.4.1 Équation du mouvement en coordonnées TT

Considérons une onde gravitationnelle plane monochromatique (fréquence ω) se déplaçant le long de l'axe des z . Plaçons-nous en jauge TT. La perturbation métrique vérifie alors (6.72)-(6.73), si bien que dans les coordonnées TT $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$, le tenseur métrique \mathbf{g} a pour composantes

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}}) dx^i dx^j, \quad (6.79)$$

où nous avons introduit le suffixe TT sur la perturbation métrique pour souligner que cette expression utilise la propriété (6.73) de la jauge TT.

Considérons une particule A qui n'est soumise à aucune autre interaction que l'interaction gravitationnelle. Sa ligne d'univers est donc une géodésique de la métrique (6.79). Soit

$$x^\alpha = X_A^\alpha(\tau) \quad (6.80)$$

l'équation de cette géodésique par rapport aux coordonnées TT, paramétrée par le temps propre τ de la particule. Supposons qu'en l'absence d'onde gravitationnelle, la particule

soit immobile à l'origine du système de coordonnées (x, y, z) . La ligne d'univers est alors la droite de l'espace-temps de Minkowski définie par

$$X_A^0(\tau) = c\tau \quad \text{et} \quad X_A^i(\tau) = 0. \quad (6.81)$$

En présence de l'onde gravitationnelle, les quatre fonctions $X_A^\alpha(\tau)$ obéissent à l'équation des géodésiques (2.132) :

$$\frac{d^2 X_A^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dX_A^\mu}{d\tau} \frac{dX_A^\nu}{d\tau} = 0. \quad (6.82)$$

Les symboles de Christoffel sont donnés par la formule (6.14), que l'on peut réécrire comme

$$\begin{cases} \Gamma^0_{\beta\gamma} = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{0\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\beta 0}}{\partial x^\gamma} - \frac{1}{c} \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial t} \right) \\ \Gamma^i_{\beta\gamma} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{i\gamma}}{\partial x^\beta} + \frac{\partial h_{\beta i}}{\partial x^\gamma} - \frac{\partial h_{\beta\gamma}}{\partial x^i} \right). \end{cases} \quad (6.83)$$

Pour la perturbation métrique en jauge TT, la propriété (6.73) conduit à

$$\Gamma^0_{0\alpha} = 0 \quad (6.84)$$

$$\Gamma^0_{ij} = \frac{1}{2c} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t} \quad (6.85)$$

$$\Gamma^i_{00} = 0 \quad (6.86)$$

$$\Gamma^i_{0j} = \frac{1}{2c} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t} \quad (6.87)$$

$$\Gamma^i_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial h_{ik}^{\text{TT}}}{\partial x^j} + \frac{\partial h_{ji}^{\text{TT}}}{\partial x^k} - \frac{\partial h_{jk}^{\text{TT}}}{\partial x^i} \right). \quad (6.88)$$

La composante $\alpha = i$ de (6.82) est alors

$$\frac{d^2 X_A^i}{d\tau^2} + \frac{1}{c} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial t} \frac{dX_A^0}{d\tau} \frac{dX_A^j}{d\tau} + \Gamma^i_{jk} \frac{dX_A^j}{d\tau} \frac{dX_A^k}{d\tau} = 0. \quad (6.89)$$

Au vu de (6.81), $X_A^i(\tau)$ est un terme du premier ordre dans la perturbation métrique, ainsi que $\partial h_{ij}^{\text{TT}}/\partial t$ et Γ^i_{jk} [Éq. (6.88)]. L'ordre des termes de l'équation ci-dessus est donc

$$O(1) + O(1) \times O(1) \times O(1) + O(1) \times O(1) \times O(1) = 0. \quad (6.90)$$

En se limitant au premier ordre, il ne reste que le premier terme :

$$\frac{d^2 X_A^i}{d\tau^2} = 0. \quad (6.91)$$

Étant données les conditions initiales à l'instant $\tau = 0$ avant l'arrivée de l'onde gravitationnelle, $X_A^i(0) = 0$ et $dX_A^i/d\tau = 0$, on en déduit

$$\boxed{X_A^i(\tau) = 0}. \quad (6.92)$$

Autrement dit, la particule reste au point de coordonnées $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. Il s'agit-là d'une propriété remarquable des coordonnées TT : les particules ne « bougent » pas dans ces coordonnées lors du passage d'une onde gravitationnelle. Bien entendu, il s'agit d'un pur effet de coordonnées, sans signification physique. Comme nous allons le voir les distances mesurées physiquement varient elles bel et bien lors du passage de l'onde.

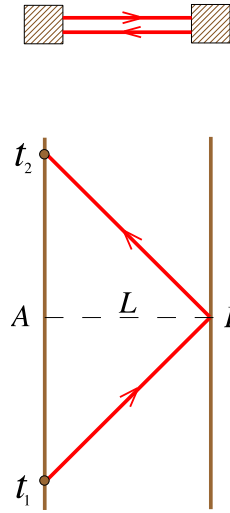


FIGURE 6.3 – Diagramme d'espace (en haut) et d'espace-temps (en bas) illustrant le principe de la mesure de la distance L entre deux masses ponctuelles par la méthode « radar ».

6.4.2 Variation des distances

Un effet mesurable du passage d'une onde gravitationnelle est la variation de distance entre deux masses d'épreuve en chute libre (c'est-à-dire soumises aux seuls effets de la gravitation). Comme toujours en relativité, il faut convenir de ce que l'on entend par *distance*. Donnons la définition opérationnelle suivante : associons à la première masse un observateur \mathcal{O} . Ce dernier chronomètre le temps d'aller-retour d'un flash lumineux qu'il émet en direction de la deuxième masse au temps propre t_1 (cf. Fig. 6.3). Le flash est réfléchi par la deuxième masse et est capté par l'observateur au temps propre t_2 . La distance L est alors définie par

$$L = \frac{c}{2}(t_2 - t_1). \quad (6.93)$$

En plus d'être une quantité déterminable physiquement, L correspond à la distance entre les points A et B de la Fig. 6.3 telle que donnée par le tenseur métrique \mathbf{g} , à condition que les deux masses soient infiniment proches. En effet en reprenant l'analyse et les notations du § 2.5.2 (comparer la Fig. 2.16 et la Fig. 6.3), on a

$$\begin{aligned} \underbrace{g(\overrightarrow{A_1 B}, \overrightarrow{A_1 B})}_0 &= g(\overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A_1 A} + \overrightarrow{AB}) \\ 0 &= g(\overrightarrow{A_1 A}, \overrightarrow{A_1 A}) + 2 \underbrace{g(\overrightarrow{A_1 A}, \overrightarrow{AB})}_0 + g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}) \\ 0 &= - \left[\frac{c}{2}(t_2 - t_1) \right]^2 + g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB}). \end{aligned} \quad (6.94)$$

En comparant avec (6.93), on constate que, comme annoncé,

$$L = \sqrt{g(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB})}. \quad (6.95)$$

Pour calculer la variation de L au passage d'une onde gravitationnelle, introduisons un système de coordonnées TT (ct, x, y, z) , telle que la position de l'observateur \mathcal{O} assis sur la première masse soit $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ et que la position de la deuxième masse soit $(x, y, z) = (x_B, y_B, z_B)$. Ainsi que nous l'avons vu au § 6.4.1, l'avantage de la jauge TT est que ces coordonnées restent constantes au cours du mouvement. La distance L peut alors être facilement calculée en partant de la formule (6.95) et en utilisant les composantes (6.79) de \mathbf{g} . En supposant les deux masses infiniment proches, il vient

$$\begin{aligned} L^2 &= g_{\mu\nu}(x_B^\mu - x_A^\mu)(x_B^\nu - x_A^\nu) \\ &= g_{ij}(x_B^i - x_A^i)(x_B^j - x_A^j) \\ &= g_{ij}x_B^i x_B^j \\ &= (\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}})x_B^i x_B^j, \end{aligned} \quad (6.96)$$

où l'on a utilisé $x_A^0 = ct = x_B^0$ pour avoir la deuxième ligne et $x_A^i = 0$ pour la troisième. Soit \vec{n} le vecteur spatial unitaire (pour la métrique de fond, $\boldsymbol{\eta}$) joignant A à B . On a alors

$$x_B^i = L_0 n^i, \quad (6.97)$$

avec $L_0 = \delta_{ij}x_B^i x_B^j$, si bien que (6.96) devient

$$L = [L_0^2(\delta_{ij} + h_{ij}^{\text{TT}})n^i n^j]^{1/2} = L_0 (1 + h_{ij}^{\text{TT}} n^i n^j)^{1/2}. \quad (6.98)$$

Au premier ordre en \mathbf{h} , il vient

$$L = L_0 \left(1 + \frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}} n^i n^j \right). \quad (6.99)$$

La variation de longueur $\delta L := L - L_0$ par rapport à la situation où l'onde gravitationnelle est absente ($L = L_0$) est donc

$$\boxed{\frac{\delta L}{L} = \frac{1}{2} h_{ij}^{\text{TT}} n^i n^j}. \quad (6.100)$$

Pour visualiser la déformation d'une assemblée de particules au passage d'une onde gravitationnelle, introduisons au voisinage de la ligne d'univers de l'observateur \mathcal{O} un système de coordonnées « physiques » (\hat{x}^α) (par opposition aux coordonnées TT qui sont purement mathématiques) comme suit : \hat{x}^0/c est le temps propre de \mathcal{O} et (\hat{x}^i) sont les longueurs physiques (au sens ci-dessus) suivant trois axes mutuellement orthogonaux de l'espace local de repos de \mathcal{O} , ces trois axes pointant dans des directions fixes par rapport aux gyroscopes dont dispose \mathcal{O} (pour s'assurer que le repère n'est pas en rotation). Les coordonnées ainsi définies sont telles que $\hat{x}^i = 0$ le long de la ligne d'univers (géodésique) de \mathcal{O} et qu'au voisinage de cette dernière les composantes du tenseur métrique ont une forme minkowskienne à des termes du second ordre en \hat{x}^i près :

$$\hat{g}_{\alpha\beta} d\hat{x}^\alpha d\hat{x}^\beta = -(d\hat{x}^0)^2 + \delta_{ij} d\hat{x}^i d\hat{x}^j + O(|\hat{x}^i|^2)_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta. \quad (6.101)$$

Les coordonnées (\hat{x}^i) sont appelées *coordonnées de Fermi* associées à l'observateur \mathcal{O} .

Remarque : Que la déviation à la métrique de Minkowski commence au second ordre en \hat{x}^i est nécessaire pour tenir compte de l'onde gravitationnelle : si elle commençait à un ordre supérieur, le tenseur de Riemann calculé à partir de (6.101) serait nul le long de la ligne d'univers de \mathcal{O} . Cela correspondrait à un espace-temps exactement plat et donc sans onde gravitationnelle.

Il est facile de voir en comparant (6.79) et (6.101) que le passage des coordonnées TT (x^α) aux coordonnées de Fermi (\hat{x}^i) s'effectue suivant la transformation suivante :

$$\hat{x}^0 = x^0 \quad (6.102)$$

$$\hat{x}^i = x^i + \frac{1}{2}h_{ij}^{TT}(t, 0)x^j, \quad (6.103)$$

où $h_{ij}^{TT}(t, 0)$ désigne la valeur du champ h_{ij}^{TT} en $(x^\alpha) = (ct, 0, 0, 0)$, c'est-à-dire le long de la ligne d'univers de \mathcal{O} . On effectue en effet dans les calculs qui suivent l'hypothèse d'une longueur d'onde grande devant la taille du système de particules étudié :

$$h_{ij}^{TT}(t, x^k) \simeq h_{ij}^{TT}(t, 0) + \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} x^k + \dots, \quad (6.104)$$

avec

$$\left| \frac{\partial h_{ij}^{TT}}{\partial x^k} x^k \right| \sim |\omega h_{ij}^{TT} x^k| \sim \left| 2\pi h_{ij}^{TT} \frac{x^k}{\lambda} \right| \ll |h_{ij}^{TT}| \quad \text{si} \quad \frac{|x^k|}{\lambda} \ll 1. \quad (6.105)$$

Exercice : justifier le changement de variable (6.102)-(6.103) en appliquant la loi de transformation des composantes d'un tenseur

$$g_{\alpha\beta} = \hat{g}_{\mu\nu} \frac{\partial \hat{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial \hat{x}^\nu}{\partial x^\beta}$$

aux composantes $\hat{g}_{\mu\nu}$ données par (6.101) ($\hat{g}_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$) et en comparant le résultat avec (6.79).

Considérons une particule au voisinage de \mathcal{O} et désignons par (x_0^i) ses coordonnées TT spatiales. Puisque ces dernières restent constantes lors du passage de l'onde gravitationnelle, l'équation du mouvement de la particule dans le référentiel de \mathcal{O} basé sur les coordonnées de Fermi est donnée en reportant ces constantes dans (6.103) :

$$\boxed{\hat{x}^i(t) = x_0^i + \frac{1}{2}h_{ij}^{TT}(t, 0)x_0^j}. \quad (6.106)$$

Appliquons cette formule à une onde plane monochromatique se propageant dans la direction z : h_{ij}^{TT} est alors donné par (6.76) et on obtient

$$\hat{x}(t) = x_0 + \frac{1}{2}(a_+ x_0 + a_\times y_0) e^{i\omega t} \quad (6.107)$$

$$\hat{y}(t) = y_0 + \frac{1}{2}(a_\times x_0 - a_+ y_0) e^{i\omega t} \quad (6.108)$$

$$\hat{z}(t) = z_0. \quad (6.109)$$

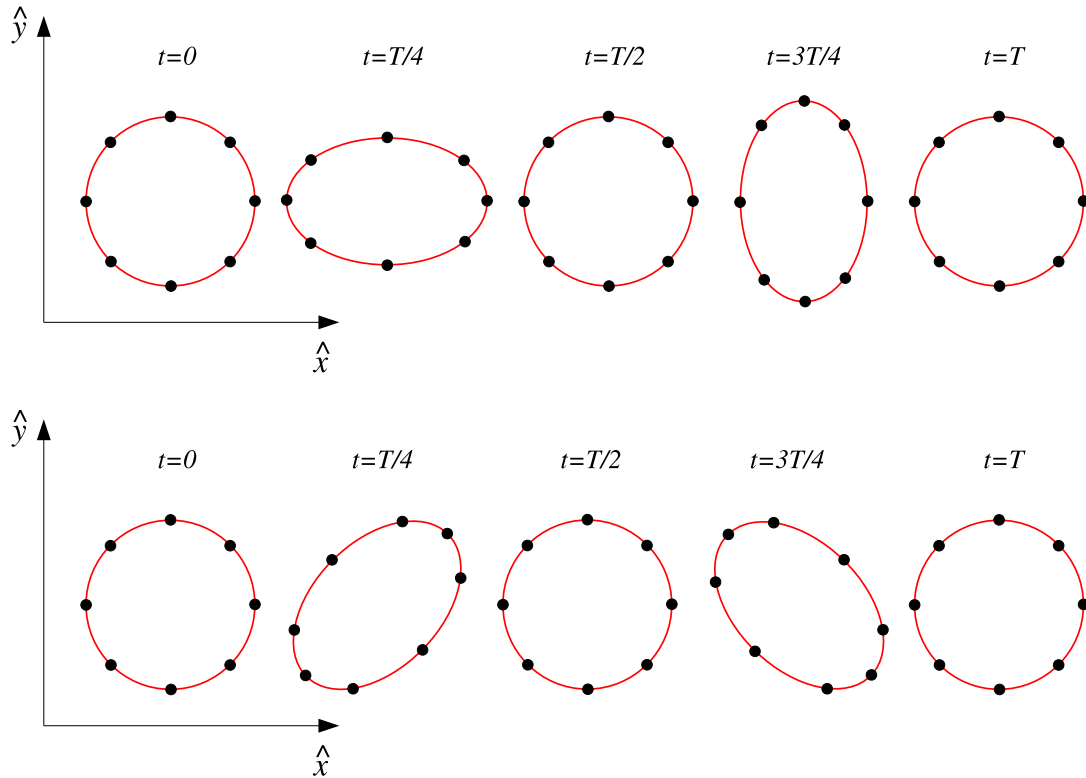


FIGURE 6.4 – Déformation d'un cercle de masses ponctuelles par une onde gravitationnelle plane monochromatique (période T) se propageant dans la direction perpendiculaire au plan du cercle. Figure du haut : mode de polarisation h_+ , figure du bas : mode de polarisation h_\times .

On peut alors représenter la déformation d'un cercle de particules dans le plan $z = 0$ pour chacun des deux modes h_+ et h_\times : le résultat est montré sur la Fig. 6.4. On comprend d'après cette figure pourquoi un interféromètre de Michelson, tel que VIRGO (Fig. 6.1), sera sensible à une onde gravitationnelle : les longueurs des deux bras orthogonaux vont varier de manière différente, ce qui va provoquer une modification des franges d'interférence.

6.5 Génération d'ondes gravitationnelles

6.5.1 Formule du quadrupôle

Pour étudier la génération des ondes gravitationnelles, il faut revenir à l'équation d'Einstein linéarisée avec source. En se plaçant en jauge de Lorenz, il s'agit de l'équation (6.48) :

$$\square \bar{h}_{\alpha\beta} = -\frac{16\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}. \quad (6.110)$$

Remarquons que puisque l'on considère la version linéarisée de l'équation d'Einstein, ce qui suit ne s'applique qu'à des sources faiblement auto-gravitantes (facteur de compacité

$\Xi \ll 1$, cf. Tableau 3.1).

Puisque les coordonnées (ct, x, y, z) de la jauge de Lorenz sont de type cartésien, chaque composante de l'équation (6.110) est une équation d'onde scalaire ordinaire. Sa solution générale est donnée par la formule classique du potentiel retardé :

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4} \int \frac{T_{\alpha\beta} \left(t - \frac{1}{c} |\vec{x} - \vec{x}'|, \vec{x}' \right)}{|\vec{x} - \vec{x}'|} d^3 \vec{x}', \quad (6.111)$$

où l'on a introduit les notations $\vec{x} = (x^1, x^2, x^3)$ et $|\vec{x}| = \sqrt{\delta_{ij} x^i x^j}$. Posons

$$r := |\vec{x}| = \sqrt{\delta_{ij} x^i x^j} \quad \text{et} \quad \vec{n} := \frac{\vec{x}}{r}. \quad (6.112)$$

À grande distance de la source, $r \gg |\vec{x}'|$, si bien que

$$\begin{aligned} |\vec{x} - \vec{x}'| &= r \left| \vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right| = r \left[\left(\vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right) \cdot \left(\vec{n} - \frac{\vec{x}'}{r} \right) \right]^{1/2} = r \left[1 - 2 \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} + \left(\frac{\vec{x}'}{r} \right)^2 \right]^{1/2} \\ &\simeq r \left(1 - \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{r} \right). \end{aligned} \quad (6.113)$$

On peut alors écrire (6.111) comme

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\alpha\beta} \left(t - \frac{r}{c} + \frac{\vec{n} \cdot \vec{x}'}{c}, \vec{x}' \right) d^3 \vec{x}'. \quad (6.114)$$

Supposons à présent que la source est *lentement variable*, c'est-à-dire que $T_{\alpha\beta}(t, \vec{x}')$ évolue peu pendant le temps mis par la lumière pour traverser la source. Autrement dit $\omega |\vec{x}'|/c \ll 1$ pour toute fréquence ω caractéristique des mouvements au sein de la source. On peut alors négliger le terme en $\vec{n} \cdot \vec{x}'/c$ dans (6.114), qui devient :

$$\bar{h}_{\alpha\beta}(t, \vec{x}) = \frac{4G}{c^4 r} \int T_{\alpha\beta} \left(t - \frac{r}{c}, \vec{x}' \right) d^3 \vec{x}'. \quad (6.115)$$

Pour aller plus loin, utilisons l'équation de conservation de l'énergie-impulsion (4.139) :

$$\nabla^\mu T_{\alpha\mu} = 0. \quad (6.116)$$

À l'ordre linéaire où nous nous plaçons, cette formule s'écrit

$$\eta^{\mu\nu} \frac{\partial T_{\alpha\mu}}{\partial x^\nu} = 0. \quad (6.117)$$

Considérons la composante $\alpha = 0$:

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial T_{00}}{\partial t} + \frac{\partial T_{0i}}{\partial x^i} = 0 \quad (6.118)$$

et dérivons-la par rapport à t :

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 T_{0k}}{\partial x^k \partial t} = 0. \quad (6.119)$$

Or la composante $\alpha = k$ de (6.117) donne

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial T_{k0}}{\partial t} + \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} = 0. \quad (6.120)$$

En utilisant $T_{0k} = T_{k0}$, cette relation permet de mettre (6.119) sous la forme

$$-\frac{1}{c} \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial x^k} \left(c \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} \right) = 0. \quad (6.121)$$

Multiplions cette équation par $x^i x^j$ et intégrons dans tout l'espace :

$$\begin{aligned} \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} &= \int \frac{\partial^2 T_{kl}}{\partial x^k \partial x^l} x^i x^j d^3 \vec{x} \\ &= \int \left[\frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} x^i x^j \right) - \frac{\partial T_{kl}}{\partial x^l} (\delta^i_k x^j + x^i \delta^j_k) \right] d^3 \vec{x} \\ &= - \int \left(\frac{\partial T_{il}}{\partial x^l} x^j + \frac{\partial T_{jl}}{\partial x^l} x^i \right) d^3 \vec{x} \\ &= - \int \left[\frac{\partial}{\partial x^l} (T_{il} x^j + T_{jl} x^i) - T_{il} \delta^j_l - T_{jl} \delta^i_l \right] d^3 \vec{x} \\ \frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} &= 2 \int T_{ij} d^3 \vec{x}, \end{aligned} \quad (6.122)$$

où (i) on a utilisé le théorème de Gauss-Ostrogradsky pour passer de la deuxième ligne à la troisième et de la quatrième à la cinquième, et (ii) on a annulé les intégrales de surface car la source est à support compact. Par ailleurs

$$\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2}{dt^2} \int T_{00} x^i x^j d^3 \vec{x}. \quad (6.123)$$

Dans le cas des sources faiblement relativistes que nous considérons, $T_{00} = \mathbf{T}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_0) = \epsilon \simeq \rho c^2$ où ρ est la densité de masse [cf. Éq. (4.130) avec $\Gamma \simeq 1$]. Il vient alors

$$\frac{1}{c^2} \int \frac{\partial^2 T_{00}}{\partial t^2} x^i x^j d^3 \vec{x} = \frac{d^2}{dt^2} I_{ij}(t) =: \ddot{I}_{ij}(t), \quad (6.124)$$

où

$$I_{ij}(t) := \int_{\text{source}} \rho(t, \vec{x}) x^i x^j d^3 \vec{x} \quad (6.125)$$

est le tenseur moment d'inertie de la source. Ainsi l'Éq. (6.122) s'écrit

$$\ddot{I}_{ij}(t) = 2 \int T_{ij}(t, \vec{x}') d^3 \vec{x}'. \quad (6.126)$$

On reconnaît, au temps retardé prêt, l'intégrale du membre de droite de (6.115) pour $(\alpha, \beta) = (i, j)$. On peut donc conclure que

$$\bar{h}_{ij}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \ddot{I}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (6.127)$$

Pour obtenir la perturbation métrique dans la jauge TT, il suffit de prendre la partie transverse et sans trace de ce résultat. Cela se fait en introduisant l'opérateur de projection transverse

$$P_{ij} = P_{ij}(\vec{x}) := \delta_{ij} - n_i n_j. \quad (6.128)$$

Il vient

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \left[P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] \ddot{I}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (6.129)$$

Plutôt que I_{ij} , faisons apparaître sa partie sans trace :

$$Q_{ij} := I_{ij} - \frac{1}{3} (\delta^{kl} I_{kl}) \delta_{ij}, \quad (6.130)$$

c'est-à-dire la quantité

$$Q_{ij}(t) = \int_{\text{source}} \rho(t, \vec{x}) \left(x^i x^j - \frac{1}{3} \vec{x} \cdot \vec{x} \delta_{ij} \right) d^3 \vec{x}. \quad (6.131)$$

$Q_{ij}(t)$ est appelé moment quadrupolaire de masse de la source. C'est une quantité observationnellement plus accessible que $I_{ij}(t)$, car elle apparaît dans le développement multipolaire du potentiel gravitationnel newtonien de la source :

$$\Phi(t, \vec{x}) = -\frac{GM}{r} + \frac{3G Q_{ij}(t) n^i n^j}{2r^3} + \dots \quad (6.132)$$

Comme

$$\left[P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] I_{ij} = \left[P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] Q_{ij}, \quad (6.133)$$

on peut mettre l'Éq. (6.129) sous sa forme finale :

$$h_{ij}^{\text{TT}}(t, \vec{x}) = \frac{2G}{c^4 r} \left[P_i^k P_j^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl} \right] \ddot{Q}_{ij} \left(t - \frac{r}{c} \right). \quad (6.134)$$

Cette formule est appelée formule du quadrupôle. Elle relie le champ de rayonnement gravitationnel à la dérivée temporelle deuxième du moment quadrupolaire retardé de la source.

6.5.2 Flux d'énergie

Les ondes gravitationnelles transportent de l'énergie et de l'impulsion ; nous admettrons sans démonstration que le tenseur énergie-impulsion (effectif) correspondant est le *tenseur d'Isaacson* :

$$T_{\alpha\beta} = \frac{1}{32\pi G} \left\langle \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\alpha} \frac{\partial h_{ij}^{\text{TT}}}{\partial x^\beta} \right\rangle, \quad (6.135)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'ondes. Cette expression n'est valable que loin de la source, là où l'espace-temps peut être assimilé à un espace plat. Le flux d'énergie F transporté par une onde gravitationnelle s'obtient en prenant la composante T_{tz} du tenseur (6.135) (z étant la direction de propagation). On obtient ainsi

$$F = \frac{c^3}{16\pi G} \langle \dot{h}_+^2 + \dot{h}_\times^2 \rangle, \quad (6.136)$$

où h_+ et h_\times sont les deux composantes indépendantes de h_{ij}^{TT} . Pour une onde monochromatique d'amplitude h et de fréquence f , la moyenne sur quelques longueurs d'ondes vaut $\langle \dot{h}_+^2 \rangle = \langle \dot{h}_\times^2 \rangle = (2\pi f)^2 h^2 / 2$, si bien que

$$F = \frac{\pi c^3}{4G} f^2 h^2. \quad (6.137)$$

Numériquement :

$$F = 0.3 \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{-21}} \right)^2 \text{ W m}^{-2}. \quad (6.138)$$

Cette formule montre qu'une onde gravitationnelle d'amplitude aussi petite que 10^{-21} transporte une quantité appréciable d'énergie. En considérant une onde gravitationnelle comme une « déformation » de l'espace-temps, on peut ainsi dire, par analogie avec la théorie de l'élasticité, que l'espace-temps est un milieu très rigide.

6.5.3 Luminosité gravitationnelle

En intégrant l'équation (6.135) sur une sphère entourant la source et en utilisant la formule du quadrupôle (6.134), on obtient la *luminosité gravitationnelle* de la source (énergie totale rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles par unité de temps) :

$$L = \frac{1}{5} \frac{G}{c^5} \langle \ddot{Q}_{ij} \ddot{Q}^{ij} \rangle, \quad (6.139)$$

où les crochets $\langle \dots \rangle$ indiquent une moyenne sur plusieurs longueurs d'ondes. La formule (6.139) est appelée *formule du quadrupôle*, tout comme la formule (6.134) pour h_{ij}^{TT} . Les deux formules ont été obtenues par Einstein en 1918 [27]. Il est intéressant de la rapprocher de la formule qui donne la puissance électromagnétique rayonnée par un dipôle électrique D_i oscillant :

$$L_{\text{e.m.}} = \frac{1}{3} \frac{\mu_0}{4\pi} \langle \ddot{D}_i \ddot{D}^i \rangle. \quad (6.140)$$

Si M est la masse de la source, R son extension spatiale, la norme Q du moment quadrupolaire est de l'ordre de $Q \sim sMR^2$ où s est un facteur d'asymétrie : $s = 0$ pour un objet à symétrie sphérique. On peut alors écrire $\ddot{Q} \sim s\omega^3MR^2$, où ω est l'inverse du temps caractéristique d'évolution de la source. La formule (6.139) donne ainsi

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4 . \quad (6.141)$$

Le facteur numérique G/c^5 est extrêmement petit, son inverse valant $c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$ W. C'est la raison pour laquelle les ondes gravitationnelles émises par une expérience en laboratoire sont virtuellement indétectables : un cylindre d'acier d'un mètre de rayon, de 20 mètres de long, pesant 490 tonnes et tournant à la limite de rupture ($\omega = 28 \text{ rad s}^{-1}$) perpendiculairement à son axe, fournit une luminosité $L = 2 \times 10^{-29}$ W! (Misner, Thorne & Wheeler 1973, § 36.3). Cependant, lorsque l'on considère des sources astrophysiques comme les astres compacts, la formule (6.141) peut conduire à des luminosités énormes. Une façon de le voir est de suivre le raisonnement de Weber (1974), qui est parti de la remarque suivante : « Ne serait-ce pas mieux si, à la place du minuscule facteur G/c^5 , on avait l'énorme facteur $c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$ W?... Eh bien, réarrangeons la formule (6.141) de manière à avoir c^5/G comme préfacteur ! » Le tour de passe-passe se réalise comme suit : ré-exprimons la masse M de l'objet en fonction de son rayon de Schwarzschild R_S [cf. Éq. (3.10)] suivant $M = c^2 R_S / (2G)$. Par ailleurs, v étant une vitesse caractéristique du mouvement de la source, on a $\omega \sim v/R \sim v/c \times c/R$. En reportant ces expressions de M et ω dans (6.141), il vient

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \frac{v^6}{c^6} \frac{c^6}{R^6} \frac{c^4 R_S^2}{4G^2} R^4 , \quad (6.142)$$

soit

$$\boxed{L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left(\frac{R_S}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6} . \quad (6.143)$$

On peut ré-exprimer cette formule en faisant intervenir le paramètre de compacité $\Xi \sim R_S/R$ introduit au Chap. 3 (cf. Éq. (3.10)) :

$$\boxed{L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \Xi^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6} . \quad (6.144)$$

Ainsi, des objets pour lesquels $s \sim 1$ (grand écart à la symétrie sphérique), $\Xi \sim 1$ (astres compacts) et $v \sim c$ (mouvement important) peuvent rayonner une puissance fantastique sous forme d'ondes gravitationnelles : $L \sim c^5/G = 3.6 \times 10^{52}$ W, soit 10^{26} fois la luminosité du Soleil dans le domaine électromagnétique ! Les conditions $\Xi \sim 1$ et $v \sim c$ caractérisent les astres compacts : rappelons en effet que, pour un trou noir $\Xi = 1$ ($R = R_S$), pour une étoile à neutrons $\Xi \sim 0.2 - 0.4$ et que la vitesse radiale de chute libre d'une particule dans un trou noir est $v = c$ lorsque la particule traverse l'horizon des événements.

6.5.4 Amplitude de l'onde gravitationnelle

En dépit de l'énorme valeur de L que l'on peut attendre pour des processus mettant en jeu des astres compacts, la perturbation métrique h mesurée sur Terre sera très faible (cf. § 6.5.2). On peut obtenir une estimation de l'amplitude $h = |h_{ij}^{\text{TT}}|$ correspondant à une énergie ΔE rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles à partir de l'expression (6.137) pour le flux F en écrivant $\Delta E = 4\pi r^2 F \tau$ où τ est le temps que dure l'émission. On obtient ainsi

$$h \sim \frac{1}{\pi} \left(\frac{GM}{c} \right)^{1/2} \frac{\varepsilon^{1/2}}{r f \tau^{1/2}}. \quad (6.145)$$

Dans cette formule, ΔE a été exprimée en terme de l'efficacité du processus d'émission gravitationnelle

$$\varepsilon := \frac{\Delta E}{Mc^2}, \quad (6.146)$$

où M est la masse initiale de l'objet émetteur. Numériquement, l'Éq. (6.145) donne

$$h \sim 2 \times 10^{-19} \left(\frac{M}{M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{1 \text{ Mpc}}{r} \right) \left(\frac{1 \text{ kHz}}{f} \right) \left(\frac{1 \text{ ms}}{\tau} \right)^{1/2} \varepsilon^{1/2}, \quad (6.147)$$

Les valeurs $f = 1 \text{ kHz}$ et $\tau = 1 \text{ ms}$ sont caractéristiques d'un processus mettant en jeu une étoile à neutrons ou un trou noir stellaire. La formule (6.147) montre que, dans un processus mettant en jeu un objet de masse solaire, même si toute l'énergie de masse était rayonnée sous forme d'ondes gravitationnelles ($\varepsilon = 1$), l'amplitude h , c'est-à-dire l'amplitude du déplacement relatif de deux masses tests [cf. Éq. (6.100)] serait inférieure à 10^{-19} pour une source extragalactique! Ce nombre résume à lui seul la gageure que constitue la détection des ondes gravitationnelles sur Terre.

6.6 Sources astrophysiques et détecteurs

Cf. le cours de Frédéric Daigne (UE thématique Th9), ainsi que le cours d'Alessandra Buonanno donné à l'École d'été des Houches en 2006 [45]. Ici nous nous contentons de présenter la courbe de sensibilité du détecteur franco-italien VIRGO (Fig. 6.5) qui vient d'achever sa 4^e campagne d'acquisition de données, à une sensibilité très proche de la sensibilité nominale, conjointement avec son alter-ego américain, LIGO. VIRGO est désormais en phase d'upgrade, afin d'améliorer sa sensibilité.

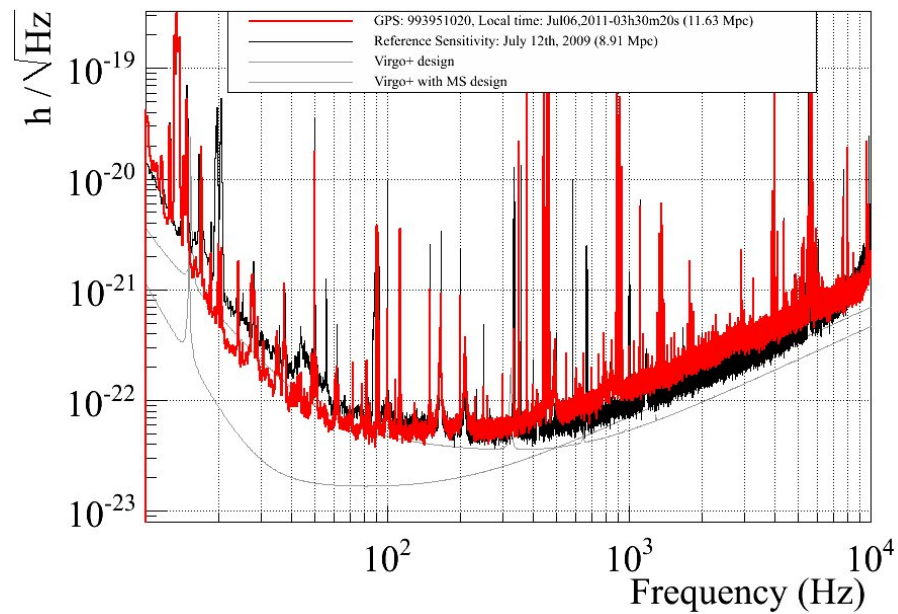


FIGURE 6.5 – Courbe de sensibilité du détecteur d’ondes gravitationnelles VIRGO (cf. Fig. 6.1) : la courbe en rouge est la sensibilité au 6 juillet 2011, celle en noir au 12 juillet 2009, la courbe en trait fin la plus haute est la sensibilité théorique nominale et la plus basse marque le gain de sensibilité escompté en utilisant des suspensions monolithiques. [source : EGO, CNRS / Istituto Nazionale di Fisica Nucleare].

Chapitre 7

Solutions cosmologiques

version 2013-2014

Sommaire

7.1 Introduction	167
7.2 Espaces maximalement symétriques	168
7.3 Espace-temps de de Sitter	174
7.4 Espace-temps anti-de Sitter (AdS)	187
7.5 Solutions de Friedmann-Lemaître	193

7.1 Introduction

Ce chapitre ne constitue pas un cours de cosmologie à proprement parler. Nous renvoyons pour cela aux cours de Simona Mei (TC1) ou Jim Bartlett (Th5), ainsi qu'aux manuels de Patrick Peter & Jean-Philippe Uzan [16] et de Francis Bernardeau [15]. Il s'agit plutôt ici de présenter des solutions classiques de l'équation d'Einstein (4.140) :

$$\mathbf{R} - \frac{1}{2}R\mathbf{g} + \Lambda\mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4}\mathbf{T} \quad (7.1)$$

qui sont d'intérêt cosmologique, même si elles ne représentent pas nécessairement notre univers. Ainsi nous commencerons par les solutions maximalement symétriques (§ 7.2, 7.3 et 7.4), dont on sait pertinemment qu'elles ne correspondent pas à l'univers réel¹. Nous poursuivrons par les solutions de Friedmann-Lemaître (§ 7.5), qui sont à la base de la cosmologie moderne.

1. Notons toutefois qu'une phase de l'univers primordial, appelée *inflation*, peut dans certains cas être décrite par l'espace-temps de de Sitter discuté au § 7.3 [16].

7.2 Espaces maximalement symétriques

Dans cette section, nous ne présumons pas que la dimension n de la variété \mathcal{E} est 4, car nous aurons besoin du cas $n = 3$ par la suite. De même, nous ne présumons pas que la signature du tenseur métrique \mathbf{g} est lorentzienne (i.e. du type $(-, +, +, +)$), afin d'autoriser des métriques riemaniennes (i.e. définies positives). Par conséquent, nous appellerons le couple $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ un *espace* tout court², car il ne s'agira pas obligatoirement d'un *espace-temps*.

7.2.1 Généralités

Un espace $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ de dimension n est dit *homogène* ssi la métrique ne change pas lorsqu'on passe d'un point à un autre. En termes techniques, cela signifie qu'étant donnés deux points quelconques M et N de la variété \mathcal{E} , il existe une isométrie qui fait passer de M à N . Une *isométrie* est une application $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ bijective, différentiable, de réciproque différentiable et telle que (le carré de) la distance $\mathbf{g}(\overrightarrow{PP'}, \overrightarrow{PP'})$ donnée par le tenseur métrique entre deux points P et P' infiniment proches est égale à la distance entre $\Phi(P)$ et $\Phi(P')$. L'ensemble des isométries de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ forme un groupe, appelé naturellement *groupe d'isométrie* de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. En terme d'action de groupe, on peut dire que $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est un espace homogène ssi son groupe d'isométrie agit transitivement.

Par ailleurs, un espace $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est dit *isotrope en un point* $P \in \mathcal{E}$ ssi étant donnés deux vecteurs quelconques en $P : \vec{v} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ et $\vec{w} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$, il existe une isométrie qui laisse P invariant et qui transforme \vec{v} en un vecteur colinéaire à \vec{w} . On peut alors dire que toutes les directions issues de P sont équivalentes (puisque l'on passe de l'une à l'autre par une isométrie).

Un espace peut être homogène sans être isotrope en aucun de ses points. Par exemple, il peut exister une direction privilégiée dans \mathcal{E} qui est la même en tout point. En dimension 2, un exemple typique est le cylindre. Par contre, si un espace est homogène et isotrope en un point, alors il est isotrope en tous ses points. On peut donc parler d'espace *homogène et isotrope*, sans préciser par rapport à quel point. Réciproquement, on peut montrer qu'un espace isotrope en tous ses points est nécessairement homogène.

Un espace $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ homogène et isotrope est *maximalement symétrique*, au sens où il possède le nombre maximal de symétries continues, ou, de manière équivalente, le nombre maximal de champs de vecteurs de Killing linéairement indépendants (cf. § 3.2.1). Si la dimension de \mathcal{E} est n , ce nombre est

$$N_{\max} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad (7.2)$$

soit $N_{\max} = 6$ pour $n = 3$ et $N_{\max} = 10$ pour $n = 4$. On retrouve ainsi la dimension 10 du groupe de Poincaré qui est le groupe de symétrie de l'espace-temps de Minkowski, ce dernier étant un exemple d'espace maximalement symétrique.

2. Le terme mathématique précis est *variété pseudo-riemannienne*.

Remarque : Nous verrons plus bas (§ 7.5) que les modèles cosmologiques les plus simples sont basés sur des espaces-temps qui ne sont que spatialement homogènes et isotropes (solutions de Friedmann-Lemaître). Ils ne sont donc pas maximalement symétriques.

On peut montrer (cf. par exemple § 3.9 de [3]) que les espaces maximalement symétriques sont ceux pour lesquels le tenseur de Riemann est de la forme

$$R^\alpha_{\beta\mu\nu} = \kappa (\delta^\alpha_\mu g_{\beta\nu} - \delta^\alpha_\nu g_{\beta\mu}), \quad (7.3)$$

où κ est une constante, qui est liée au scalaire de courbure R [cf. Eq. (4.111)] par

$$\kappa = \frac{R}{n(n-1)}. \quad (7.4)$$

Il s'agit là d'une simplification extraordinaire, si l'on se souvient que dans le cas général, le tenseur de Riemann a 20 composantes indépendantes pour $n = 4$ (cf. § 4.3.2). L'expression (7.3) montre qu'il n'a plus qu'une seule composante; de plus, elle est constante sur tout \mathcal{E} ! On qualifie un espace vérifiant (7.3) d'espace à courbure constante. Le théorème est donc

Un espace $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est maximalement symétrique si, et seulement si, il est à courbure constante.

7.2.2 Espaces maximalement symétriques de dimension 3

Les espaces maximalement symétriques de dimension 3 sont particulièrement importants pour la cosmologie. Si l'on se restreint à des métriques \mathbf{g} riemanniennes (i.e. de signature $(+, +, +)$) et à la topologie la plus simple qui soit pour \mathcal{E} , à savoir une variété simplement connexe (pas de « trous »), alors il n'y a que trois types possibles d'espaces maximalement symétriques, suivant la valeur de la constante de courbure κ :

- $\kappa = 0$: $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est l'espace \mathbb{R}^3 muni de la métrique euclidienne standard ;
- $\kappa > 0$: $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est l'hypersphère \mathbb{S}^3 ;
- $\kappa < 0$: $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 .

Le premier cas étant bien connu, examinons successivement les deux autres.

Hypersphère \mathbb{S}^3

L'hypersphère \mathbb{S}^3 est la partie de \mathbb{R}^4 définie par

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1, \quad (7.5)$$

où (x, y, z, w) désigne un élément générique de \mathbb{R}^4 . Cette définition est bien entendu la transposition à trois dimensions de la définition de la sphère bidimensionnelle $\mathbb{S}^2 \subset \mathbb{R}^3$. Les coordonnées standard (χ, θ, φ) sur \mathbb{S}^3 prennent leurs valeurs dans les intervalles suivants :

$$\chi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[. \quad (7.6)$$

Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z, w) sur \mathbb{R}^4 par

$$\begin{cases} x &= \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \sin \chi \cos \theta, \\ w &= \cos \chi \end{cases} \quad (7.7)$$

\mathbb{S}^3 est une variété fermée (i.e. compacte et sans bord) et est simplement connexe. D'après la conjecture de Poincaré, démontrée en 2002 par le mathématicien russe Grigori Perelman, l'hypersphère \mathbb{S}^3 constitue le seul type de variété fermée simplement connexe en dimension 3, tout comme la sphère usuelle \mathbb{S}^2 l'est en dimension 2.

La métrique standard sur \mathbb{S}^3 n'est autre que la métrique induite par la métrique euclidienne $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ de \mathbb{R}^4 ; elle s'écrit

$$\boxed{g_{ij} dx^i dx^j = d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}. \quad (7.8)$$

Cette métrique est de signature $(+, +, +)$. Elle est donc définie positive, tout comme la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 . En d'autres termes, il s'agit d'une métrique riemannienne. Le tenseur de courbure associé est de la forme (7.3) avec $\kappa = 1$ (cf. Annexe D pour le calcul).

Le groupe d'isométrie de \mathbb{S}^3 munie de la métrique (7.8) est le groupe orthogonal $O(4)$, tout comme le groupe de symétrie de \mathbb{S}^2 est $O(3)$. Si l'on se limite aux transformations qui préservent l'orientation, il s'agit du groupe $SO(4)$ des rotations de l'espace euclidien \mathbb{R}^4 . La dimension de $O(4)$, en tant que groupe de Lie, étant 6, on en déduit que \mathbb{S}^3 est bien un espace de dimension 3 maximale ment symétrique (cf. la formule (7.2) avec $n = 3$).

Espace hyperbolique \mathbb{H}^3

L'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 peut être défini comme la nappe supérieure de l'hyperboloïde à deux nappes de dimension 3 (cf. Fig. 7.1). Ce dernier est l'ensemble des points $(x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$ vérifiant

$$x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -1. \quad (7.9)$$

Les coordonnées standard (ρ, θ, φ) sur \mathbb{H}^3 prennent leurs valeurs dans les intervalles suivants :

$$\boxed{\rho \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[}. \quad (7.10)$$

Elles sont reliées aux coordonnées cartésiennes (x, y, z, w) sur \mathbb{R}^4 par

$$\begin{cases} x &= \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi \\ y &= \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi \\ z &= \sinh \rho \cos \theta, \\ w &= \cosh \rho \end{cases} \quad (7.11)$$

La topologie de \mathbb{H}^3 est celle de \mathbb{R}^3 . Il ne s'agit donc pas d'un espace compact, contrairement à \mathbb{S}^3 .

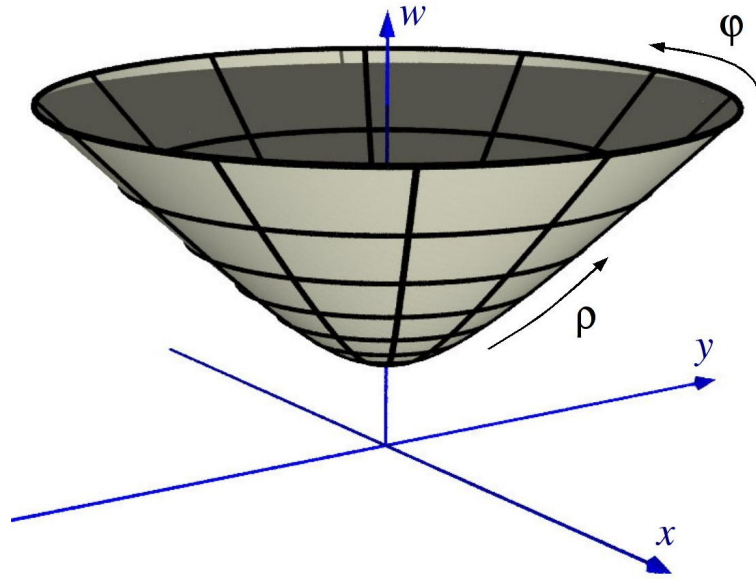


FIGURE 7.1 – Espace hyperbolique \mathbb{H}^3 comme sous-ensemble de \mathbb{R}^4 défini par les équations $x^2 + y^2 + z^2 - w^2 = -1$ et $w > 0$. La dimension suivant z a été supprimée pour le dessin, si bien que \mathbb{H}^3 apparaît comme une surface et non comme un volume. On a représenté les lignes iso-coordonnées $\rho = \text{const}$ et $\varphi = \text{const}$.

La métrique standard sur \mathbb{H}^3 est

$$\boxed{g_{ij} dx^i dx^j = d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}. \quad (7.12)$$

En comparant avec celle de (7.8), on constate que la forme de cette métrique ne diffère de celle de l'hypersphère que par (i) le remplacement d'un sinus par un sinus hyperbolique et (ii) le domaine de variation de la coordonnée radiale : $\chi \in [0, \pi]$ sur \mathbb{S}^3 et $\rho \in [0, +\infty[$ sur \mathbb{H}^3 . La métrique (7.12) est riemannienne (signature $(+, +, +)$). Il est à noter que, contrairement à la métrique (7.8) de \mathbb{S}^3 , elle n'est pas induite par la métrique euclidienne $dx^2 + dy^2 + dz^2 + dw^2$ de \mathbb{R}^4 , mais par la métrique minkowskienne $dx^2 + dy^2 + dz^2 - dw^2$. Une autre différence avec \mathbb{S}^3 est le signe de la courbure scalaire : \mathbb{H}^3 est un espace de courbure constante négative : le calcul du tenseur de Riemann conduit à la forme (7.3) avec $\kappa = -1$ (cf. Annexe D).

Le groupe d'isométrie de \mathbb{H}^3 muni de la métrique (7.12) est le *groupe de Lorentz orthochrone* $O_o(3, 1)$, c'est-à-dire l'ensemble des transformations de Lorentz qui envoient tout vecteur du genre temps orienté vers le futur vers un vecteur du même type. En effet, dans l'espace \mathbb{R}^4 , \mathbb{H}^3 peut être vu comme l'ensemble des points séparés de l'origine $(0, 0, 0, 0)$ par un vecteur unitaire du genre temps et orienté vers le futur pour la métrique de Minkowski. \mathbb{H}^3 est donc globalement invariant sous l'action de $O_o(3, 1)$. De plus, la métrique \mathbf{g} de \mathbb{H}^3 étant induite par la métrique de Minkowski, il est clair que chaque élément de $O_o(3, 1)$ est une isométrie de $(\mathbb{H}^3, \mathbf{g})$. Notons que $O_o(3, 1)$ est un groupe de Lie de dimension 6, ce qui, d'après (7.2), correspond bien à la dimension maximale d'un groupe de symétrie sur un espace de dimension 3.

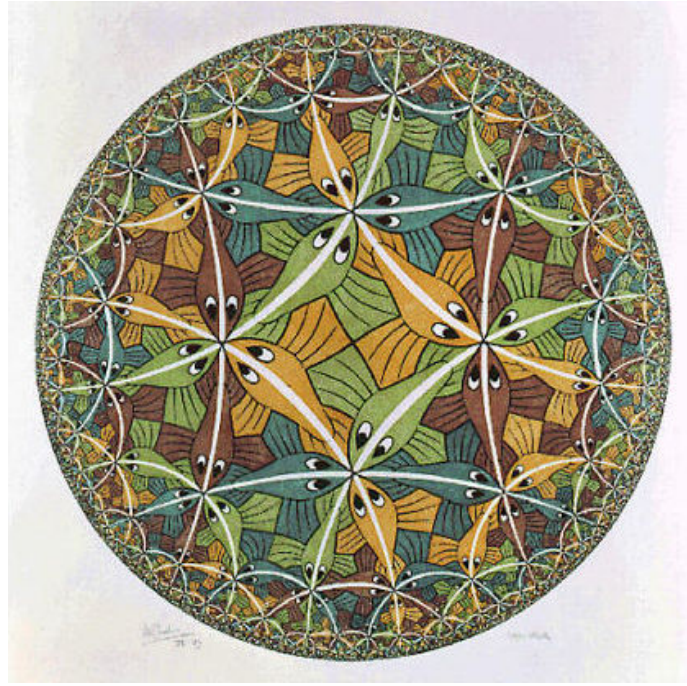


FIGURE 7.2 – *Circle Limit III* : peinture de M. C. Escher (1959) représentant l'espace hyperbolique \mathbb{H}^2 sous la forme du disque de Poincaré.

On décrit souvent \mathbb{H}^3 à l'aide des coordonnées stéréographiques $(\hat{x}, \hat{y}, \hat{z})$ définies par

$$\hat{x} := \frac{x}{w+1}, \quad \hat{y} := \frac{y}{w+1}, \quad \hat{z} := \frac{z}{w+1}. \quad (7.13)$$

Ces coordonnées s'obtiennent par projection stéréographique depuis le point $(x, y, z, w) = (0, 0, 0, -1)$ sur l'hyperplan $w = 0$. En posant $\hat{r}^2 := \hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2$, on déduit facilement de (7.9) que

$$\hat{r}^2 = \frac{w-1}{w+1}.$$

Puisque sur \mathbb{H}^3 , w décrit l'intervalle $[1, +\infty[$, le domaine de variation de \hat{r} est

$$0 \leq \hat{r} < 1. \quad (7.14)$$

La projection stéréographique réalise ainsi un difféomorphisme entre \mathbb{H}^3 et la boule de rayon unité de l'hyperplan $w = 0$ (identifié à \mathbb{R}^3). Dans ce contexte, cette dernière est appelée *boule de Poincaré*. Notons qu'en raison de l'inégalité stricte dans (7.14) la sphère qui délimite la boule n'est pas incluse dans la boule de Poincaré ; il s'agit donc d'une boule ouverte. C'est d'ailleurs nécessaire par un simple argument de topologie : la boule incluant la sphère $\hat{r} = 1$ est compacte alors que \mathbb{H}^3 ne l'est pas. Les composantes du tenseur métrique de \mathbb{H}^3 dans les coordonnées stéréographiques sont données par

$$g_{\hat{i}\hat{j}} dx^{\hat{i}} dx^{\hat{j}} = \frac{4}{[1 - (\hat{x}^2 + \hat{y}^2 + \hat{z}^2)]^2} (d\hat{x}^2 + d\hat{y}^2 + d\hat{z}^2). \quad (7.15)$$

Exercice : le démontrer à partir de (7.12) et de la formule de changement de coordonnées (2.57).

En dimension 2, la boule de Poincaré est naturellement appelée *disque de Poincaré*³. Ce dernier a inspiré l'artiste M. C. Escher, ainsi que montré sur la Fig. 7.2. On peut imaginer cette figure comme une coupe à $\hat{z} = 0$ de \mathbb{H}^3 . Les géodésiques sont des cercles orthogonaux au cercle périphérique $\hat{r} = 1$; elles sont représentées en blanc sur la Fig. 7.2. Il est à noter que tous les poissons ont la même taille pour la métrique \mathbf{g} : s'ils apparaissent de plus en plus petits à mesure que l'on s'approche du bord du disque, c'est en raison de la divergence $g_{\hat{i}\hat{j}} \rightarrow +\infty$ lorsque $\hat{r} \rightarrow 1$, ainsi qu'il est clair sur l'expression (7.15).

7.2.3 Espaces-temps maximalement symétriques

Plaçons-nous dans le cas $n = 4$ et formons l'équation d'Einstein pour un espace-temps maximalement symétrique. Le tenseur de Ricci s'obtient en combinant les Eqs. (4.108) et (7.3) :

$$R_{\alpha\beta} = R^\sigma{}_{\alpha\sigma\beta} = \kappa \underbrace{(\delta^\sigma{}_\sigma)}_4 g_{\alpha\beta} - \delta^\sigma{}_\beta g_{\alpha\sigma} = 3\kappa g_{\alpha\beta}, \quad (7.16)$$

de sorte que le tenseur d'Einstein vaut [cf. Eq. (4.114)]

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}R g_{\alpha\beta} = 3\kappa g_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}12\kappa g_{\alpha\beta} = -3\kappa g_{\alpha\beta}. \quad (7.17)$$

L'équation d'Einstein (7.1) s'écrit donc

$$\boxed{(\Lambda - 3\kappa) \mathbf{g} = \frac{8\pi G}{c^4} \mathbf{T}}. \quad (7.18)$$

On en déduit qu'un espace-temps maximalement symétrique vide ($\mathbf{T} = 0$) a forcément une constante cosmologique égale à 3κ :

$$\kappa = \frac{\Lambda}{3} \quad (\text{vide}). \quad (7.19)$$

Si l'espace-temps n'est pas vide et que l'on suppose que le tenseur énergie-impulsion est celui d'un fluide parfait, c'est-à-dire a la forme (4.124), alors (7.18) implique

$$\rho c^2 + p = 0 \quad \text{et} \quad p = c^4 \frac{\Lambda - 3\kappa}{8\pi G}, \quad (7.20)$$

soit

$$\boxed{\rho = c^2 \frac{3\kappa - \Lambda}{8\pi G}} \quad \text{et} \quad \boxed{p = -\rho c^2}. \quad (7.21)$$

Une telle équation d'état est celle de l'énergie dite « du vide ».

3. Le disque de Poincaré a en réalité été découvert par Eugenio Beltrami en 1868, soit 14 ans avant les travaux de Poincaré.

Examinons à présent les différents types de solutions maximale-ment symétriques, en supposant que le contenu en « matière » de l'espace-temps assure que (7.21) soit vérifiée, c'est-à-dire que l'équation d'Einstein soit satisfaite. Comme toute l'information sur la métrique est codée dans la constante κ , il n'y a que trois cas possibles⁴ :

- $\kappa = 0$: d'après (7.3) le tenseur de Riemann est identiquement nul, autrement dit la métrique \mathbf{g} est plate : $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est alors l'espace-temps de Minkowski ;
- $\kappa > 0$: d'après (7.4) la courbure scalaire est positive : $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est alors l'espace-temps de de Sitter, que nous allons étudier au § 7.3 ;
- $\kappa < 0$: d'après (7.4) la courbure scalaire est négative : $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est alors l'espace-temps anti-de Sitter, que nous allons étudier au § 7.4.

7.3 Espace-temps de de Sitter

7.3.1 Définition

L'espace-temps de de Sitter est l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ maximale-ment symétrique de courbure scalaire strictement positive $R = 12\kappa > 0$. Il a la topologie de $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$, où \mathbb{S}^3 est l'hypersphère de dimension 3 discutée au § 7.2.2. On peut décrire \mathcal{E} par des coordonnées hypersphériques $(x^\alpha) = (\tau, \chi, \theta, \varphi)$ telles que

$$\tau \in \mathbb{R}, \quad \chi \in [0, \pi], \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad (7.22)$$

et pour lesquelles le tenseur métrique prend la forme suivante :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -d\tau^2 + b^{-2} \cosh^2(b\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (7.23)$$

où b est la constante reliée à κ par

$$b := \sqrt{\kappa}. \quad (7.24)$$

Remarquons que b a la dimension de l'inverse d'une longueur. On reconnaît dans le terme en facteur de $b^{-2} \cosh^2(b\tau)$ l'élément de longueur (7.8) sur l'hypersphère \mathbb{S}^3 .

En calculant le tenseur de Riemann à partir des composantes (7.23) de \mathbf{g} suivant la formule (4.98), on obtient la forme (7.3) avec $\kappa = b^2 > 0$, en accord avec le fait que l'espace-temps de de Sitter est l'espace-temps maximale-ment symétrique de courbure scalaire positive. D'après la formule (7.4) avec $n = 4$, le scalaire de courbure est la constante

$$R = 12b^2. \quad (7.25)$$

7.3.2 Plongement isométrique dans Minkowski 5-D

On peut « visualiser » l'espace-temps de de Sitter $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ comme un hyperboloïde de dimension 4 plongé dans l'espace-temps de Minkowski de dimension 5, \mathcal{M}_5 . Ce dernier

4. Tout comme au § 7.2, nous supposons dans la classification qui suit que la topologie de \mathcal{E} est la plus simple qui soit, à savoir simplement connexe. Si \mathcal{E} est multiplement connexe, les identifications qui suivent ne sont que locales.

n'est autre que l'espace \mathbb{R}^5 muni de la métrique lorentzienne

$$ds_5^2 = -dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2. \quad (7.26)$$

Considérons en effet l'hypersurface \mathcal{H} de \mathcal{M}_5 définie par les équations paramétriques

$$\begin{cases} T &= b^{-1} \sinh(b\tau) \\ W &= b^{-1} \cosh(b\tau) \cos \chi \\ X &= b^{-1} \cosh(b\tau) \sin \chi \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= b^{-1} \cosh(b\tau) \sin \chi \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= b^{-1} \cosh(b\tau) \sin \chi \cos \theta, \end{cases} \quad (7.27)$$

où les paramètres $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$ prennent leurs valeurs dans $\mathbb{R} \times [0, \pi] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi[$. Les 5 coordonnées minkowskiennes (T, W, X, Y, Z) étant fonctions des 4 paramètres $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$, (7.27) constitue bien l'équation d'une sous-variété de dimension 4 dans \mathcal{M}_5 , une *hypersurface* donc. Grâce aux identités $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ et $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$, il est facile de vérifier que (7.27) implique

$$-T^2 + W^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = b^{-2}. \quad (7.28)$$

b étant constant, on reconnaît-là l'équation d'un hyperboloïde à une nappe (cf. Fig. 7.3).

Calculons l'élément de longueur (7.26) lorsqu'on restreint le déplacement à être sur \mathcal{H} . Pour cela posons

$$X_0 := \sin \chi \sin \theta \cos \varphi, \quad Y_0 := \sin \chi \sin \theta \sin \varphi, \quad Z_0 := \sin \chi \cos \theta. \quad (7.29)$$

En différenciant (7.27), il vient alors

$$\begin{aligned} dT &= \cosh(b\tau) d\tau \\ dW &= \sinh(b\tau) \cos \chi d\tau - b^{-1} \cosh(b\tau) \sin \chi d\chi \\ dX &= \sinh(b\tau) X_0 d\tau + b^{-1} \cosh(b\tau) dX_0 \\ dY &= \sinh(b\tau) Y_0 d\tau + b^{-1} \cosh(b\tau) dY_0 \\ dZ &= \sinh(b\tau) Z_0 d\tau + b^{-1} \cosh(b\tau) dZ_0. \end{aligned}$$

À partir de ces expressions, on obtient

$$\begin{aligned} -dT^2 + dW^2 &= -[1 + \sinh^2(b\tau) \sin^2 \chi] d\tau^2 - 2b^{-1} \sinh(b\tau) \cosh(b\tau) \times \\ &\quad \times \sin \chi \cos \chi d\tau d\chi + b^{-2} \cosh^2(b\tau) \sin^2 \chi d\chi^2 \end{aligned} \quad (7.30)$$

et

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 &= \sinh^2(b\tau)(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) d\tau^2 \\ &\quad + 2b^{-1} \sinh(b\tau) \cosh(b\tau) d\tau(X_0 dX_0 + Y_0 dY_0 + Z_0 dZ_0) \\ &\quad + b^{-2} \cosh^2(b\tau) (dX_0^2 + dY_0^2 + dZ_0^2). \end{aligned} \quad (7.31)$$

Or

$$X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = \sin^2 \chi,$$

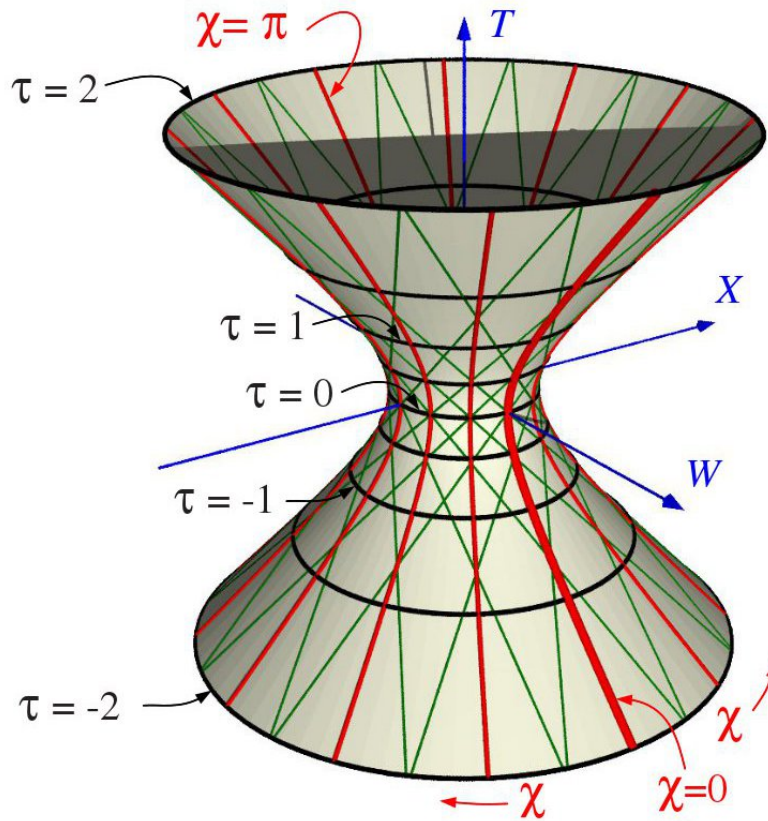


FIGURE 7.3 – Espace-temps de de Sitter (\mathcal{E}, g) , vu comme un hyperboloïde à une nappe \mathcal{H} dans l'espace-temps de Minkowski à 5 dimensions \mathcal{M}_5 . (T, W, X, Y, Z) sont des coordonnées minkowskienne de \mathcal{M}_5 et $(\tau, \chi, \theta, \varphi)$ sont des coordonnées hypersphériques de \mathcal{E} . Le dessin représente en fait une coupe à $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$ (partie $X \geq 0$) ou $\varphi = \pi$ (partie $X \leq 0$). Les dimensions suivant Y et Z ont été supprimées, de sorte que les hypersurfaces $\tau = \text{const}$ qui apparaissent comme des cercles (traits noirs) sont en réalité des hypersphères \mathbb{S}^3 (τ est exprimé en unité de b^{-1}). L'hyperboloïde \mathcal{H} constitue un plongement isométrique de (\mathcal{E}, g) dans \mathcal{M}_5 : la métrique physique g coïncide sur \mathcal{H} avec la métrique minkowskienne de \mathcal{M}_5 . Les lignes rouges représentent des lignes d'univers d'observateurs à coordonnées (χ, θ, φ) fixes et les droites en trait fin vert sont des géodésiques lumière, aussi bien pour la métrique g que pour la métrique minkowskienne de \mathcal{M}_5 . Ces droites génèrent l'hyperboloïde \mathcal{H} , qui est une surface réglée.

$$2(X_0 dX_0 + Y_0 dY_0 + Z_0 dZ_0) = d(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) = d(\sin^2 \chi) = 2 \sin \chi \cos \chi d\chi$$

et

$$dX_0^2 + dY_0^2 + dZ_0^2 = \cos^2 \chi d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

si bien qu'en additionnant (7.30) et (7.31), on obtient

$$-dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = -d\tau^2 + b^{-2} \cosh^2(b\tau) [d\chi^2 + \sin^2 \chi (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Au vu de (7.26) et (7.23), on en conclut que

$$\boxed{ds_5^2|_{\mathcal{H}} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}. \quad (7.32)$$

Autrement dit, sur l'hyperboloïde \mathcal{H} les longueurs mesurées via la métrique de Minkowski de l'espace ambiant \mathcal{M}_5 coïncident avec les longueurs mesurées via la métrique physique g . On dit que \mathcal{H} constitue un plongement isométrique⁵ de l'espace-temps de de Sitter dans l'espace de Minkowski \mathcal{M}_5 .

Remarque : L'espace-temps de de Sitter étant *maximalement symétrique*, tous ses points sont équivalents. Ce n'est pas forcément évident sur la Fig. 7.3, où la courbure au niveau du « col » de l'hyperboloïde (i.e. en $T = 0$) apparaît plus importante qu'ailleurs. Cependant, il ne faut pas oublier que la courbure physique n'est pas celle fournie par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 (avec laquelle on a tendance à interpréter la Fig. 7.3!), mais par la métrique de Minkowski sur \mathcal{M}_5 . Pour cette dernière, la courbure est bien constante sur tout l'hyperboloïde.

7.3.3 Géodésiques lumière

Un espace-temps est caractérisé en bonne partie par ses géodésiques lumière. Attachons-nous donc à déterminer ces dernières pour l'espace-temps de de Sitter. Nous nous limiterons aux géodésiques lumière radiales, c'est-à-dire à θ et φ fixés. D'après l'élément de longueur (7.23), on a, le long de ces géodésiques,

$$-d\tau^2 + b^{-2} \cosh^2(b\tau) d\chi^2 = 0,$$

d'où

$$d\chi = \pm \frac{b}{\cosh(b\tau)} d\tau.$$

La relation ci-dessus s'intègre en

$$\boxed{\chi = \chi_0 \pm 2 [\arctan(e^{b\tau}) - \arctan(e^{b\tau_0})]}, \quad (7.33)$$

5. D'une manière générale, un plongement d'une variété différentiable \mathcal{E} dans une variété différentiable \mathcal{F} (ici $\mathcal{F} = \mathcal{M}_5$) est une application différentiable $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ telle que (i) en tout point $P \in \mathcal{E}$, l'application linéaire tangente $d\Phi_P : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \rightarrow \mathcal{T}_{\Phi(P)}(\mathcal{F})$ est injective et (ii) Φ est un homéomorphisme de \mathcal{E} sur $\Phi(\mathcal{E})$. Lorsque \mathcal{E} est muni d'une métrique g et \mathcal{F} d'une métrique h , le plongement est qualifié d'isométrique ssi pour tout couple (P, P') de points infiniment proches de \mathcal{E} , $h(\overrightarrow{dQ}, \overrightarrow{dQ}) = g(\overrightarrow{dP}, \overrightarrow{dP})$, où $\overrightarrow{dP} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ est le vecteur infinitésimal joignant P à P' et $\overrightarrow{dQ} \in \mathcal{T}_Q(\mathcal{F})$ est le vecteur infinitésimal joignant $Q := \Phi(P)$ à $Q' := \Phi(P')$.

où les constantes χ_0 et τ_0 sont telles que $\chi = \chi_0$ en $\tau = \tau_0$. Remarquons qu'il y a deux familles de géodésiques lumière « radiales », déterminées par le signe \pm dans l'équation ci-dessus. À l'aide des formules classiques des trigonométries sphérique et hyperbolique, il est facile de voir que (7.33) conduit à

$$\cos \chi = \frac{\cos \chi_0 [1 + \sinh(b\tau) \sinh(b\tau_0)] \mp \sin \chi_0 [\sinh(b\tau) - \sinh(b\tau_0)]}{\cosh(b\tau) \cosh(b\tau_0)} \quad (7.34)$$

$$\sin \chi = \frac{\sin \chi_0 [1 + \sinh(b\tau) \sinh(b\tau_0)] \pm \cos \chi_0 [\sinh(b\tau) - \sinh(b\tau_0)]}{\cosh(b\tau) \cosh(b\tau_0)}. \quad (7.35)$$

En reportant ces formules dans (7.27) et en remplaçant $\sin(b\tau)$ par bT , on obtient l'équation d'une géodésique radiale dans les coordonnées minkowskiennes de \mathcal{M}_5 :

$$\left\{ \begin{array}{l} W = \frac{1}{\cosh(b\tau_0)} \{ [\cos \chi_0 \sinh(b\tau_0) \mp \sin \chi_0] T + b^{-1} [\cos \chi_0 \pm \sin \chi_0 \sinh(b\tau_0)] \} \\ X = \frac{\sin \theta \cos \varphi}{\cosh(b\tau_0)} \{ [\sin \chi_0 \sinh(b\tau_0) \pm \cos \chi_0] T + b^{-1} [\sin \chi_0 \mp \cos \chi_0 \sinh(b\tau_0)] \} \\ Y = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\cosh(b\tau_0)} \{ [\sin \chi_0 \sinh(b\tau_0) \pm \cos \chi_0] T + b^{-1} [\sin \chi_0 \mp \cos \chi_0 \sinh(b\tau_0)] \} \\ Z = \frac{\cos \theta}{\cosh(b\tau_0)} \{ [\sin \chi_0 \sinh(b\tau_0) \pm \cos \chi_0] T + b^{-1} [\sin \chi_0 \mp \cos \chi_0 \sinh(b\tau_0)] \} \end{array} \right. \quad (7.36)$$

Les paramètres τ_0 , χ_0 , θ et φ étant fixés, on reconnaît l'équation d'une droite de \mathcal{M}_5 . Étant donnée le caractère isométrique du plongement de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ dans \mathcal{M}_5 , il s'agit nécessairement d'une droite lumière de \mathcal{M}_5 . Les géodésiques lumière radiales sont dessinées en trait fin vert sur la Fig. 7.3. On y voit clairement les deux familles : celles ayant une fonction $\chi(\tau)$ croissante (signe + dans (7.33)) et celles ayant une fonction $\chi(\tau)$ décroissante (signe - dans (7.33)). Remarquons qu'en variant les droites lumière, on génère \mathcal{H} : on retrouve ainsi le fait qu'un hyperboloïde à une nappe est une surface réglée.

7.3.4 Horizon des particules et horizon des événements

Les géodésiques lumière radiales sont représentées dans le plan des coordonnées (τ, χ) sur la Fig. 7.4. Les courbes sur cette figure ne sont autres que les droites de la Fig. 7.3. L'ensemble des géodésiques lumière fixe la structure causale de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ et conduit à l'existence d'horizons des événements. Pour le voir, considérons un observateur \mathcal{O} de coordonnées (χ, θ, φ) fixées. Tous les points de \mathcal{E} étant équivalents, on peut sans perte de généralité choisir $\chi = 0$. La ligne d'univers de \mathcal{O} est alors la courbe rouge en trait épais de la Fig. 7.3 ou encore la droite verticale rouge de la Fig. 7.4. D'après la forme (7.23) du tenseur métrique, la coordonnée τ n'est pas autre chose que le temps propre de l'observateur \mathcal{O} (à un facteur c près). À un instant τ_0 fixé, la nappe du passé $\mathcal{C}^-(\tau_0)$ du cône de lumière de l'observateur \mathcal{O} est formée par les géodésiques lumière radiales de paramètre $(\tau_0, \chi_0 = 0)$ et de fonction $\chi(\tau)$ décroissante (puisqu'elles convergent vers $\chi = 0$). L'équation de $\mathcal{C}^-(\tau_0)$ s'obtient donc en faisant $\chi_0 = 0$ et choisissant le signe -

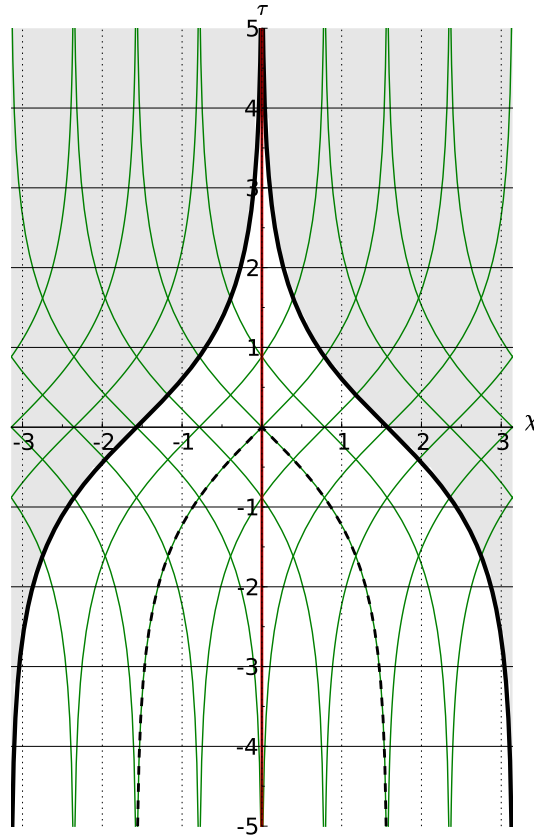


FIGURE 7.4 – Géodésiques lumineuses de l'espace-temps de de Sitter dans le plan des coordonnées (τ, χ) . τ est donné en unités de b^{-1} . Les valeurs négatives de χ correspondent à $\varphi = \pi$, les valeurs positives étant pour $\varphi = 0$. La droite verticale rouge est la ligne d'univers de l'observateur stationnant en $\chi = 0$. Les lignes pointillés représentent son cône de lumière passé à l'instant $\tau = 0$. Les lignes en trait noir épais marquent l'horizon des événements de cet observateur, la région grisée étant l'ensemble des événements desquels aucune information ne lui parviendra jamais.

dans l'équation (7.33) :

$$\mathcal{C}^-(\tau_0) : \quad \chi = -2 \arctan(e^{b\tau}) + 2 \arctan(e^{b\tau_0}). \quad (7.37)$$

$\mathcal{C}^-(\tau_0)$ est représentée pour $\tau_0 = 0$ sur la Fig. 7.4 par le trait en pointillés. Physiquement, $\mathcal{C}^-(\tau_0)$ représente la vision de l'univers qu'a l'observateur \mathcal{O} à l'instant τ_0 . Depuis $\tau_0 = -\infty$ jusqu'à la valeur actuelle de τ_0 , la nappe du passé \mathcal{C}^- a balayé l'ensemble des lignes d'univers $\chi = \text{const}$ telles que $0 \leq \chi \leq \chi_{\max}(\tau_0)$ avec $\chi_{\max}(\tau_0)$ obtenu en faisant $\tau \rightarrow -\infty$ dans (7.37) :

$$\chi_{\max}(\tau_0) = 2 \arctan(e^{b\tau_0}). \quad (7.38)$$

La 2-sphère définie par $\tau = \tau_0$ et $\chi = \chi_{\max}(\tau_0)$ est appelée *horizon des particules de l'observateur \mathcal{O} à l'instant τ_0* . Elle sépare les particules comobiles, i.e. de coordonnées (χ, θ, φ) fixes, en deux catégories : celles qui ont déjà été observées par \mathcal{O} à l'instant τ_0 et celles qui ne l'ont pas été. Pour $\tau_0 = 0$ (cas représenté sur la Fig. 7.4), $\chi_{\max}(0) = 2 \times \pi/4 =$

$\pi/2$. On constate sur (7.38) que

$$\lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} \chi_{\max}(\tau_0) = \pi, \quad (7.39)$$

de sorte qu'au bout d'un temps infini, \mathcal{O} a observé toutes les particules comobiles de l'univers. Notons toutefois que les événements situés en dehors de la nappe du passé du cône de lumière limite

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}} := \lim_{\tau_0 \rightarrow +\infty} \mathcal{C}^-(\tau_0) \quad (7.40)$$

sont à tout jamais inaccessibles à \mathcal{O} : les géodésiques lumière émises depuis ces événements ne rencontreront jamais la ligne d'univers de \mathcal{O} (cf. Fig. 7.4). Pour cette raison $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ est appelé *horizon des événements de l'observateur \mathcal{O}* . Son équation est obtenue en faisant $\tau_0 \rightarrow +\infty$ dans (7.37) :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}} : \quad \boxed{\chi = \pi - 2 \arctan(e^{b\tau})}. \quad (7.41)$$

L'horizon des événements de \mathcal{O} est représenté en trait noir épais sur la Fig. 7.4. Notons qu'il s'agit d'une hypersurface de l'espace-temps \mathcal{E} , tout comme les nappes $\mathcal{C}^-(\tau_0)$ des cônes de lumière. L'équation de $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ dans les coordonnées minkowskienne de \mathcal{M}_5 s'obtient en faisant $\chi_0 = 0$ et $\tau_0 \rightarrow +\infty$ dans (7.36) et en y choisissant le signe correspondant à la famille des géodésiques avec χ décroissant :

$$\mathcal{H}_{\mathcal{O}} : \quad \begin{cases} W = T \\ X = b^{-1} \sin \theta \cos \varphi \\ Y = b^{-1} \sin \theta \sin \varphi \\ Z = b^{-1} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.42)$$

Sur la Fig. 7.3, qui correspond à $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$, $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ est donc représenté par les deux droites d'équations respectives :

$$\text{pour } \varphi = 0 : \quad \begin{cases} W = T \\ X = b^{-1} \end{cases} \quad \text{et pour } \varphi = \pi : \quad \begin{cases} W = T \\ X = -b^{-1}. \end{cases}$$

Remarque 1: Dans l'espace-temps de Minkowski, il n'existe pas d'horizon des événements pour un observateur inertiel. Par contre, il en existe un pour tout observateur uniformément accéléré. L'horizon des événements de ce type d'observateur est appelé *horizon de Rindler*. Il est étudié dans le problème B.4 (Annexe B).

Remarque 2: L'horizon des événements $\mathcal{H}_{\mathcal{O}}$ dépend de l'observateur \mathcal{O} ; ce n'est donc pas une propriété intrinsèque de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, contrairement à l'horizon des événements d'un trou noir qui est une hypersurface unique de l'espace-temps, définie indépendamment de tout observateur (cf. § 5.3).

7.3.5 Coordonnées de Lemaître

Dans l'étude d'un espace-temps, en plus de la détermination des géodésiques lumière, il est souvent instructif d'utiliser différents systèmes de coordonnées. Dans le cas présent,

effectuons le changement de coordonnées $(\tau, \chi, \theta, \varphi) \mapsto (t, r, \theta, \varphi)$ suivant

$$\begin{cases} t := b^{-1} \ln [\cosh(b\tau) \cos \chi + \sinh(b\tau)] \\ r := \frac{\cosh(b\tau) \sin \chi}{b [\cosh(b\tau) \cos \chi + \sinh(b\tau)]} \end{cases} \quad (7.43)$$

θ et φ restant identiques. Les coordonnées (t, r, θ, φ) sont appelées *coordonnées de Lemaître*. Il est clair que t et r prennent leurs valeurs dans les intervalles suivants

$$t \in \mathbb{R}, \quad r \in [0, +\infty[. \quad (7.44)$$

En raison du logarithme dans l'expression de t , le changement de coordonnées n'est bien défini que pour

$$\cosh(b\tau) \cos \chi + \sinh(b\tau) > 0.$$

Au vu de (7.27), cette condition est équivalente à

$$T + W > 0. \quad (7.45)$$

Autrement dit, les coordonnées de Lemaître ne couvrent qu'une moitié de l'espace-temps de de Sitter : celle située au dessus de l'hyperplan $T + W = 0$ (cf. Fig. 7.5).

Remarque : Tout comme τ , la coordonnée t définie ci-dessus a la dimension d'une longueur. Pour lui donner la dimension d'un temps, il faudrait remplacer t par ct dans toutes les formules qui suivent.

Le système (7.43) s'inverse comme suit. On tire immédiatement de (7.43) les relations

$$\cosh(b\tau) \cos \chi + \sinh(b\tau) = e^{bt} \quad (7.46)$$

$$\cosh(b\tau) \sin \chi = br e^{bt}. \quad (7.47)$$

En élevant (7.47) au carré, il vient

$$b^2 r^2 e^{2bt} = \cosh^2(b\tau) \sin^2 \chi = \cosh^2(b\tau) - \cosh^2(b\tau) \cos^2 \chi.$$

En utilisant (7.46) pour exprimer $\cosh^2(b\tau) \cos^2 \chi$, on obtient

$$b^2 r^2 e^{2bt} = \cosh^2(b\tau) - \underbrace{[e^{bt} - \sinh(b\tau)]^2}_1 = \cosh^2(b\tau) - \sinh^2(b\tau) - e^{2bt} + 2e^{bt} \sinh(b\tau),$$

d'où (en écrivant $1 - e^{2bt} = -2e^{bt} \sinh(bt)$),

$$\sinh(b\tau) = \sinh(bt) + \frac{1}{2} b^2 r^2 e^{bt}. \quad (7.48)$$

En formant le quotient de (7.47) par (7.46) (sous la forme $\cosh(b\tau) \cos \chi = e^{bt} - \sinh(b\tau)$), il vient

$$\tan \chi = \frac{br e^{bt}}{e^{bt} - \sinh(b\tau)} = \frac{2br}{1 + e^{-2bt} - b^2 r^2}, \quad (7.49)$$

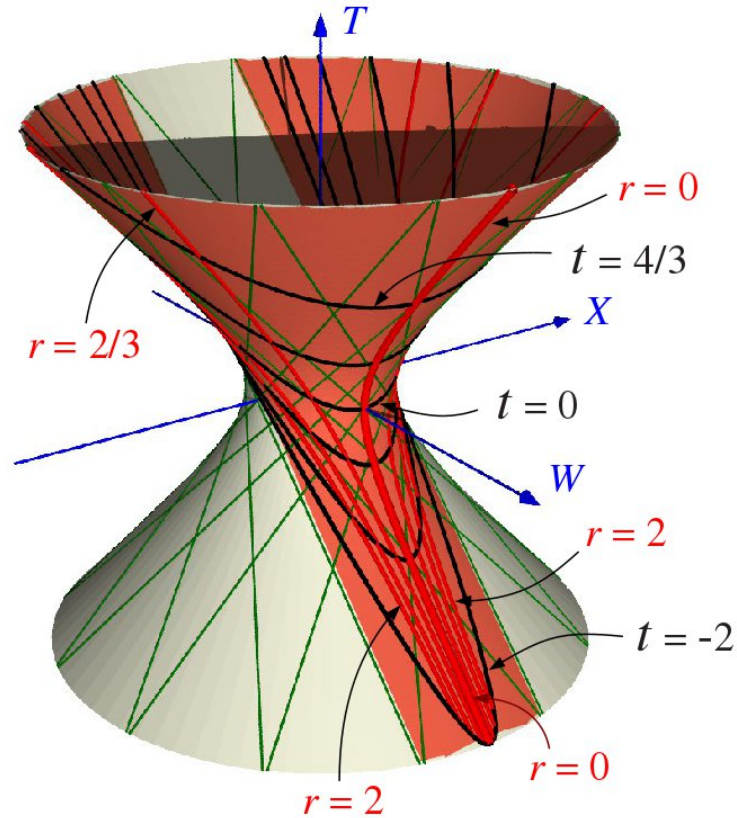


FIGURE 7.5 – Description de l'espace-temps de de Sitter par les coordonnées de Lemaître (t, r, θ, φ) . Ces dernières ne recouvrent que la partie colorée (région $T+W > 0$). Les valeurs de t et de r sont données en unités de b^{-1} .

où, pour obtenir la deuxième égalité, nous avons utilisé la valeur (7.48) de $\sinh(b\tau)$. Les relations (7.48) et (7.49) permettent d'exprimer les coordonnées hypersphériques en fonction des coordonnées de Lemaître :

$$\begin{cases} \tau = b^{-1} \operatorname{argsinh} \left[\sinh(bt) + \frac{1}{2} b^2 r^2 e^{bt} \right] \\ \chi = \arctan \left(\frac{2br}{1 + e^{-2bt} - b^2 r^2} \right) + k\pi, \end{cases} \quad (7.50)$$

où $k = 0$ (resp. $k = 1$) si l'argument de l'arctangente est positif (resp. négatif), de manière à assurer $\chi \in [0, \pi]$.

En partant de l'expression (7.27) et en utilisant (7.46), (7.47) et (7.48), il est facile d'exprimer les coordonnées minkowskiennes en fonction des coordonnées de Lemaître :

$$\begin{cases} T &= b^{-1} [\sinh(bt) + \frac{1}{2}b^2r^2e^{bt}] \\ W &= b^{-1} [\cosh(bt) - \frac{1}{2}b^2r^2e^{bt}] \\ X &= e^{bt} r \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= e^{bt} r \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= e^{bt} r \cos \theta. \end{cases} \quad (7.51)$$

Pour calculer les composantes du tenseur métrique en coordonnées de Lemaître, une première méthode consisterait à partir des composantes (7.23) en coordonnées hypersphériques et à appliquer la formule générale (2.57), qui fait intervenir la matrice jacobienne $\partial x^\alpha / \partial x^{\beta'}$ du changement de coordonnées. Mais à la vue de (7.50), il faut bien reconnaître que l'on n'a pas trop envie de calculer cette dernière... Une méthode alternative consiste à évaluer l'élément de longueur minkowskien sur \mathcal{H} à partir de (7.51). En différenciant (7.51), il vient en effet

$$\begin{aligned} dT &= \left[\cosh(bt) + \frac{1}{2}b^2r^2e^{bt} \right] dt + bre^{bt} dr \\ dW &= \left[\sinh(bt) - \frac{1}{2}b^2r^2e^{bt} \right] dt - bre^{bt} dr \\ dX &= e^{bt}(bx dt + dx) \\ dY &= e^{bt}(by dt + dy) \\ dZ &= e^{bt}(bz dt + dz), \end{aligned}$$

où l'on a noté

$$x := r \sin \theta \cos \varphi, \quad y := r \sin \theta \sin \varphi \quad \text{et} \quad z := r \cos \theta.$$

Il vient donc

$$\begin{aligned} -dT^2 + dW^2 &= (dW + dT)(dW - dT) \\ &= \underbrace{[\sinh(bt) + \cosh(bt)]}_{e^{bt}} dt \times \\ &\quad \times \left\{ \underbrace{[\sinh(bt) - \cosh(bt)]}_{-e^{-bt}} - b^2r^2e^{bt} \right\} dt - 2bre^{bt} dr \\ -dT^2 + dW^2 &= -(1 + b^2r^2e^{2bt}) dt^2 - 2bre^{2bt} dt dr \end{aligned} \quad (7.52)$$

et

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 &= e^{2bt} [b^2(x^2 + y^2 + z^2) dt^2 + 2b dt (x dx + y dy + z dz) \\ &\quad + dx^2 + dy^2 + dz^2]. \end{aligned} \quad (7.53)$$

Or

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2,$$

$$2(x dx + y dy + z dz) = d(x^2 + y^2 + z^2) = d(r^2) = 2r dr$$

et

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

L'addition de (7.52) et (7.53) conduit ainsi à

$$-dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = -dt^2 + e^{2bt}[dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

L'élément de longueur minkowskien 5-dimensionnel coïncidant avec l'élément de longueur donné par \mathbf{g} sur \mathcal{H} [cf. (7.32)], on en déduit les composantes du tenseur métrique de l'espace-temps de de Sitter dans les coordonnées de Lemaître $(x^{\hat{\alpha}}) = (t, r, \theta, \varphi)$:

$$\boxed{g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} dx^{\hat{\alpha}} dx^{\hat{\beta}} = -dt^2 + e^{2bt} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]}. \quad (7.54)$$

Cette forme de la métrique est très simple. En particulier les hypersurfaces $t = \text{const}$ sont plates : la métrique induite y est proportionnelle à la métrique euclidienne $dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)$. Si ces hypersurfaces ont l'air courbes sur la Fig. 7.5, c'est qu'elles ont une *courbure extrinsèque*, leur courbure *intrinsèque* étant nulle. De manière analogue, le cylindre plongé dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 a une courbure extrinsèque non nulle, alors que sa courbure intrinsèque vaut zéro (son tenseur de Riemann est identiquement nul). Les observateurs comobiles (i.e. les observateurs de coordonnées (r, θ, φ) fixes, représentés par les lignes d'univers rouge sur la Fig. 7.5) forment une famille en expansion exponentielle : la séparation métrique entre deux tels observateurs varie comme e^{bt} .

7.3.6 Coordonnées statiques

Un autre système de coordonnées intéressant sur l'espace-temps de de Sitter est fourni par la transformation $(\tau, \chi, \theta, \varphi) \mapsto (\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$ définie par

$$\boxed{\begin{cases} \bar{t} & := \frac{1}{b} \operatorname{argsinh} \left[\frac{\sinh(b\tau)}{\sqrt{1 - \cosh^2(b\tau) \sin^2 \chi}} \right] \\ \bar{r} & := \frac{1}{b} \cosh(b\tau) \sin \chi, \end{cases}} \quad (7.55)$$

θ et φ restant inchangées. Les coordonnées $(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$ sont appelées *coordonnées statiques* car elles sont liées à un vecteur de Killing statique de l'espace-temps de de Sitter, ainsi que nous allons le montrer. Remarquons qu'en raison de la racine carrée dans l'expression de \bar{t} , les coordonnées statiques ne sont définies que pour

$$\cosh(b\tau) \sin \chi < 1. \quad (7.56)$$

Cette condition restreint le domaine de variation de \bar{r} : via (7.55), elle implique $\bar{r} < b^{-1}$. Par ailleurs, puisque $\chi \in [0, \pi]$, $\bar{r} \geq 0$. De son côté, \bar{t} peut prendre n'importe quelle valeur réelle lorsque τ décrit \mathbb{R} . On en déduit le domaine de variation des coordonnées statiques :

$$\boxed{\bar{t} \in \mathbb{R}, \quad \bar{r} \in [0, b^{-1}[}. \quad (7.57)$$

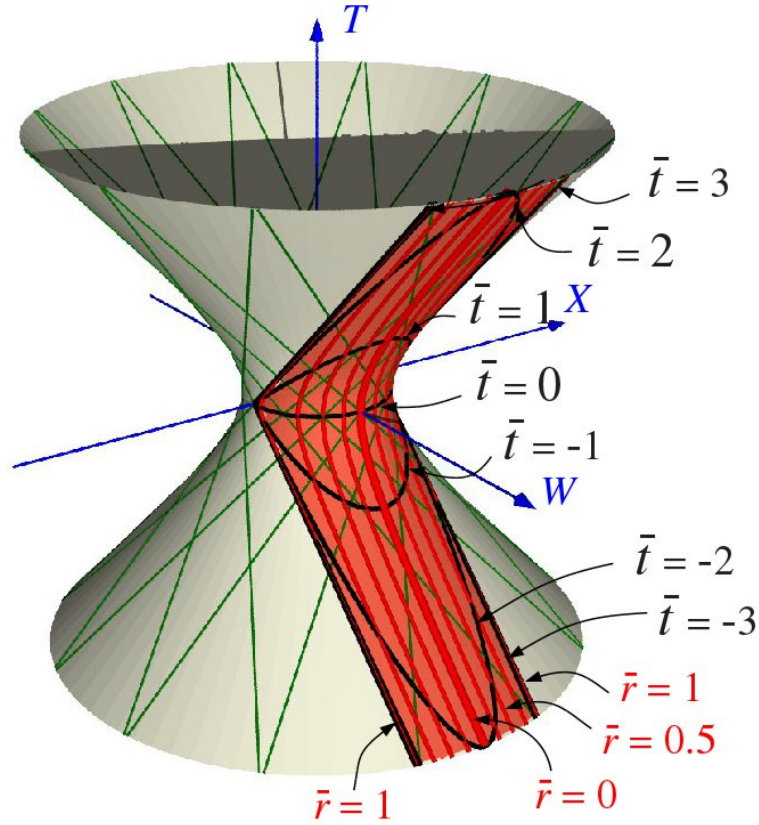


FIGURE 7.6 – Description de l'espace-temps de de Sitter par les coordonnées statiques $(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$. Ces dernières ne recouvrent que la partie colorée. Les valeurs de \bar{t} et de \bar{r} sont données en unités de b^{-1} .

La condition (7.56) signifie que les coordonnées statiques ne recouvrent qu'une partie de l'espace-temps de de Sitter : il s'agit de la partie colorée sur la Fig. 7.6.

Le système (7.55) s'inverse aisément : en reportant la deuxième équation sous la forme $\cosh(b\tau) \sin \chi = b\bar{r}$ dans la première, il vient

$$\sinh(b\tau) = \sinh(b\bar{t})\sqrt{1 - b^2\bar{r}^2}. \quad (7.58)$$

On peut alors faire $\cosh(b\tau) = \sqrt{1 + \sinh^2(b\tau)}$ dans la deuxième équation et obtenir

$$\sin \chi = \frac{b\bar{r}}{\sqrt{1 + \sinh^2(b\bar{t})(1 - b^2\bar{r}^2)}}. \quad (7.59)$$

La transformation de coordonnées inverse est donc

$$\begin{cases} \tau = \frac{1}{b} \operatorname{argsinh} \left[\sinh(b\bar{t})\sqrt{1 - b^2\bar{r}^2} \right] \\ \chi = \arcsin \left[\frac{b\bar{r}}{\sqrt{1 + \sinh^2(b\bar{t})(1 - b^2\bar{r}^2)}} \right]. \end{cases} \quad (7.60)$$

Exprimons à présent les coordonnées de Minkowski de l'espace ambiant \mathcal{M}_5 en fonction des coordonnées statiques. En comparant la première équation de (7.27) avec (7.58) et (7.55), c'est immédiat pour T , X , Y et Z . Quant à W , il vient

$$W = b^{-1} \cosh(b\tau) \cos \chi = \bar{r} \frac{\cos \chi}{\sin \chi} = \bar{r} \sqrt{\frac{1}{\sin^2 \chi} - 1}.$$

En reportant l'expression (7.59) de $\sinh \chi$ et en simplifiant, on obtient

$$W = b^{-1} \cosh(b\bar{t}) \sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2}.$$

L'expression des coordonnées minkowskiennes en fonction des coordonnées statiques est donc

$$\begin{cases} T &= b^{-1} \sinh(b\bar{t}) \sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2} \\ W &= b^{-1} \cosh(b\bar{t}) \sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2} \\ X &= \bar{r} \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= \bar{r} \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= \bar{r} \cos \theta. \end{cases} \quad (7.61)$$

Tout comme pour les coordonnées de Lemaître, utilisons cette expression pour calculer les composantes du tenseur métrique en coordonnées statiques. On a

$$dT = \cosh(b\bar{t}) \sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2} d\bar{t} - \sinh(b\bar{t}) \frac{b\bar{r}}{\sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2}} d\bar{r}$$

$$dW = \sinh(b\bar{t}) \sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2} d\bar{t} - \cosh(b\bar{t}) \frac{b\bar{r}}{\sqrt{1 - b^2 \bar{r}^2}} d\bar{r},$$

d'où

$$-dT^2 + dW^2 = -(1 - b^2 \bar{r}^2) d\bar{t}^2 + \frac{b^2 \bar{r}^2}{1 - b^2 \bar{r}^2} d\bar{r}^2.$$

Remarquons que l'élimination de la dépendance en \bar{t} grâce à l'identité $\cosh^2(b\bar{t}) - \sinh^2(b\bar{t}) = 1$. Par ailleurs, il est évident sur (7.61) que

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

On a donc

$$-dT^2 + dW^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = -(1 - b^2 \bar{r}^2) d\bar{t}^2 + \frac{1}{1 - b^2 \bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Le caractère isométrique du plongement de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ dans \mathcal{M}_5 permet de conclure quant aux composantes du tenseur métrique dans les coordonnées statiques $(x^{\bar{\alpha}}) = (\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$:

$$\boxed{g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} dx^{\bar{\alpha}} dx^{\bar{\beta}} = -(1 - b^2 \bar{r}^2) d\bar{t}^2 + \frac{1}{1 - b^2 \bar{r}^2} d\bar{r}^2 + \bar{r}^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}. \quad (7.62)$$

On constate que les composantes $g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$ sont indépendantes de \bar{t} . Comme $\vec{\partial}_{\bar{t}}$ est du genre temps et orthogonal aux hypersurfaces $\bar{t} = \text{const}$, les éléments hors diagonale de $(g_{\bar{\alpha}\bar{\beta}})$

étant nuls, on en déduit⁶ que $\vec{\partial}_{\bar{t}}$ est un *vecteur de Killing* traduisant le *caractère statique* de la partie de l'espace-temps de de Sitter couverte par les coordonnées $(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$. Cela justifie le qualificatif de *statiques* donné à ces coordonnées.

Remarquons que la forme (7.62) ressemble beaucoup à l'expression de la métrique de Schwarzschild en coordonnées de Schwarzschild telle que donnée par l'Éq. (3.6) : il suffirait de remplacer $2GM/(c^2 r)$ par $b^2 \bar{r}^2$ dans cette dernière pour obtenir (7.62). En particulier, tout comme la coordonnée de Schwarzschild r , \bar{r} est une coordonnée radiale aérolaire (cf. Remarque p. 59) : elle donne l'aire des sphères $\{\bar{t} = \text{const}, \bar{r} = \text{const}\}$. Tout comme les coordonnées de Schwarzschild en $r = R_S$, les coordonnées $(\bar{t}, \bar{r}, \theta, \varphi)$ sont singulières en $\bar{r} = b^{-1}$. Il s'agit clairement d'une *singularité de coordonnées* (cf. § 5.2.1) puisque l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ se prolonge de manière régulière au delà de la frontière $\bar{r} = b^{-1}$ (cf. Fig. 7.6). Par contre, contrairement au cas de la métrique de Schwarzschild, il n'y a pas de singularité en $\bar{r} = 0$.

7.4 Espace-temps anti-de Sitter (AdS)

7.4.1 Définition

L'*espace-temps anti-de Sitter* (en abrégé *AdS*) est l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ maximale-ment symétrique de courbure scalaire strictement négative. Il a la topologie de \mathbb{R}^4 et est entièrement couvert par les *coordonnées hyperboliques* $(\tau, \rho, \theta, \varphi)$ telles que

$$\tau \in \mathbb{R}, \quad \rho \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[\quad (7.63)$$

et pour lesquelles le tenseur métrique prend la forme suivante :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + b^{-2} [d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)], \quad (7.64)$$

où b est la constante reliée au paramètre κ de l'expression (7.3) par

$$b := \sqrt{-\kappa}. \quad (7.65)$$

On reconnaît dans le terme en facteur de b^{-2} dans (7.64) l'élément de longueur (7.12) de l'espace hyperbolique \mathbb{H}^3 . Du point de vue topologique, l'espace-temps AdS peut être vu comme $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$, tout comme l'espace-temps de de Sitter était $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. Notons d'ailleurs que, puisque \mathbb{H}^3 est homéomorphe à \mathbb{R}^3 (cf. § 7.2.2), la topologie de $\mathbb{R} \times \mathbb{H}^3$ est bien celle de \mathbb{R}^4 .

Remarquons d'emblée que l'espace-temps AdS est *statique* : il est clair sur (7.64) que $\partial g_{\alpha\beta} / \partial \tau = 0$; $\vec{\partial}_\tau$ est donc un vecteur de Killing. De plus, il est du genre temps ($\vec{\partial}_\tau \cdot \vec{\partial}_\tau = g_{00} < 0$) et est orthogonal aux hypersurfaces $\tau = \text{const}$ (car $g_{0i} = 0$). Toutes les conditions invoquées dans la définition d'un espace-temps statique donnée au § 3.2.1 sont donc réunies.

6. Cf. le § 3.2.1 pour la définition d'un espace-temps statique.

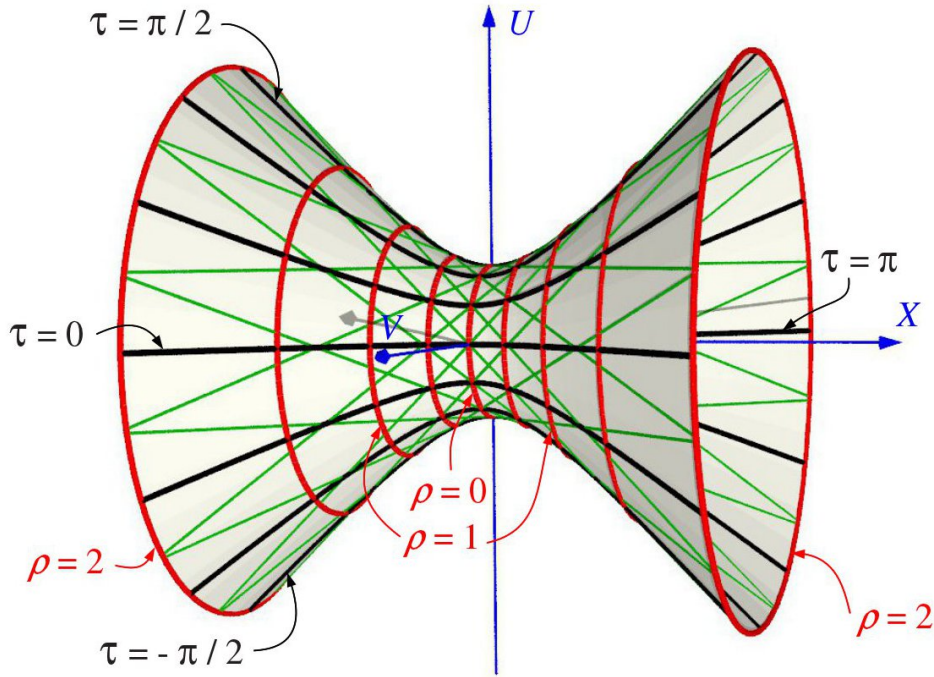


FIGURE 7.7 – Espace-temps anti-de Sitter $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, vu comme un hyperboloïde dans l’espace pseudo-riemannien $\mathbb{R}^{2,3}$. La figure représente en fait seulement la partie $\tau \in [-\pi, \pi]$ de \mathcal{E} . Il s’agit d’une coupe à $\theta = \pi/2$ et $\varphi = 0$ (partie $X \geq 0$) ou $\varphi = \pi$ (partie $X \leq 0$). Les dimensions suivant Y et Z ont été supprimées, de sorte que les lignes $\tau = \text{const}$ (traits noirs) sont en réalité des espaces hyperboliques \mathbb{H}^3 (τ est exprimé en unité de b^{-1}). Les lignes rouges représentent des lignes d’univers d’observateurs à coordonnées (ρ, θ, φ) fixes et les droites en trait fin vert sont des géodésiques lumière, aussi bien pour la métrique \mathbf{g} que pour la métrique pseudo-riemannienne de $\mathbb{R}^{2,3}$.

7.4.2 Immersion isométrique dans $\mathbb{R}^{2,3}$

Tout comme nous avons identifié l’espace-temps de de Sitter à un hyperboloïde dans l’espace de Minkowski à 5 dimensions \mathcal{M}_5 , on peut voir l’espace-temps AdS comme un hyperboloïde « plongé » dans un espace à 5 dimensions. Ce dernier n’est cependant pas \mathcal{M}_5 , mais \mathbb{R}^5 muni de la métrique

$$d\sigma_5^2 = -dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2, \tag{7.66}$$

où (U, V, X, Y, Z) désigne un élément générique de \mathbb{R}^5 . La métrique (7.66) est de signature $(-, -, +, +, +)$. Elle n’est donc ni riemannienne, ni lorentzienne. Elle fait partie de la classe plus générale des métriques pseudo-riemanniennes, c’est-à-dire des formes bilinéaires symétriques non-dégénérées de signature quelconque (cf. § 2.3.1). Nous noterons $\mathbb{R}^{2,3}$ l’espace \mathbb{R}^5 muni de la métrique (7.66).

Remarque : *Suivant cette convention, on pourrait désigner par $\mathbb{R}^{1,4}$ l’espace-temps de Minkowski \mathcal{M}_5 et par $\mathbb{R}^{1,3}$ l’espace-temps de Minkowski usuel (i.e. de dimension 4).*

Considérons donc l'image \mathcal{H} de \mathcal{E} dans $\mathbb{R}^{2,3}$ par l'application Φ définie par

$$\begin{cases} U &= b^{-1} \sin(b\tau) \cosh \rho \\ V &= b^{-1} \cos(b\tau) \cosh \rho \\ X &= b^{-1} \sinh \rho \sin \theta \cos \varphi \\ Y &= b^{-1} \sinh \rho \sin \theta \sin \varphi \\ Z &= b^{-1} \sinh \rho \cos \theta, \end{cases} \quad (7.67)$$

\mathcal{H} est une hypersurface de $\mathbb{R}^{2,3}$. Il est facile de vérifier que (7.67) conduit

$$-U^2 - V^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 = -b^{-2}. \quad (7.68)$$

\mathcal{H} est un hyperboloïde à une nappe (de dimension 4!); il est représenté sur la Fig. 7.7. Remarquons que contrairement à la représentation hyperboloïdale de l'espace-temps de Sitter considérée au § 7.3.2, l'application $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{H}$ n'est pas bijective, en raison des fonctions périodiques de τ présentes dans (7.67).

Montrons que si l'on mesure les distances sur \mathcal{H} à l'aide de la métrique pseudo-riemannienne (7.66) on retrouve la métrique physique (7.64) de l'espace-temps AdS. À cette fin, posons

$$X_0 := \sin \theta \cos \varphi, \quad Y_0 := \sin \theta \sin \varphi, \quad Z_0 := \cos \theta,$$

de sorte que l'on peut écrire, sur \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} dU &= \cos(b\tau) \cosh \rho d\tau + b^{-1} \sin(b\tau) \sinh \rho d\rho \\ dV &= -\sin(b\tau) \cosh \rho d\tau + b^{-1} \cos(b\tau) \sinh \rho d\rho \\ dX &= b^{-1} (\cosh \rho X_0 d\rho + \sinh \rho dX_0) \\ dY &= b^{-1} (\cosh \rho Y_0 d\rho + \sinh \rho dY_0) \\ dZ &= b^{-1} (\cosh \rho Z_0 d\rho + \sinh \rho dZ_0). \end{aligned}$$

On en déduit

$$dU^2 + dV^2 = \cosh^2 \rho d\tau^2 + b^{-2} \sinh^2 \rho d\rho^2$$

et

$$\begin{aligned} dX^2 + dY^2 + dZ^2 &= b^{-2} [\cosh^2 \rho (X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) d\rho^2 \\ &\quad + 2 \sinh \rho \cosh \rho (X_0 dX_0 + Y_0 dY_0 + Z_0 dZ_0) d\rho \\ &\quad + \sinh^2 \rho (dX_0^2 + dY_0^2 + dZ_0^2)]. \end{aligned}$$

Or $X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 = 1$, d'où $X_0 dX_0 + Y_0 dY_0 + Z_0 dZ_0 = 1/2 d(X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2) = 0$. Par ailleurs, $dX_0^2 + dY_0^2 + dZ_0^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$. Il vient donc

$$dX^2 + dY^2 + dZ^2 = b^{-2} [\cosh^2 \rho d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

Au final,

$$-dU^2 - dV^2 + dX^2 + dY^2 + dZ^2 = -\cosh^2 \rho d\tau^2 + b^{-2} [d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].$$

En comparant avec (7.66) et (7.64), on en conclut que

$$\boxed{d\sigma_5^2|_{\mathcal{H}} = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta}. \quad (7.69)$$

L'application $\Phi : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^{2,3}$ définie par (7.67) est donc une isométrie. Par contre, il ne s'agit pas d'un plongement isométrique comme au § 7.3 pour l'espace-temps de de Sitter, car Φ n'établit pas une bijection entre \mathcal{E} et $\mathcal{H} = \Phi(\mathcal{E})$: ainsi que nous l'avons remarqué plus haut, Φ n'est pas injective : elle « enroule » une infinité de fois \mathcal{E} sur \mathcal{H} . Par contre, restreinte au voisinage de n'importe quel point, Φ est bel et bien injective. On dit dans ce cas que Φ est une immersion isométrique de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ dans $\mathbb{R}^{2,3}$, plutôt qu'un plongement isométrique.

7.4.3 Géodésiques lumière

Tout comme au § 7.3.3, limitons-nous aux géodésiques lumière radiales, c'est-à-dire à θ et φ fixés. En annulant l'élément de longueur (7.64), on obtient

$$-\cosh^2 \rho d\tau^2 + b^{-2} d\rho^2 = 0,$$

d'où

$$b d\tau = \pm \frac{d\rho}{\cosh \rho}.$$

Cette relation s'intègre en

$$\boxed{\tau = \tau_0 \pm 2b^{-1} [\arctan(e^\rho) - \arctan(e^{\rho_0})]}, \quad (7.70)$$

où les constantes τ_0 et ρ_0 sont telles que $\tau = \tau_0$ si $\rho = \rho_0$. La relation ci-dessus s'inverse facilement :

$$\boxed{\rho = \ln \tan \left[\pm \frac{b(\tau - \tau_0)}{2} + \arctan(e^{\rho_0}) \right]}. \quad (7.71)$$

On obtient donc deux familles de géodésiques lumière radiale, suivant le signe \pm dans (7.71) ; nous qualifierons de sortantes celles pour lesquelles ρ est une fonction croissante de τ (signe +) et d'entrantes celles pour lesquelles ρ est une fonction décroissante de τ (signe -).

On constate que les formules (7.70) et (7.33) sont analogues, via les échanges $b\tau \leftrightarrow \chi$ et $\rho \leftrightarrow b\tau$. En effectuant les mêmes transpositions dans les résultats (7.34)-(7.34), on obtient immédiatement

$$\begin{aligned} \cos(b\tau) &= \frac{\cos(b\tau_0) (1 + \sinh \rho \cosh \rho) \mp \sin(b\tau_0) (\sinh \rho - \sinh \rho_0)}{\cosh \rho \cosh \rho_0} \\ \sin(b\tau) &= \frac{\sin(b\tau_0) (1 + \sinh \rho \cosh \rho) \pm \cos(b\tau_0) (\sinh \rho - \sinh \rho_0)}{\cosh \rho \cosh \rho_0}. \end{aligned}$$

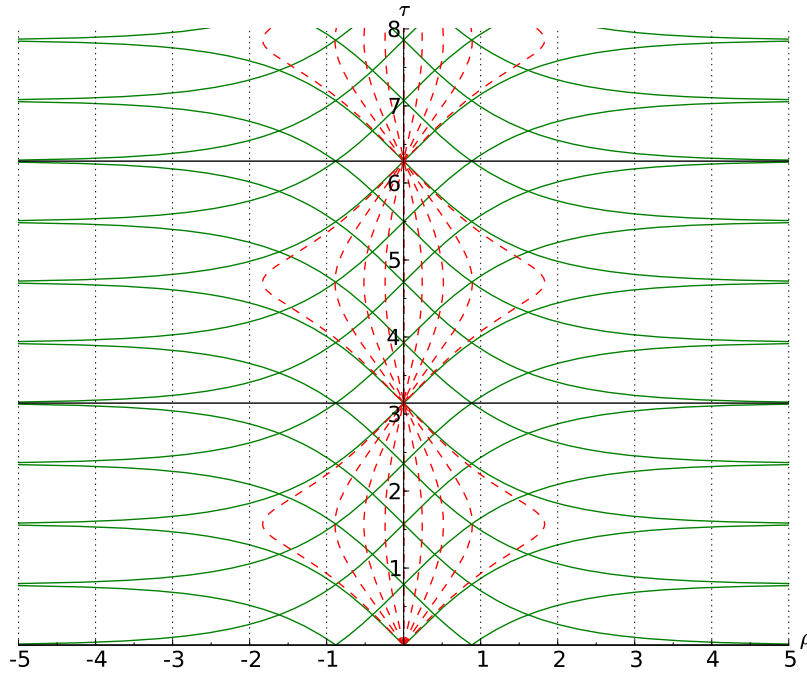


FIGURE 7.8 – Géodésiques lumière radiales (courbes vertes) et géodésiques temporelles issues de la ligne d’univers $\rho = 0$ (courbes en tirets rouges) dans l’espace-temps anti-de Sitter représenté dans le plan (τ, ρ) . Par convention, les valeurs négatives de ρ correspondent à $\varphi = \pi$, les valeurs positives correspondant à $\varphi = 0$. L’échelle de τ est en unité de b^{-1} .

En reportant ces expressions dans (7.67), on obtient l’équation paramétrique des géodésiques radiales dans les coordonnées de $\mathbb{R}^{2,3}$:

$$\begin{cases} U = (b \cosh \rho_0)^{-1} \{ [\sin(b\tau_0) \sinh \rho_0 \pm \cos(b\tau_0)] \lambda + \sin(b\tau_0) \mp \cos(b\tau_0) \sinh \rho_0 \} \\ V = (b \cosh \rho_0)^{-1} \{ [\cos(b\tau_0) \sinh \rho_0 \mp \sin(b\tau_0)] \lambda + \cos(b\tau_0) \pm \sin(b\tau_0) \sinh \rho_0 \} \\ X = b^{-1}(\sin \theta \cos \varphi) \lambda \\ Y = b^{-1}(\sin \theta \sin \varphi) \lambda \\ Z = b^{-1}(\cos \theta) \lambda, \end{cases} \quad (7.72)$$

où nous avons utilisé le paramètre $\lambda := \sinh \rho$ plutôt que ρ . Le domaine de variation de λ étant \mathbb{R} , il est clair que (7.72) constitue l’équation d’une *droite* de $\mathbb{R}^{2,3}$. Nous retrouvons ainsi la même propriété que pour l’espace-temps de de Sitter (cf. § 7.3.3) : les géodésiques lumière radiales sont des droites de l’espace ambiant. De plus, l’immersion étant isométrique, ce sont des droites lumière de la métrique ambiante. Ces droites sont représentées sur la Fig. 7.7. Puisqu’elles génèrent \mathcal{H} , on retrouve le fait que l’hyperboloïde à une nappe est une surface réglée.

7.4.4 Propriétés causales

Les géodésiques lumière sont aussi représentées sur la Fig. 7.8 dans le plan-coordonnées (τ, ρ) . Elles n’apparaissent alors pas comme des droites mais comme le graphe de la

fonction (7.70). Contrairement au cas de l'espace-temps de de Sitter, on constate sur cette figure que tout observateur fixe dans les coordonnées (ρ, θ, φ) n'a ni horizon des particules, ni horizon des événements. Plus précisément désignons par \mathcal{O} l'observateur de coordonnée $\rho = 0$. La coordonnée τ n'est alors pas autre chose que son temps propre (cf. (7.64) avec $\rho = 0$). La nappe du passé du cône de lumière de \mathcal{O} à l'instant τ_0 , désignée par $\mathcal{C}^-(\tau_0)$, est obtenue en faisant $\rho_0 = 0$ dans (7.71) et en y choisissant le signe $-$:

$$\mathcal{C}^-(\tau_0) : \quad \rho = \ln \tan \left[\frac{\pi}{4} - \frac{b(\tau - \tau_0)}{2} \right]. \quad (7.73)$$

Il est clair sur cette expression que

$$\lim_{\tau \rightarrow (\tau_1)^+} \rho = +\infty, \quad \text{où } \tau_1 := \tau_0 - \frac{\pi}{2b}$$

et la notation $\tau \rightarrow (\tau_1)^+$ signifie que τ tend vers τ_1 par valeurs supérieures. Ainsi le cône de lumière passé $\mathcal{C}^-(\tau_0)$ balaye toutes les lignes d'univers des particules comobiles (i.e. de coordonnées (ρ, θ, φ) fixes). L'observateur \mathcal{O} n'a donc pas d'horizon des particules tel que défini au § 7.3.4. De même, il est clair sur (7.71) que, quel que soit le lieu (τ_0, ρ_0) d'émission d'une géodésique lumière radiale entrante, cette dernière finira toujours par rencontrer la ligne d'univers de \mathcal{O} (i.e. atteindre $\rho = 0$). L'observateur \mathcal{O} n'a donc pas d'horizon des événements.

Une propriété des cônes de lumière apparaît clairement sur la Fig. 7.8 et peut être quantifiée grâce à l'Éq. (7.70) : une géodésique lumière sortante émise par \mathcal{O} à un instant τ_0 n'atteint jamais la région d'espace-temps définie par $\tau \geq \tau_0 + \pi/(2b)$. Une conséquence est que le *problème de Cauchy*, c'est-à-dire l'évolution à partir de données initiales sur l'hypersurface $\tau = 0$, est mal posé. On dit que l'espace-temps AdS n'est pas *globalement hyperbolique*.

Une autre « pathologie » de l'espace-temps AdS apparaît sur la Fig. 7.8, sur laquelle on a dessiné les géodésiques temporelles radiales⁷ issues de la ligne d'univers de \mathcal{O} : on constate qu'après s'être éloignées de \mathcal{O} , elles reconvergent vers \mathcal{O} au bout d'un intervalle de temps propre de \mathcal{O} égal à πb^{-1} , et ce quelles que soient leurs vitesses initiales par rapport à \mathcal{O} . Physiquement cela signifie qu'un observateur \mathcal{O}' qui quitte \mathcal{O} à un instant τ_0 et qui ne subit aucune accélération, hormis celle au moment de son départ⁸, reviendra nécessairement vers \mathcal{O} à l'instant $\tau_0 + \pi b^{-1}$, comme s'il était « repoussé par l'infini ». Il dépasse ensuite \mathcal{O} et part dans le sens opposé à celui de son départ. Il reviendra de nouveau vers \mathcal{O} à l'instant $\tau_0 + 2\pi b^{-1}$, cette fois-ci dans le même sens qu'au départ, entamant ainsi un cycle d'oscillations sans fin autour de \mathcal{O} .

Un autre enseignement de la Fig. 7.8 est que, du point de vue du temps propre de \mathcal{O} , il faut un temps fini, précisément $\pi/(2b)$, à un photon pour venir de l'infini jusqu'à \mathcal{O} .

7. Nous n'avons pas établi ici l'équation de telles géodésiques ; on peut montrer (cf. par exemple [40]) qu'en terme de l'espace ambiant $\mathbb{R}^{2,3}$ les géodésiques de \mathcal{E} s'obtiennent comme l'intersection de l'hyperboloïde \mathcal{H} par des plans de $\mathbb{R}^{2,3}$. Le cas limite des plans tangents donne les géodésiques lumière, ce qui explique pourquoi ces dernières sont des droites. Les géodésiques issues de \mathcal{O} correspondent à des plans qui passent par l'origine $(0, 0, 0, 0)$ de $\mathbb{R}^{2,3}$.

8. On peut imaginer un lancement de fusée avec coupure du moteur peu après le décollage, de sorte qu'ensuite \mathcal{O}' est un observateur inertiel et se déplace donc sur une géodésique temporelle.

Cette propriété met en relation directe la « frontière » située en $\rho = +\infty$ de de l'espace-temps AdS avec son intérieur et est à l'origine de la fameuse *correspondance AdS/CFT*, également appelée *conjecture de Maldacena*, débattue en théorie des cordes.

Pour plus de détails sur l'espace-temps anti-de Sitter on pourra consulter les Réf. [38], [40] et [62].

7.5 Solutions de Friedmann-Lemaître

Ayant examiné les solutions maximales symétriques, nous passons à présent aux solutions qui ont un degré de symétrie un peu plus faible : les espaces-temps spatialement homogènes et isotropes. Ils représentent une bonne approximation de l'univers dans lequel nous vivons et sont à la base de la cosmologie moderne.

7.5.1 Espaces-temps spatialement homogènes et isotropes

La cosmologie standard est basée sur le

Principe cosmologique : l'Univers est spatialement homogène et spatialement isotrope.

Pour comprendre cet énoncé, il va nous falloir quelques petites définitions. Tout d'abord, afin de donner un sens au qualificatif *spatialement*, introduisons la notion de *feuilletage spatial* (on dit aussi *feuilletage 3+1*) de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$: on suppose qu'il existe une famille à un paramètre réel $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hypersurfaces spatiales deux à deux disjointes et telles que

$$\mathcal{E} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t. \quad (7.74)$$

La *métrique induite* γ sur chaque Σ_t n'est autre que la restriction de \mathbf{g} à Σ_t : en désignant par $\mathcal{T}_P(\Sigma_t)$ l'espace tangent à Σ_t , on a donc

$$\forall(\vec{v}, \vec{w}) \in \mathcal{T}_P(\Sigma_t) \times \mathcal{T}_P(\Sigma_t), \quad \gamma(\vec{v}, \vec{w}) = \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w}). \quad (7.75)$$

Que Σ_t soit une *hypersurface spatiale* signifie que γ est une métrique riemannienne, i.e. définie positive, autrement dit, de signature $(+, +, +)$. La normale à Σ_t en chaque point est alors nécessairement un vecteur du genre temps.

On dit qu'un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est *spatialement homogène* s'il peut être feuilleté par une famille $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$ d'hypersurfaces spatiales telles que, pour tout $t \in \mathbb{R}$ et tout couple (M, N) de points dans Σ_t , il existe une isométrie⁹ de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ qui fasse passer de M à N . Cela signifie que tous les points de Σ_t sont équivalents. L'espace tridimensionnel (Σ_t, γ) , où γ est la métrique induite par \mathbf{g} sur Σ_t , est ainsi un espace homogène au sens défini au § 7.2.1.

La notion d'isotropie spatiale qui intervient dans le Principe cosmologique est quant à elle basée sur une congruence de lignes d'univers. Par *congruence*, on entend une famille de

9. Rappelons que la notion d'isométrie a été définie au § 7.2.1.

courbes de \mathcal{E} telle qu'en chaque point de \mathcal{E} , il passe une, et exactement une, courbe de la famille. On appelle congruence d'observateurs une congruence dont toutes les courbes sont du genre temps ; on peut alors les considérer comme des lignes d'univers d'observateurs. On dit qu'un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est spatialement isotrope ssi il existe une congruence d'observateurs telle qu'en tout point $M \in \mathcal{E}$, si $\vec{u}(M)$ désigne la 4-vitesse de l'observateur de la congruence qui passe par M , et \vec{v} et \vec{w} deux vecteurs orthogonaux à $\vec{u}(M)$, il existe une isométrie qui laisse M et $\vec{u}(M)$ invariants et transforme \vec{v} en un vecteur colinéaire à \vec{w} .

Si l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est à la fois spatialement homogène et spatialement isotrope, les lignes d'univers des observateurs \mathcal{O} définissant l'isotropie sont nécessairement orthogonales aux hypersurfaces Σ_t définissant l'homogénéité spatiale. On qualifie les observateurs \mathcal{O} d'observateurs cosmiques et leur temps propre de temps cosmique. On peut choisir le paramètre t d'étiquetage des hypersurfaces Σ_t comme le temps cosmique et écrire la métrique sous la forme

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad (7.76)$$

où les coordonnées (x^i) décrivent chaque hypersurface Σ_t . L'hypothèse d'homogénéité spatiale signifie que (Σ_t, γ) est un espace homogène et l'hypothèse d'isotropie spatiale implique qu'il s'agit également d'un espace isotrope. (Σ_t, γ) est ainsi un espace maximalement symétrique de dimension 3. Il s'agit donc d'un des trois types discutés au § 7.2.2 :

$$\gamma_{ij} dx^i dx^j = \begin{cases} a(t)^2 [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] & (\text{espace euclidien } \mathbb{R}^3) \\ a(t)^2 [d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] & (\text{hypersphère } \mathbb{S}^3) \\ a(t)^2 [d\rho^2 + \sinh^2 \rho(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] & (\text{espace hyperbolique } \mathbb{H}^3). \end{cases} \quad (7.77)$$

Par rapport aux éléments de longueur présentés au § 7.2.2, on a ajouté un facteur d'échelle $a(t) > 0$, qui est constant sur une hypersurface Σ_t donnée et donc ne change pas son caractère d'espace maximalement symétrique ; par contre, $a(t)$ peut varier d'une hypersurface Σ_t à l'autre, d'où sa dépendance explicite en t .

On peut mettre les trois éléments de longueur (7.77) sous une forme commune. Posons en effet, dans le cas de \mathbb{S}^3 ,

$$r := \sin \chi.$$

Puisque $\chi \in [0, \pi]$ [cf. (7.6)], $r \in [0, 1]$. Remarquons que l'application $[0, \pi] \rightarrow [0, 1]$, $\chi \mapsto r$ n'est pas bijective : chaque élément de $[0, 1[$ a deux antécédents. Par conséquent, le système de coordonnées (r, θ, φ) ne couvre qu'une moitié de \mathbb{S}^3 , par exemple la moitié $\chi \in [0, \pi/2]$. Il faut une deuxième carte (r, θ, φ) pour couvrir la partie $\chi \in [\pi/2, \pi]$. On a $dr = \cos \chi d\chi$ et $d\chi^2 = dr^2/(1 - r^2)$, si bien que

$$d\chi^2 + \sin^2 \chi(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \frac{dr^2}{1 - r^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (7.78)$$

Dans le cas de \mathbb{H}^3 , posons

$$r := \sinh \rho.$$

Puisque ρ décrit \mathbb{R} tout entier [cf. (7.10)], il en est de même de r . L'application \sinh étant une bijection $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, le système de coordonnées (r, θ, φ) couvre \mathbb{H}^3 tout entier, contrairement à son analogue sur \mathbb{S}^3 . Il vient $dr = \cosh \rho d\rho$ et $d\rho^2 = dr^2/(1+r^2)$, si bien que

$$d\rho^2 + \sinh^2 \rho (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \frac{dr^2}{1+r^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (7.79)$$

Au vu de (7.77), (7.78) et (7.79), on peut réécrire (7.76) comme

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + a(t)^2 \left[\frac{dr^2}{1+kr^2} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right], \quad (7.80)$$

où k est une constante qui ne peut prendre que trois valeurs :

$$k = \begin{cases} 0 & \text{pour } \mathbb{R}^3 \text{ euclidien} \\ 1 & \text{pour } \mathbb{S}^3 \\ -1 & \text{pour } \mathbb{H}^3. \end{cases} \quad (7.81)$$

La métrique (7.80) est appelée *métrique de Robertson-Walker*, ou encore *métrique de Friedmann-Lemaître-Robertson-Walker (FLRW)*. Elle décrit les espaces-temps spatialement homogènes et isotropes les plus généraux¹⁰. Notons qu'elle ne dépend que de la constante $k \in \{-1, 0, 1\}$ et d'une fonction scalaire $a(t)$.

Remarque : La coordonnée r est sans dimension et le facteur d'échelle $a(t)$ possède la dimension d'une longueur. Dans le cas $k = 0$, on pourrait aussi choisir d'avoir r de la dimension d'une longueur (comme une coordonnée radiale usuelle) et $a(t)$ sans dimension.

En tant qu'espace maximale symétrique, chaque hypersurface (Σ_t, γ) a une courbure constante (cf. § 7.2.1). La constante de courbure κ introduite dans (7.3) est liée à k par

$$\kappa = \frac{k}{a(t)^2}. \quad (7.82)$$

En effet, nous avons vu au § 7.2.2 que pour \mathbb{S}^3 , $\kappa = 1$ et pour \mathbb{H}^3 , $\kappa = -1$. Comme lorsque $k \neq 0$, (Σ_t, γ) ne diffère de \mathbb{S}^3 ou \mathbb{H}^3 que par le facteur d'échelle $a(t)$, on en déduit (7.82). Le scalaire de courbure¹¹ 3R des hypersurfaces (Σ_t, γ) s'exprime via la formule (7.4) avec $n = 3$:

$${}^3R = 6\kappa = \frac{6k}{a(t)^2}. \quad (7.83)$$

10. du moins dans le cas de topologies simplement connexes, sinon il s'agit d'une description uniquement locale

11. La notation 3R vient rappeler qu'il s'agit du scalaire de courbure des espaces tridimensionnels (Σ_t, γ) , à ne pas confondre avec le scalaire de courbure R de l'espace-temps tout entier (\mathcal{E}, g) .

7.5.2 Équations de Friedmann

Ayant écrit la forme la plus générale de métrique qui satisfait au principe cosmologique, nous pouvons former l'équation d'Einstein. Cette dernière va donner un système d'équations différentielles pour la fonction $a(t)$. Il faut au préalable fixer le membre de droite de l'équation d'Einstein, à savoir le tenseur énergie-impulsion \mathbf{T} . Choisissons le modèle fluide parfait pour ce dernier (cf. § 4.4.2) :

$$\mathbf{T} = (\rho c^2 + p) \underline{\mathbf{u}} \otimes \underline{\mathbf{u}} + p \mathbf{g}. \quad (7.84)$$

Pour être en accord avec le principe cosmologique, le fluide doit être immobile par rapport aux observateurs cosmiques (sinon il définirait une direction privilégiée, en contradiction avec l'hypothèse d'isotropie). La 4-vitesse du fluide est donc nécessairement égale à celle des observateurs cosmiques. D'après (7.80), cette dernière est $c^{-1} \vec{\partial}_t = \vec{\partial}_0$. On a donc

$$\boxed{\vec{\mathbf{u}} = \vec{\partial}_0}, \quad (7.85)$$

soit en composantes par rapport au système de coordonnées $(x^0 = ct, r, \theta, \varphi)$,

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0). \quad (7.86)$$

Par ailleurs, l'hypothèse d'homogénéité spatiale implique que ρ et p sont des quantités constantes sur une hypersurface Σ_t donnée ; ce ne sont donc que des fonctions de t :

$$\boxed{\rho = \rho(t)} \quad \text{et} \quad \boxed{p = p(t)} \quad (7.87)$$

Au vu de (7.84), (7.86) et (7.80), les composantes du tenseur énergie-impulsion s'écrivent

$$\begin{aligned} T_{00} &= \rho c^2 \\ T_{rr} &= p \frac{a^2}{1 - kr^2} \\ T_{\theta\theta} &= pa^2 r^2 \\ T_{\varphi\varphi} &= pa^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned} \quad (7.88)$$

Toutes les autres composantes sont nulles.

Pour calculer le tenseur d'Einstein, commençons par évaluer les symboles de Christoffel de \mathbf{g} par rapports aux coordonnées (ct, r, θ, φ) . En appliquant la formule (2.130) aux composantes de \mathbf{g} lues sur (7.80), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{rr} &= \frac{a\dot{a}}{c(1 - kr^2)} & \Gamma^0_{\theta\theta} &= \frac{a\dot{a}r^2}{c} & \Gamma^0_{\varphi\varphi} &= \frac{a\dot{a}r^2}{c} \sin^2 \theta \\ \Gamma^r_{0r} &= \Gamma^r_{r0} = \frac{\dot{a}}{ca} & \Gamma^r_{rr} &= \frac{kr}{1 - kr^2} & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r(1 - kr^2) & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r(1 - kr^2) \sin^2 \theta \\ \Gamma^\theta_{0\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta 0} = \frac{\dot{a}}{ca} & \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r} & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\sin \theta \cos \theta \\ \Gamma^\varphi_{0\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi 0} = \frac{\dot{a}}{ca} & \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{1}{r} & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan \theta}, \end{aligned} \quad (7.89)$$

où l'on a utilisé la notation

$$\dot{a} := \frac{da}{dt}. \quad (7.90)$$

Les symboles de Christoffel qui ne figurent pas ci-dessus sont identiquement nuls. À titre de vérification, on note que lorsque $k = 0$ et $a(t) = 1$ ($\Rightarrow \dot{a} = 0$), on retrouve (4.67)-(4.69), comme il se doit.

Les composantes du tenseur de Ricci se déduisent de (7.89) via la formule (4.110); on obtient

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \\ R_{rr} &= \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k}{c^2(1 - kr^2)} \\ R_{\theta\theta} &= \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) \\ R_{\varphi\varphi} &= \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (7.91)$$

avec bien entendu $\ddot{a} := d^2a/dt^2$. Toutes les autres composantes sont identiquement nulles. On en déduit le scalaire de courbure :

$$\begin{aligned} R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu} &= (-1) \times \left(-\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} \right) + \frac{1 - kr^2}{a^2} \times \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k}{c^2(1 - kr^2)} \\ &\quad + \frac{1}{a^2 r^2} \times \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) + \frac{1}{a^2 r^2 \sin^2 \theta} \times \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) \sin^2 \theta, \end{aligned}$$

soit

$$R = \frac{6}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right]. \quad (7.92)$$

À partir de (7.91), (7.92), (7.80) et (7.88), les composantes de l'équation d'Einstein (7.1) s'écrivent

$$\begin{aligned} 00 : & \quad -\frac{3}{c^2} \frac{\ddot{a}}{a} - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right] (-1) + \Lambda(-1) = \frac{8\pi G}{c^2} \rho \\ rr : & \quad \frac{a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k}{c^2(1 - kr^2)} - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right] \frac{a^2}{1 - kr^2} + \frac{\Lambda a^2}{1 - kr^2} = \frac{8\pi G}{c^4} p \frac{a^2}{1 - kr^2} \\ \theta\theta : & \quad \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right] a^2 r^2 + \Lambda a^2 r^2 = \frac{8\pi G}{c^4} p a^2 r^2 \\ \varphi\varphi : & \quad \frac{r^2}{c^2}(a\ddot{a} + 2\dot{a}^2 + 2c^2k) \sin^2 \theta - \frac{3}{c^2} \left[\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right] a^2 r^2 \sin^2 \theta + \Lambda a^2 r^2 \sin^2 \theta \\ & \quad = \frac{8\pi G}{c^4} p a^2 r^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

Toutes les autres composantes sont nulles. On constate que l'on n'a que deux composantes indépendantes, par exemple les composantes 00 et rr :

$$\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{c^2 \Lambda}{3} \quad (7.93)$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} \right] = -\frac{4\pi G}{c^2} p + \frac{c^2 \Lambda}{2}. \quad (7.94)$$

En reportant (7.93) dans (7.94), on peut réécrire ce système comme

$$\boxed{\left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{c^2 k}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\rho + \frac{c^2 \Lambda}{3}} \quad (7.95)$$

$$\boxed{\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} \left(\rho + 3\frac{p}{c^2}\right) + \frac{c^2 \Lambda}{3}} \quad (7.96)$$

Ces équations sont appelées *équations de Friedmann*.

Remarque : Quand on parle de l'équation de Friedmann, sans plus de précision, il s'agit de l'Éq. (7.95). L'Éq. (7.96) est alors qualifiée de *seconde équation de Friedmann*.

Les équations de Friedmann constituent un système de deux équations différentielles pour les fonctions $a(t)$, $\rho(t)$ et $p(t)$. On complète le système en se donnant une équation d'état :

$$p = p(\rho). \quad (7.97)$$

Un exemple d'équation d'état souvent utilisée est

$$\boxed{p = w\rho c^2}, \quad (7.98)$$

où w est une constante. On distingue trois cas particuliers :

- $w = -1$: équation d'état dite « du vide » car elle implique un tenseur énergie-impulsion de la forme $\mathbf{T} = -\rho c^2 \mathbf{g}$ [faire $p = -\rho c^2$ dans (7.84)], ce qui correspond au tenseur énergie-impulsion moyen des fluctuations du vide en théorie quantique des champs ;
- $w = 0$: matière sans pression (« poussière ») ;
- $w = 1/3$: radiation électromagnétique.

En dérivant (7.95) par rapport à t et remplaçant \ddot{a} par (7.96), on obtient une relation très simple impliquant la dérivée temporelle de ρ :

$$\boxed{\dot{\rho} = -3\frac{\dot{a}}{a} \left(\rho + \frac{p}{c^2}\right)}. \quad (7.99)$$

Dans le cas d'une équation d'état de la forme (7.98), cette relation devient

$$\frac{\dot{\rho}}{\rho} = -3(1+w)\frac{\dot{a}}{a},$$

ce qui s'intègre immédiatement en

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^{3(1+w)}, \quad (7.100)$$

où ρ_0 et a_0 sont deux constantes. En reportant cette expression de ρ dans l'équation de Friedmann (7.95), on obtient une équation différentielle qui ne fait intervenir que la fonction $a(t)$.

7.5.3 Solutions de Friedmann-Lemaître

Les solutions des équations de Friedmann (et donc de l'équation d'Einstein!) sont appelées *solutions de Friedmann-Lemaître*. Pour les décrire, on introduit généralement le paramètre de Hubble

$$H(t) := \frac{\dot{a}}{a} \quad (7.101)$$

et le paramètre de décélération

$$q(t) := -\frac{a\ddot{a}}{\dot{a}^2}. \quad (7.102)$$

$H(t)$ a la dimension de l'inverse d'un temps, alors que $q(t)$ est sans dimension. On introduit également le paramètre de densité

$$\Omega(t) := \frac{8\pi G\rho(t)}{3H(t)^2} \quad (7.103)$$

et

$$\Omega_\Lambda(t) := \frac{c^2\Lambda}{3H(t)^2}. \quad (7.104)$$

$\Omega(t)$ et $\Omega_\Lambda(t)$ sont deux paramètres sans dimension, en terme desquels la première équation de Friedmann [Éq. (7.95)] se réécrit comme

$$\frac{c^2k}{H^2a^2} = \Omega + \Omega_\Lambda - 1. \quad (7.105)$$

On en déduit que la courbure des sections spatiales Σ_t est donnée par la position de $\Omega + \Omega_\Lambda$ relativement à 1 [cf. (7.81)] :

$$\Omega + \Omega_\Lambda < 1 \iff \Sigma_t \sim \mathbb{H}^3 \quad (7.106)$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda = 1 \iff \Sigma_t \sim \mathbb{R}^3 \text{ euclidien} \quad (7.107)$$

$$\Omega + \Omega_\Lambda > 1 \iff \Sigma_t \sim \mathbb{S}^3. \quad (7.108)$$

Le modèle d'univers correspondant à (7.106) (resp. (7.108)) est qualifié d'*ouvert* (resp. *fermé*). Le cas (7.107) est appelé *plat*. Notons d'emblée que la platitude en question est

celle des sections spatiales Σ_t et non de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ dans son ensemble : pour la topologie \mathbb{R}^3 , ce dernier n'est plat (tenseur de Riemann identiquement nul) que s'il s'agit de l'espace-temps de Minkowski.

Examinons à présent quelques solutions de Friedmann-Lemaître particulièrement simples.

Univers d'Einstein

L'*univers d'Einstein* s'obtient en cherchant une solution statique des équations de Friedmann :

$$a(t) = a_0, \quad \rho(t) = \rho_0, \quad p(t) = p_0, \quad (7.109)$$

où a_0 , ρ_0 et p_0 sont trois constantes. Remarquons tout d'abord qu'avec $a(t) = a_0$, la métrique de Robertson-Walker (7.80) obéit bien à la définition d'une métrique statique donnée au § 3.2.1. On a $\dot{a} = 0$ et $\ddot{a} = 0$, si bien que la seconde équation de Friedmann [Éq. (7.96)] conduit à

$$\Lambda = \frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho_0 + 3\frac{p_0}{c^2} \right). \quad (7.110)$$

Cela montre qu'en dehors du vide ($\rho_0 = 0$ et $p_0 = 0$) une solution statique ne peut exister qu'avec une constante cosmologique non nulle (et même strictement positive pour de la matière non-exotique, c'est-à-dire satisfaisant à $\rho_0 + 3p_0/c^2 > 0$).

En reportant (7.110) dans la première équation de Friedmann [Éq. (7.95)] avec $\dot{a} = 0$, il vient

$$\frac{k}{a_0^2} = \frac{4\pi G}{c^2} \left(\rho_0 + \frac{p_0}{c^2} \right). \quad (7.111)$$

Si la matière qui emplit l'espace-temps satisfait à la condition d'énergie faible stricte (cf. § 4.4.2), alors $\rho_0 + p_0/c^2 > 0$ et l'équation ci-dessus implique $k > 0$. Étant données les trois valeurs possibles de k [cf. (7.81)], on a donc nécessairement $k = 1$. Autrement dit les sections spatiales de l'univers d'Einstein sont compactes et la topologie de \mathcal{E} est $\mathbb{R} \times \mathbb{S}^3$. L'Éq. (7.111) fournit le facteur d'échelle en fonction du contenu en matière :

$$a_0^2 = \frac{c^2}{4\pi G (\rho_0 + p_0/c^2)}. \quad (7.112)$$

Espace-temps de de Sitter

Cherchons une solution vide de matière : $\rho = 0$ et $p = 0$, avec des sections spatiales plates : $k = 0$, mais avec une constante cosmologique non nulle : $\Lambda \neq 0$ (le cas $\Lambda = 0$ conduirait à l'espace-temps de Minkowski). Sous ces hypothèses, l'équation de Friedmann (7.95) se réduit à

$$\left(\frac{\dot{a}}{a} \right)^2 = \frac{c^2 \Lambda}{3}.$$

Cela implique $\Lambda \geq 0$. Comme de plus Λ est constante, la solution est immédiate :

$$a(t) = a_0 e^{H_0 t}, \quad \text{avec } H_0 := c \sqrt{\frac{\Lambda}{3}}. \quad (7.113)$$

En reportant dans (7.80) avec $k = 0$, il vient

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + a_0^2 e^{2H_0 t} [dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)]. \quad (7.114)$$

On reconnaît la métrique de l'espace-temps de de Sitter donnée par (7.54), pourvu que l'on effectue le changement de notation $t \mapsto ct$ et $r \mapsto a_0 r$. Le paramètre noté b dans (7.54) n'est autre que H_0/c . On le vérifie d'ailleurs aisément puisque (7.24) et (7.19) conduisent à $b = \sqrt{\Lambda/3}$, ce qui au vu de (7.113), donne bien $b = H_0/c$.

Comme on l'a remarqué au § 7.3.5, les coordonnées (t, r, θ, φ) , appelée *coordonnées de Lemaître* dans le cas présent, ne couvrent qu'une partie de l'espace-temps de de Sitter : celle représentée en rouge sur la Fig. 7.5.

Espace-temps d'Einstein-de Sitter

L'*espace-temps d'Einstein-de Sitter* correspond à une solution sans pression ($p = 0$), à constante cosmologique nulle ($\Lambda = 0$) et à sections spatiales plates ($k = 0$). L'hypothèse $p = 0$ correspond à $w = 0$ dans l'Éq. (7.100) ; cette dernière donne donc

$$\rho(t) = \rho_0 \left[\frac{a_0}{a(t)} \right]^3. \quad (7.115)$$

En reportant cette valeur de $\rho(t)$ dans l'équation de Friedmann (7.95) où l'on fait $k = 0$ et $\Lambda = 0$, il vient

$$a\dot{a}^2 = \frac{8\pi G\rho_0}{3} a_0^3,$$

soit

$$a^{1/2}\dot{a} = \left(\frac{8\pi G\rho_0}{3} \right)^{1/2} a_0^{3/2}.$$

Cette équation s'intègre aisément en

$$a(t) = a_0 \left(\frac{t}{T_0} \right)^{2/3}, \quad (7.116)$$

avec $T_0 := (6\pi G\rho_0)^{-1/2}$ et la constante d'intégration fixée un choix d'origine de la coordonnée t . Puisque $a(t) \rightarrow 0$ lorsque $t \rightarrow 0$, l'espace-temps d'Einstein-de Sitter est un modèle avec big-bang, contrairement à l'univers d'Einstein et à l'espace-temps de de Sitter.

Autres solutions

Nous renvoyons leur discussion aux cours de cosmologie (cours de Simona Mei (TC1) ou de Jim Bartlett (Th5), ainsi que les manuels [16, 15, 8]).

Annexe A

Relativité et GPS

version 2013-2014

Sommaire

A.1 Introduction	203
A.2 Principe du système GPS et nécessité d'une description relativiste	203
A.3 Traitement relativiste	205

A.1 Introduction

Le système de positionnement GPS (*Global Positioning System*), son équivalent russe GLONASS (*GLObal NAVigation Satellite System*), ainsi que le projet européen GALILEO, sont des applications technologiques (les seules ?) de la relativité générale. Le niveau de précision de positionnement requis (~ 1 m à la surface du globe) est en effet tel que la prise en compte des effets relativistes dans le champ gravitationnel de la Terre est indispensable. Nous présentons ici un traitement simplifié du système GPS, qui met l'accent sur les effets relativistes. On pourra également consulter le livre récent de P. Spagnou [12] pour une discussion du GPS dans le cadre d'une introduction à la relativité.

A.2 Principe du système GPS et nécessité d'une description relativiste

Le système GPS est basé sur une constellation de 24 satellites (appelés NAVSTAR) répartis sur 6 orbites circulaires de période 12 h (ce qui correspond à un rayon $r_{\text{sat}} = 26561$ km $= 4.16 R_{\oplus}$, où R_{\oplus} désigne le rayon de la Terre : $R_{\oplus} = 6378$ km) (cf. Fig. A.1). Chaque satellite transporte une horloge atomique au césium et il émet un signal radio qui comprend la « date » d'émission et ses trois coordonnées spatiales (déduites des

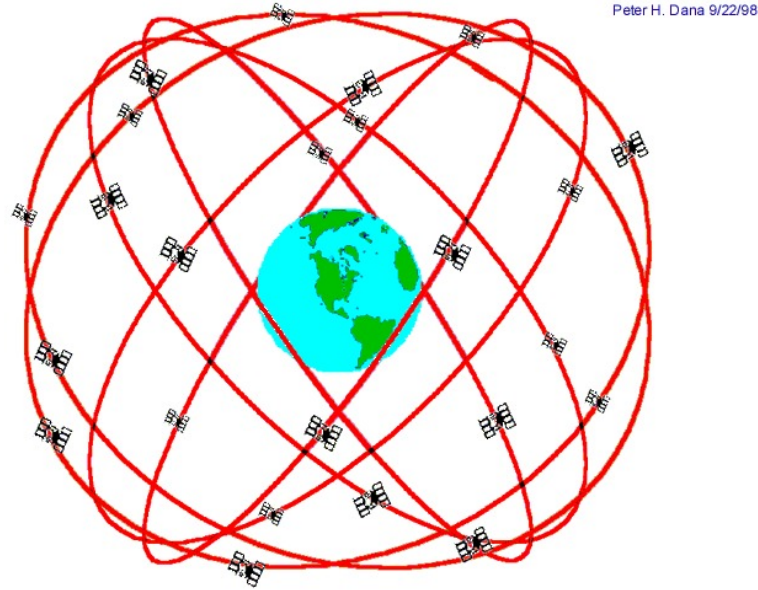


FIGURE A.1 – Configuration du système GPS : les 24 satellites sont répartis 4 par 4 sur 6 orbites circulaires de rayon $r = 26561 \text{ km} = 4.16 R_{\oplus}$ (période orbitale $T = 12 \text{ h}$) et inclinées chacune de 55 degrés par rapport au plan équatorial [source : Peter H. Dana, The Geographer's Craft Project, Department of Geography, The University of Colorado at Boulder, http://www.colorado.edu/geography/gcraft/notes/gps/gps_f.html].

éphémérides liées à son orbite). Un observateur sur Terre qui reçoit les signaux d'au moins quatre satellites peut alors déduire sa position. Par exemple, si l'espace était plat, l'observateur qui recevrait au même instant les signaux de quatre satellites déduirait sa position \vec{r} en résolvant le système de 4 équations :

$$\|\vec{r} - \vec{r}_i\| - c(t - t_i) = 0, \quad i \in \{1, 2, 3, 4\}, \quad (\text{A.1})$$

où (t_i, \vec{r}_i) est la date et position d'émission encodées dans le signal du satellite no. i . Les 4 inconnues sont les 3 composantes du vecteur position \vec{r} et la date t de réception simultanée des quatre signaux. Si l'observateur était muni d'une horloge atomique synchronisée avec celles des satellites, elle fournirait t et 3 satellites seraient alors suffisants pour déterminer \vec{r} .

Pour avoir une précision de l'ordre du mètre sur \vec{r} , il faut une précision sur les dates t_i de l'ordre de

$$\delta t \sim \frac{1 \text{ m}}{c} \sim 3 \times 10^{-9} \text{ s} = 3 \text{ ns}. \quad (\text{A.2})$$

La stabilité des horloges atomiques au césium est telle que $\delta t/t \lesssim 10^{-13}$, c'est-à-dire que l'on atteint $\delta t = 3 \text{ ns}$ en $t \sim 10 \text{ h}$ environ. Il suffit alors de régler l'horloge quelques fois par jour, grâce à des signaux envoyés depuis le sol, pour atteindre la précision requise. Par contre, deux effets relativistes conduisent à un $\delta t/t$ bien supérieur à celui intrinsèque aux horloges atomiques :

- **la dilatation des temps** : les satellites sont en mouvement par rapport à l'observateur ; $M_{\oplus} = 5.97 \times 10^{24} \text{ kg}$ étant la masse de la Terre, leur vitesse orbitale

est

$$v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{r_{\text{sat}}}} \simeq 3.87 \text{ km s}^{-1} \quad (\text{A.3})$$

ce qui donne $v/c \simeq 1.3 \times 10^{-5}$ et un facteur de Lorentz $\Gamma = 1 + 8.3 \times 10^{-11}$. En vertu de la formule (2.98), il en résulte

$$\frac{\delta t}{t} = \Gamma - 1 \simeq 8.3 \times 10^{-11}, \quad (\text{A.4})$$

ce qui est trois ordres de grandeur plus grand que les défauts de stabilité des horloges atomiques : si aucune correction n'est appliquée, on atteint $\delta t = 3$ ns en une demi-minute !

Remarque : La dilatation des temps mentionnée ci-dessus constitue l'effet Doppler du second ordre, ou effet Doppler transverse. L'effet Doppler du premier ordre, en v/c , avec d'après (A.3), $v/c \sim 1.3 \times 10^{-5}$, n'affecte que la fréquence du signal et non pas le contenu du message délivré (date et position de l'émetteur).

- **l'effet Einstein :** les satellites sont environ quatre fois plus élevés dans le potentiel gravitationnel de la Terre que les observateurs au sol. Les temps propres issus de leurs horloges, une fois transmis vers le sol, sont alors décalés par rapport à des horloges au sol, en vertu de l'effet Einstein étudié au § 3.4.3. Ce décalage est donné par la formule (3.77) :

$$\frac{\delta t}{t} \simeq \frac{GM_{\oplus}}{c^2} \left(\frac{1}{R_{\oplus}} - \frac{1}{r_{\text{sat}}} \right) \simeq 5.3 \times 10^{-10}. \quad (\text{A.5})$$

Cet effet est donc encore plus marqué que le précédent : si aucune correction n'est appliquée, on atteint $\delta t = 3$ ns en 6 secondes ! En un jour, la dérive temporelle atteindrait $\delta t = 46 \mu\text{s}$, ce qui correspondrait à une erreur de positionnement de 14 km et rendrait le système GPS inopérant.

La discussion ci-dessus montre qu'il est nécessaire de traiter le système GPS dans un cadre relativiste. C'est ce que nous allons esquisser dans ce qui suit.

A.3 Traitement relativiste

A.3.1 Système de référence céleste géocentrique (GCRS)

Nous avons vu au § 4.5.2 qu'au voisinage des corps faiblement relativistes, comme la Terre, la métrique \mathbf{g} solution de l'équation d'Einstein est telle qu'il existe un système de coordonnées $x^\alpha = (ct, r, \theta, \varphi)$ où ses composantes s'écrivent [cf. Eq. (4.143)]

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} \right) (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{A.6})$$

Φ désignant le potentiel gravitationnel newtonien au voisinage de la Terre. La convention de signe sur Φ est choisie de manière à ce que le champ gravitationnel newtonien soit

donné par $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$. Sans perte de généralité, on choisit les coordonnées $x^\alpha = (ct, r, \theta, \varphi)$ de manière à ce que $r = 0$ soit le centre de la Terre. Par ailleurs, les coordonnées (x^α) sont non tournantes : à la limite $\Phi = 0$, elles correspondent à un repère inertiel. Autrement dit, par rapport aux coordonnées (x^α) , la Terre tourne autour de l'axe $\theta = 0$ à la vitesse angulaire $d\varphi/dt = \Omega_\oplus$, avec

$$\Omega_\oplus = 2\pi \text{ rad} / 23 \text{ h } 56 \text{ min} = 7.29 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}. \quad (\text{A.7})$$

Les coordonnées (ct, r, θ, φ) constituent ce que l'on appelle le système de référence céleste géocentrique (GCRS) (pour *Geocentric Celestial Reference System*). Ce dernier a été défini par une résolution de la 24ème assemblée générale de l'Union Astronomique Internationale qui s'est tenue en 2000 (cf. Soffel et al. 2003 [68] et Petit & Wolf 2005 [63]). En fait (A.6) n'est autre qu'un développement tronqué à l'ordre $1/c^2$ de l'élément de longueur donné à l'ordre $1/c^4$ pour g_{00} , $1/c^3$ pour g_{0i} et $1/c^2$ pour g_{ij} ($i, j \in \{1, 2, 3\}$) par la résolution de l'UAI [68]. La coordonnée t du système (x^α) est appelée temps-coordonnée géocentrique (TCG).

Le potentiel gravitationnel Φ au voisinage de la Terre est

$$\Phi = \Phi_\oplus + \Phi_\odot + \Phi_{\text{autres}}, \quad (\text{A.8})$$

où Φ_\oplus est le potentiel du champ gravitationnel engendré par la Terre, Φ_\odot celui engendré par le Soleil et Φ_{autres} celui dû à tous les autres corps du système solaire. Au voisinage de la Terre, en notant $d = 1.5 \times 10^{11}$ m la distance Terre-Soleil,

$$\frac{|\Phi_\oplus|}{c^2} \sim \frac{GM_\oplus}{c^2 R_\oplus} \sim 7 \times 10^{-10}, \quad (\text{A.9})$$

$$\frac{|\Phi_\odot|}{c^2} \sim \frac{GM_\odot}{c^2 d} \sim 1 \times 10^{-8}, \quad (\text{A.10})$$

$$|\Phi_{\text{autres}}| \ll |\Phi_\oplus|. \quad (\text{A.11})$$

Ainsi $|\Phi_\odot|$ est 14 fois plus grand que $|\Phi_\oplus|$. Cependant, c'est la différence des valeurs de Φ en deux points qui donne l'effet Einstein [cf. Eq. (3.65)]. Or le gradient de Φ_\oplus au voisinage de la Terre est beaucoup plus important que celui de Φ_\odot : l'échelle de variation de Φ_\odot est

$$\frac{|\delta\Phi_\odot|}{c^2} \sim \frac{GM_\odot}{c^2 d} - \frac{GM_\odot}{c^2(d+R_\oplus)} \sim \frac{GM_\odot}{c^2 d} \underbrace{\frac{R_\oplus}{d}}_{\simeq 5 \times 10^{-5}} \sim 5 \times 10^{-13} \quad (\text{A.12})$$

alors que celle de variation de Φ_\oplus est

$$\frac{|\delta\Phi_\oplus|}{c^2} \sim \frac{|\Phi_\oplus|}{c^2} \sim 7 \times 10^{-10}. \quad (\text{A.13})$$

En conséquence, on peut considérer Φ_\odot comme une simple constante additive dans le potentiel Φ . En renormalisant la valeur de ce dernier à l'infini, on peut alors écrire

$$\Phi = \Phi_\oplus = -\frac{GM_\oplus}{r} + \frac{GQ_\oplus P_2(\cos\theta)}{r^3}, \quad (\text{A.14})$$

où l'on a tronqué le potentiel gravitationnel de la Terre aux deux premiers termes de son développement multipolaire¹ : le monopôle M_\oplus et le quadropôle Q_\oplus (issu de l'aplatisse-

1. P_2 est le deuxième polynôme de Legendre : $P_2(\cos\theta) = (3\cos^2\theta - 1)/2$

ment de la Terre) ;

$$Q_{\oplus} = J_2 M_{\oplus} R_{\oplus}^2, \quad J_2 = 1.08 \times 10^{-3}. \quad (\text{A.15})$$

Il faut tenir compte du terme quadrupolaire car au niveau de la surface de la Terre

$$\frac{GQ_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}^3} = J_2 \frac{GM_{\oplus}}{c^2 R_{\oplus}} \sim 7 \times 10^{-13}, \quad (\text{A.16})$$

ce qui, en terme de $\delta t/t$, est légèrement supérieur au niveau de stabilité des horloges atomiques. Par contre, les termes suivants du développement multipolaire de Φ_{\oplus} ne sont pas nécessaires pour le niveau de précision requis par le GPS.

Remarque : Si l'on tronque le potentiel Φ_{\oplus} au niveau monopolaire seulement, la métrique telle que donnée par (A.6) n'est alors pas autre chose qu'un développement limité au premier ordre en $GM_{\oplus}/(c^2 r)$ de la métrique de Schwarzschild correspondant à la masse M_{\oplus} (cf. l'expression (3.18) de cette dernière en coordonnées isotropes).

A.3.2 Temps terrestre et temps atomique international

Dans le système de référence céleste géocentrique (ct, r, θ, φ) , l'équation du mouvement d'un observateur fixe à la surface de la Terre, à la colatititude θ_0 , est

$$r = r_0, \quad \theta = \theta_0, \quad \varphi = \varphi_0 + \Omega_{\oplus} t, \quad (\text{A.17})$$

avec Ω_{\oplus} donné par (A.7). Le temps propre T de cet observateur est appelé temps terrestre (TT). Il vérifie

$$dT = \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta}}, \quad (\text{A.18})$$

soit avec la forme (A.6) de $g_{\alpha\beta}$ et les dx^{α} correspondant à (A.17) : $dr = 0$, $d\theta = 0$ et $d\varphi = \Omega_{\oplus} dt$,

$$dT = \sqrt{\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) dt^2 - \frac{1}{c^2} \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) r_0^2 \sin^2 \theta_0 (\Omega_{\oplus} dt)^2}. \quad (\text{A.19})$$

Numériquement, $\Phi/c^2 \simeq 7 \times 10^{-10}$ et $r_0 \Omega_{\oplus}/c \simeq 1.5 \times 10^{-6}$, si bien que l'on peut écrire

$$dT \simeq \left[1 + \frac{1}{c^2} \left(\Phi - \frac{1}{2} (\Omega_{\oplus} r_0 \sin \theta_0)^2\right)\right] dt. \quad (\text{A.20})$$

Remarquons qu'au niveau newtonien, $-1/2 (\Omega_{\oplus} r_0 \sin \theta_0)^2$ n'est pas autre chose que le potentiel centrifuge dans le référentiel tournant avec la Terre. Or la surface de la Terre est une équipotentielle de

$$U(r, \theta, \varphi) := \Phi(r, \theta, \varphi) - \frac{1}{2} (\Omega_{\oplus} r \sin \theta)^2. \quad (\text{A.21})$$

Cette équipotentielle est appelée géoïde. Ainsi, à la surface de la Terre, on peut écrire (A.20) sous la forme

$$dT = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) dt, \quad (\text{A.22})$$

où la constante U_0 est celle définissant le géoïde : $U_0 = U(r_0, \theta_0, \varphi_0)$. En prenant $\theta_0 = \pi/2$ (équateur), $r_0 = R_\oplus$ (rayon équatorial de la Terre), on obtient²

$$\frac{U_0}{c^2} = -6.969 \times 10^{-10}. \quad (\text{A.23})$$

Puisque U_0 est une constante, (A.22) s'intègre immédiatement en

$$T = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) t + T_0, \quad (\text{A.24})$$

où T_0 est une constante. La formule (A.24) montre que le temps terrestre T et le temps-coordonnée géocentrique t ne diffèrent que d'un facteur constant, indépendant de la position sur le globe.

Puisque le temps terrestre est le temps propre des observateurs fixes à la surface de la Terre, il s'agit d'une quantité mesurable. On appelle alors *temps atomique international (TAI)* la mesure du temps terrestre qui combine les données de plusieurs centaines d'horloges atomiques réparties à la surface du globe. Le TAI est donc essentiellement la même chose que le TT. Ce serait même exactement la même chose si les horloges atomiques utilisées étaient infiniment précises. On dit que TAI est une *réalisation* de TT. Il ne s'agit pas de la réalisation la meilleure car le TAI est évalué en « temps-réel » chaque mois et n'est pas corrigé a posteriori. Il existe d'autres réalisations de TT, comme celle effectuée par le Bureau International des Poids et Mesures (BIPM), qui tiennent compte des erreurs découvertes dans les données des horloges atomiques après leur utilisation pour TAI.

A.3.3 Le GPS comme système de détermination des coordonnées GCRS

Relation entre le temps propre d'un satellite et le temps-coordonnée géocentrique

L'équation du mouvement d'un satellite GPS par rapport aux coordonnées GCRS (ct, r, θ, φ) est donnée par

$$r = r_s(t), \quad \theta = \theta_s(t), \quad \varphi = \varphi_s(t). \quad (\text{A.25})$$

On suppose connues avec suffisamment de précision les fonctions $r_s(t)$, $\theta_s(t)$ et $\varphi_s(t)$ (éphémérides du satellites). En première approximation, les orbites sont circulaires, si bien que $r_s(t) = \text{const} = 4.16 R_\oplus$.

Considérons l'hypersurface Σ_t définie par $t = \text{const}$. En tant que variété, Σ_t est identique (homéomorphe) à \mathbb{R}^3 . D'après (A.6), la métrique induite par \mathbf{g} dans Σ_t est conformément plate, c'est-à-dire qu'elle s'écrit $g_{ij} dx^i dx^j$ avec $g_{ij} = \Psi^4 f_{ij}$ où f_{ij} est la métrique

2. En fait, suivant une résolution adoptée lors de la 24ème assemblée générale de l'Union Astronomique Internationale en 2000 (cf. Soffel et al. 2003 [68]), U_0 est défini comme la constante $U_0 = -6.969290134 \times 10^{-10} c^2$. Cette convention permet de s'affranchir des incertitudes quant à la détermination du géoïde.

plate à trois dimensions (métrique euclidienne) :

$$f_{ij} dx^i dx^j = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (\text{A.26})$$

et le facteur conforme vaut $\Psi^4 = 1 - 2\Phi/c^2$. Dans l'hypersurface $\Sigma_t \simeq \mathbb{R}^3$, considérons le « vecteur position »

$$\vec{r} = r \vec{\partial}_r = x \vec{\partial}_x + y \vec{\partial}_y + z \vec{\partial}_z. \quad (\text{A.27})$$

On définit la vitesse-coordonnée du satellite comme

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{r}_s(t) \vec{\partial}_r + \dot{\theta}_s(t) \vec{\partial}_\theta + \dot{\varphi}_s(t) \vec{\partial}_\varphi. \quad (\text{A.28})$$

L'horloge à bord du satellite fournit le temps propre τ , qui est tel que

$$\begin{aligned} d\tau &= \frac{1}{c} \sqrt{-g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta} \\ &= \frac{1}{c} \sqrt{\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 - \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) f_{ij} dx^i dx^j} \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\Phi}{c^2} - \frac{1}{c^2} \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) f_{ij} \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}} dt \\ &= \sqrt{1 + 2\frac{\Phi}{c^2} - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v}} dt \end{aligned} \quad (\text{A.29})$$

Puisque $\Phi/c^2 \sim 10^{-10}$ et $\vec{v} \cdot \vec{v}/c^2 \sim 10^{-10}$ [cf. (A.3)], on peut sans problème effectuer un développement limité de la racine carrée et écrire

$$dt = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right) d\tau. \quad (\text{A.30})$$

avec

$$v^2 := \vec{v} \cdot \vec{v}. \quad (\text{A.31})$$

Notons qu'à ce niveau de précision, on peut prendre le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{v}$ tout aussi bien avec la métrique \mathbf{g} qu'avec la métrique plate \mathbf{f} .

Ainsi le temps-coordonnée géocentrique t_i au niveau du satellite no. i est déduit de la lecture τ_i de l'horloge atomique embarquée par

$$t_i = \int_0^{\tau_i} \left(1 - \frac{\Phi(r_s, \theta_s, \varphi_s)}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2}\right) d\tau, \quad (\text{A.32})$$

où le potentiel $\Phi(r, \theta, \varphi)$ est donné par (A.14). Cette formule combine les deux effets mentionnés au § A.2 : l'effet Einstein (terme en Φ/c^2) et la dilatation des temps de la relativité restreinte (terme en $1/2 v^2/c^2$).

Puisque les orbites des satellites GPS sont à peu près circulaires, écrivons Φ et v^2 comme leurs valeurs pour des orbites circulaires (de rayon $r_{\text{sat}} = 4.16 R_\oplus$) plus un petit écart :

$$\Phi = -\frac{GM_\oplus}{r_{\text{sat}}} + \delta\Phi \quad \text{avec} \quad |\delta\Phi| \ll |\Phi|, \quad (\text{A.33})$$

$$v^2 = \frac{GM_{\oplus}}{r_{\text{sat}}} + \delta v^2 \quad \text{avec} \quad |\delta v^2| \ll |v^2|. \quad (\text{A.34})$$

Il vient alors

$$-\frac{\Phi}{c^2} + \frac{v^2}{2c^2} = \frac{3GM_{\oplus}}{2c^2 r_{\text{sat}}} + \frac{1}{c^2} \left(\delta\Phi + \frac{1}{2}\delta v^2 \right) \quad (\text{A.35})$$

avec

$$\frac{3GM_{\oplus}}{2c^2 r_{\text{sat}}} = 2.504 \times 10^{-10}. \quad (\text{A.36})$$

L'Eq. (A.32) donne alors

$$t_i = \left(1 + \frac{3GM_{\oplus}}{2c^2 r_{\text{sat}}} \right) \tau_i + \frac{1}{c^2} \int_0^{\tau_i} \left(\delta\Phi + \frac{1}{2}\delta v^2 \right) d\tau. \quad (\text{A.37})$$

Le terme en $\delta\Phi + 1/2\delta v^2$ contient par exemple les corrections à apporter pour tenir compte de l'excentricité des orbites (cf. Ashby 2003 [37] pour plus de détails).

Propagation du signal radio

Considérons à présent la propagation du signal radio depuis le satellite jusqu'à l'observateur au sol. Cette propagation se fait le long d'une géodésique lumière, qui vérifie $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$, c'est-à-dire

$$\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2} \right) c^2 dt^2 = \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} \right) f_{ij} dx^i dx^j, \quad (\text{A.38})$$

d'où (au premier ordre en Φ/c^2)

$$c dt = \pm \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2} \right) \|d\vec{r}\|, \quad (\text{A.39})$$

$d\vec{r}$ étant l'accroissement élémentaire du vecteur position (A.27) et la norme étant prise à l'aide de la métrique plate \mathbf{f} : $\|d\vec{r}\| = \sqrt{f_{ij} dx^i dx^j}$. Au niveau d'approximation présent, Φ peut être remplacé par le terme monopolaire $-GM_{\oplus}/r$. L'équation (A.39) s'intègre alors en (cf. Blanchet et al. 2001 [43] pour les détails)

$$t_* - t_i = \frac{1}{c} \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\| + \frac{2GM_{\oplus}}{c^3} \ln \left(\frac{r_i + r_* + \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\|}{r_i + r_* - \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\|} \right), \quad (\text{A.40})$$

où (t_i, \vec{r}_i) sont les coordonnées GCRS du satellite no. i et (t_*, \vec{r}_*) les coordonnées GCRS de l'observateur au sol. Le terme en logarithme dans l'équation ci-dessus traduit l'*effet Shapiro* (ou *retard de la lumière*) (cf. § 3.6.5). Son amplitude est de l'ordre de

$$\frac{2GM_{\oplus}}{c^3} \simeq 3 \times 10^{-11} \text{ s}, \quad (\text{A.41})$$

ce qui est cent fois plus petit que les 3 ns spécifiés pour le GPS [Eq. (A.2)]. On peut donc écrire (A.40) sous la forme

$$t_* - t_i = \frac{1}{c} \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\|. \quad (\text{A.42})$$

Il s'agit de la même expression qu'en espace plat [Eq. (A.1)].

Bilan

Le problème de la détermination de la position (t_*, \vec{r}_*) de l'observateur au sol se ramène à la résolution du système (A.42) où $i \in \{1, 2, 3, 4\}$, t_i se déduit du temps propre τ_i fourni par l'horloge atomique du satellite no. i suivant l'équation (A.32) ou (A.37) et $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t_i)$ provient des éphémérides du satellite.

A.3.4 Mise en œuvre effective du système GPS

La coordonnée temporelle utilisée par le système GPS n'est pas le temps-coordonnée géocentrique t employé ci-dessus, mais le temps universel coordonné maintenu par l'U.S. Naval Observatory : UTC(USNO). Ce dernier est une réalisation du temps terrestre T introduit au § A.3.2 : il n'en diffère que par une constante additive et évidemment par l'imprécision des horloges atomiques de l'U.S. Naval Observatory. Nous confondrons ici T et le temps UTC(USNO). T est relié au temps-coordonnée géocentrique t par l'Eq. (A.24). On déduit alors de (A.37) la relation entre le temps propre τ_i indiqué par l'horloge atomique à bord du satellite no. i et le temps terrestre correspondant T_i :

$$T_i = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) \times \left[\left(1 + \frac{3GM_\oplus}{2c^2 r_{\text{sat}}}\right) \tau_i + \frac{1}{c^2} \int_0^{\tau_i} \left(\delta\Phi + \frac{1}{2}\delta v^2\right) d\tau \right], \quad (\text{A.43})$$

c'est-à-dire, compte tenu de la petitesse de U_0/c^2 ,

$$T_i = \left(1 + \frac{U_0}{c^2} + \frac{3GM_\oplus}{2c^2 r_{\text{sat}}}\right) \tau_i + \frac{1}{c^2} \int_0^{\tau_i} \left(\delta\Phi + \frac{1}{2}\delta v^2\right) d\tau. \quad (\text{A.44})$$

Le terme en facteur de τ_i est constant. D'après (A.23) et (A.36), il vaut

$$1 + \frac{U_0}{c^2} + \frac{3GM_\oplus}{2c^2 r_{\text{sat}}} = 1 - 4.465 \times 10^{-10}. \quad (\text{A.45})$$

La fréquence propre des horloges atomiques au césium embarquées à bord des satellites GPS est $\nu_0 = 10.23$ MHz. Cette fréquence est corrigée par le facteur ci-dessus avant l'émission du signal radio vers la Terre. Ce dernier est en effet émis sur deux fréquences porteuses :

$$\nu_1 = 154 \nu'_0 \simeq 1.57 \text{ GHz} \quad \text{et} \quad \nu_2 = 120 \nu'_0 \simeq 1.23 \text{ GHz}, \quad (\text{A.46})$$

où

$$\nu'_0 = (1 - 4.465 \times 10^{-10}) \nu_0. \quad (\text{A.47})$$

En terme du temps terrestre T , le système à résoudre se déduit de (A.42) et (A.24) :

$$T_* - T_i = \left(1 + \frac{U_0}{c^2}\right) \frac{1}{c} \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\|. \quad (\text{A.48})$$

Comme $\|\vec{r}_i - \vec{r}_*\| |U_0|/c^2 \sim 3R_\oplus |U_0|/c^2 \sim 1$ cm est bien plus petit que le niveau de précision requis (1 m), on peut écrire

$$T_* - T_i \simeq \frac{1}{c} \|\vec{r}_i - \vec{r}_*\|. \quad (\text{A.49})$$

C'est le système d'équations utilisé dans l'implantation actuelle du système GPS.

Annexe B

Problèmes

version 2013-2014

Sommaire

B.1	Décalage spectral au voisinage de la Terre	213
B.2	Équation de Killing	216
B.3	Trou de ver	217
B.4	Observateur accéléré et horizon de Rindler	218
B.5	Expérience de Hafele & Keating	222
B.6	Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker	224
B.7	Modèle d'étoile incompressible	225
B.8	Vitesse du son relativiste	227
B.9	Photon émis par une étoile	229
B.10	Pression de radiation et effet Poynting-Robertson	230
B.11	Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild	233
B.12	Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs	235
B.13	Tenseur de Killing et constante de Carter	237
B.14	Gravité de surface d'un trou noir	239
B.15	Déviations géodésiques	243

Ces problèmes ont été donnés comme sujets d'examen en 2006 (problèmes [B.1](#), [B.2](#) et [B.3](#)), 2007 (problème [B.4](#)), 2008 (problèmes [B.5](#) et [B.6](#)), 2009 (problèmes [B.7](#) et [B.8](#)), 2010 (problèmes [B.9](#) et [B.10](#)), 2011 (problème [B.11](#)), 2012 (problèmes [B.12](#) et [B.13](#)), 2013 (problème [B.14](#)) et 2014 (problème [B.15](#)). Les solutions sont présentées dans l'annexe [C](#).

B.1 Décalage spectral au voisinage de la Terre

On admettra qu'il existe un système de coordonnées de type sphérique $x^\alpha = (ct, r, \theta, \varphi)$ tel que (i) $r = 0$ soit le centre de la Terre, (ii) par rapport à ces coordonnées, la Terre

tourne autour de l'axe $\theta = 0$ à la vitesse angulaire $d\varphi/dt = \Omega_{\oplus} = 2\pi \text{ rad}/23 \text{ h } 56 \text{ min}$ et (iii) les composantes du tenseur métrique \mathbf{g} dans ce système de coordonnées prennent la forme suivante :

$$g_{\alpha\beta} dx^{\alpha} dx^{\beta} = - \left[1 + 2 \frac{\Phi(r)}{c^2} \right] c^2 dt^2 + \left[1 - 2 \frac{\Phi(r)}{c^2} \right] (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{B.1})$$

où $\Phi(r)$ désigne le potentiel gravitationnel newtonien de la Terre, le champ gravitationnel newtonien étant donné par $\vec{g} = -\vec{\nabla}\Phi$. On supposera la Terre sphérique et on désignera par M sa masse et par R_{\oplus} son rayon.

1 Montrer que pour $r \geq R_{\oplus}$, (B.1) constitue un cas limite de la métrique de Schwarzschild [on pourra utiliser l'expression de cette dernière en coordonnées isotropes]. Quel est l'ordre de grandeur de $\Phi(r)/c^2$ pour r voisin de R_{\oplus} ? On donne $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $c = 3.0 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$, $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$ et $R_{\oplus} = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$.

2 Quelles sont les symétries de l'espace-temps décrit par la métrique (B.1)?

3 On appelle *observateurs statiques* les observateurs \mathcal{S} de coordonnées r , θ et φ constantes. Ces observateurs se réduisent à des observateurs galiléens à la limite newtonienne. En particulier, ils ne tournent pas avec la Terre. Montrer qu'au premier ordre en $|\Phi|/c^2$, la 4-vitesse des observateurs statiques est de la forme

$$\vec{u}_* = \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) \vec{\partial}_0, \quad (\text{B.2})$$

où $\vec{\partial}_0$ est le premier vecteur de la base naturelle associée aux coordonnées ($x^0 = ct, r, \theta, \varphi$) : $\vec{\partial}_0 = c^{-1} \vec{\partial}_t$.

4 Considérons un observateur \mathcal{O} en mouvement quelconque (r , θ et φ variables) au voisinage de la Terre (dans les applications ultérieures, ce sera tout aussi bien un observateur à bord d'une fusée ou d'un satellite, qu'un observateur au sol). Appelons \vec{u} sa 4-vitesse et introduisons le facteur de Lorentz Γ entre \mathcal{O} et l'observateur statique coïncident (c'est-à-dire l'observateur \mathcal{S} se trouvant au même point d'espace-temps que \mathcal{O}). Quelle est la relation entre Γ et les 4-vitesses \vec{u} et \vec{u}_* ? Montrer qu'au premier ordre en $|\Phi|/c^2$, la composante u^0 de \vec{u} vaut

$$u^0 = \Gamma \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right). \quad (\text{B.3})$$

5 On définit la 3-vitesse de \mathcal{O} par rapport à l'observateur statique \mathcal{S} par

$$\vec{v} := \frac{dr}{d\tau_*} \vec{\partial}_r + \frac{d\theta}{d\tau_*} \vec{\partial}_\theta + \frac{d\varphi}{d\tau_*} \vec{\partial}_\varphi, \quad (\text{B.4})$$

où τ_* est le temps propre de \mathcal{S} . Dire pourquoi \vec{v} est un vecteur orthogonal à \vec{u}_* et montrer que l'on a

$$\vec{u} = \Gamma \left(\vec{u}_* + \frac{1}{c} \vec{v} \right). \quad (\text{B.5})$$

[Indication : on pourra écrire $dr/d\tau_* = dr/d\tau \times d\tau/d\tau_*$, (idem pour $d\theta/d\tau_*$ et $d\varphi/d\tau_*$) où τ est le temps propre de \mathcal{O} , puis $d\tau/d\tau_* = d\tau/dt \times dt/d\tau_*$ et utiliser (B.2) et (B.3)]. En déduire que

$$\Gamma = \left(1 - \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v}\right)^{-1/2}, \quad (\text{B.6})$$

où le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{v}$ est celui donné par le tenseur métrique \mathbf{g} . Commenter.

6 On considère à présent un photon, décrit par sa 4-impulsion \vec{p} . Montrer que l'énergie du photon mesurée par un observateur statique \mathcal{S} coïncident est

$$E = cK \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad (\text{B.7})$$

où l'on a posé

$$K := -\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p} = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) p^0. \quad (\text{B.8})$$

7 On rappelle que l'impulsion du photon mesuré par l'observateur statique \mathcal{S} est donnée par

$$\vec{P} = \vec{p} - \frac{E}{c} \vec{u}_*. \quad (\text{B.9})$$

On pose $\vec{P} =: P \vec{n}$, avec $P > 0$ et $\vec{n} \cdot \vec{n} = 1$ (vecteur unitaire par rapport à la métrique \mathbf{g}). Que peut on dire du vecteur \vec{n} vis-à-vis du vecteur \vec{u}_* ? Montrer que

$$P = K \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right), \quad (\text{B.10})$$

si bien que l'on peut écrire la 4-impulsion du photon sous la forme

$$\vec{p} = K \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) (\vec{u}_* + \vec{n}). \quad (\text{B.11})$$

8 Revenons à l'observateur mobile \mathcal{O} considéré aux questions 1.4 et 1.5. En utilisant (B.5) et (B.11), montrer que l'énergie du photon mesurée par \mathcal{O} est

$$E = cK\Gamma \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{v}\right). \quad (\text{B.12})$$

9 On considère à présent deux observateurs mobiles : l'un, \mathcal{O}_1 , qui émet le photon, au point A_1 de coordonnées $(t_1, r_1, \theta_1, \varphi_1)$, et l'autre, \mathcal{O}_2 , qui le reçoit au point A_2 de coordonnées $(t_2, r_2, \theta_2, \varphi_2)$. Que peut on dire de la quantité K le long de la trajectoire du photon entre A_1 et A_2 ? En déduire la relation entre la fréquence ν_2 du photon mesurée par le récepteur \mathcal{O}_2 et la fréquence ν_1 mesurée par l'émetteur \mathcal{O}_1 . On notera $\Phi_1, \Gamma_1, \vec{v}_1$ et \vec{n}_1 (resp. $\Phi_2, \Gamma_2, \vec{v}_2$ et \vec{n}_2) les valeurs de Φ, Γ, \vec{v} et \vec{n} en A_1 (resp. A_2). On rappelle que la fréquence d'un photon est reliée à son énergie par la relation $E = h\nu$, où h est la constante de Planck.

10 Effectuer les limites suivantes :

- a) $\vec{v}_1 = 0$ et $\vec{v}_2 = 0$,
- b) $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ et $\vec{v}_2 = 0$,
- c) même chose que b) mais avec en plus $\vec{v}_1 = v_1 \vec{n}_1$,

et commenter.

11 Montrer qu'un développement limité de la formule obtenue à la question 1.9, au premier ordre en $|\Phi|/c^2$ et au second ordre en $|\vec{v}_1|/c$ et $|\vec{v}_2|/c$, conduit à

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \simeq 1 + \frac{1}{c} \vec{n} \cdot (\vec{v}_1 - \vec{v}_2) + \frac{1}{c^2} \left[\Phi_1 - \Phi_2 + \frac{1}{2} (v_2^2 - v_1^2) + (\vec{n} \cdot \vec{v}_1)^2 - (\vec{n} \cdot \vec{v}_1)(\vec{n} \cdot \vec{v}_2) \right], \quad (\text{B.13})$$

avec $v_1^2 := \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1$ et $v_2^2 := \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2$. Noter qu'à cet ordre d'approximation, on a fait $\vec{n}_1 = \vec{n}_2 = \vec{n}$ et que l'on peut remplacer tous les produits scalaires qui apparaissent dans (B.13) par des produits scalaires dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 usuel. Donner une estimation numérique de chacun des termes du membre de droite de (B.13) dans le cas où l'émetteur \mathcal{O}_1 est un satellite en orbite circulaire de rayon $r_1 = 4R_\oplus$ et où le récepteur \mathcal{O}_2 est une station au sol, située à l'équateur : $r_2 = R_\oplus$, $\vec{v}_2 = \Omega_\oplus \vec{d}_\phi$. On supposera que l'orientation station-satellite est telle que $\vec{n} \cdot \vec{v}_1 \simeq v_1/2$ et $\vec{n} \cdot \vec{v}_2 \simeq v_2/2$.

B.2 Équation de Killing

Soit (\mathcal{E}, g) un espace-temps qui admet un vecteur de Killing $\vec{\xi}$. On désigne par $\underline{\xi}$ la forme linéaire associée à $\vec{\xi}$ par le tenseur métrique g :

$$\begin{aligned} \underline{\xi} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \vec{v} &\longmapsto g(\vec{\xi}, \vec{v}) = \vec{\xi} \cdot \vec{v}. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

1 Étant donné un système de coordonnées (x^α) sur \mathcal{E} , on désigne par (ξ^α) les composantes de $\vec{\xi}$ dans la base naturelle associée à (x^α) et par (ξ_α) les composantes de $\underline{\xi}$ dans la base duale. Montrer que

$$\xi_\alpha = g_{\alpha\beta} \xi^\beta, \quad (\text{B.15})$$

où $g_{\alpha\beta}$ sont les composantes de g par rapport aux coordonnées (x^α) .

2 On considère une géodésique \mathcal{L} de (\mathcal{E}, g) , du genre temps. On désigne par τ le temps propre le long de \mathcal{L} et par \vec{u} la 4-vitesse associée à \mathcal{L} . Justifier l'expression

$$u^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\beta u^\beta) = \frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} (\xi_\beta u^\beta), \quad (\text{B.16})$$

où ∇ désigne la connexion associée à la métrique g .

3 Que vaut le membre de droite de (B.16) ? Montrer qu'on obtient alors

$$\nabla_\alpha \xi_\beta u^\alpha u^\beta = 0. \quad (\text{B.17})$$

4 En déduire que

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0. \quad (\text{B.18})$$

Cette équation, qui caractérise les vecteurs de Killing, est appelée *équation de Killing*.

B.3 Trou de ver

On considère un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ couvert par un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ tel que

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -c^2 dt^2 + dr^2 + (b^2 + r^2)(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{B.19})$$

où b est une constante strictement positive. Contrairement aux coordonnées sphériques usuelles, le système de coordonnées (x^α) est tel que r peut prendre des valeurs négatives. Autrement dit, les domaines de variation de chaque coordonnée sont

$$t \in \mathbb{R}, \quad r \in \mathbb{R}, \quad \theta \in [0, \pi], \quad \varphi \in [0, 2\pi[. \quad (\text{B.20})$$

$(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est un exemple simple d'espace-temps dit de *trou de ver* proposé par Morris & Thorne en 1988 [61].

- 1 Quelles sont les symétries de cet espace-temps ?
- 2 Comment se comporte la métrique \mathbf{g} lorsque $r \rightarrow +\infty$ ou $r \rightarrow -\infty$?
- 3 Dans le plan $t = \text{const.}$ et $\theta = \pi/2$, quelle est la circonférence des cercles $r = \text{const.}$? Pour quelle valeur de r cette circonférence est-elle minimale ?
- 4 Déterminer l'équation des géodésiques lumière radiales, c'est-à-dire des géodésiques lumière à θ et φ fixés. L'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ contient-il un horizon des événements ?
- 5 Les symboles de Christoffel de la métrique \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) sont

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r, \quad \Gamma^r_{\varphi\varphi} = -r \sin^2 \theta \quad (\text{B.21})$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{r}{b^2 + r^2}, \quad \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} = -\cos \theta \sin \theta \quad (\text{B.22})$$

$$\Gamma^\varphi_{r\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi r} = \frac{r}{b^2 + r^2}, \quad \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} = \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan \theta}. \quad (\text{B.23})$$

Tous les autres symboles de Christoffel sont nuls. Écrire l'équation qui gouverne les géodésiques du genre temps purement radiales, c'est-à-dire les géodésiques à θ et φ fixés. On utilisera le temps propre τ comme paramètre.

- 6 Montrer que la solution générale de l'équation obtenue est

$$r(\tau) = V\tau + r_0, \quad (\text{B.24})$$

où V et r_0 sont deux constantes. Exprimer les 4 composantes de la 4-vitesse \vec{u} le long de ces géodésiques en fonction de V . Quel temps propre faut-il pour se rendre d'un point $r = r_0$ au point $r = -r_0$ en suivant ces géodésiques ?

- 7 Montrer que les composantes diagonales du tenseur de Ricci \mathbf{R} associé à \mathbf{g} sont les suivantes :

$$R_{00} = 0, \quad R_{rr} = -\frac{2b^2}{(b^2 + r^2)^2}, \quad R_{\theta\theta} = 0, \quad R_{\varphi\varphi} = 0. \quad (\text{B.25})$$

8 En déduire que, pour que \mathbf{g} soit solution de l'équation d'Einstein, l'espace-temps doit contenir une matière dont le tenseur énergie-impulsion vérifie

$$T_{00} = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}. \quad (\text{B.26})$$

Quelle est la densité d'énergie mesurée par l'observateur statique de coordonnées (r, θ, φ) constantes ? Conclure.

B.4 Observateur accéléré et horizon de Rindler

B.4.1 Mouvement uniformément accéléré

On se place dans l'espace-temps de Minkowski $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. Soit $(x^\alpha) = (x^0 = ct, x, y, z)$ un système de coordonnées inertielles, c'est-à-dire un système de coordonnées où les composantes du tenseur métrique \mathbf{g} prennent la forme standard

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -c^2 dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{B.27})$$

On désignera par $(\vec{\partial}_\alpha)$ la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) et on notera par un point le produit scalaire relatif à la métrique \mathbf{g} , c'est-à-dire que pour tout couple de vecteurs (\vec{v}, \vec{w}) , $\vec{v} \cdot \vec{w} := \mathbf{g}(\vec{v}, \vec{w})$.

Considérons un observateur \mathcal{O} dont la ligne d'univers \mathcal{L} est décrite par l'équation paramétrique

$$x^\alpha = X^\alpha(\tau), \quad (\text{B.28})$$

où les X^α sont quatre fonctions du temps propre τ de \mathcal{O} .

1.1 Donner l'expression des composantes par rapport aux coordonnées (x^α) de la quadrivitesse \vec{u} de l'observateur \mathcal{O} , en fonction de $X^\alpha(\tau)$.

1.2 On définit la *quadriaccélération* de \mathcal{O} comme le champ vectoriel le long de \mathcal{L} donné par

$$\vec{a} := \nabla_{\vec{u}} \vec{u}, \quad (\text{B.29})$$

où ∇ est la connexion associée à la métrique \mathbf{g} . Montrer que \vec{a} est toujours orthogonal à la quadrivitesse :

$$\vec{u} \cdot \vec{a} = 0. \quad (\text{B.30})$$

Quel est alors le genre du vecteur \vec{a} ?

1.3 Que valent les symboles de Christoffel de ∇ par rapport aux coordonnées (x^α) ? En déduire que les composantes de \vec{a} par rapport aux coordonnées (x^α) sont

$$a^\alpha = \frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 X^\alpha}{d\tau^2}. \quad (\text{B.31})$$

1.4 On suppose que le mouvement de l'observateur \mathcal{O} est régi par les lois suivantes : (i) pour $t \leq 0$, \mathcal{O} est immobile par rapport aux coordonnées inertielles (x, y, z) et se situe

à l'origine $(0, 0, 0)$ de ces coordonnées ; (ii) pour $t > 0$, \mathcal{O} est accéléré dans la direction x avec une quadriaccélération de norme constante :

$$\vec{a} = a^0 \vec{\partial}_0 + a^x \vec{\partial}_x, \quad a^x > 0, \quad (\text{B.32})$$

$$a^2 := \vec{a} \cdot \vec{a} = \text{const}, \quad a > 0. \quad (\text{B.33})$$

On choisit l'origine des temps propres de \mathcal{O} de manière à ce que $\tau = 0$ pour $t = 0$.

a) Que valent le temps propre et la quadrivitesse de \mathcal{O} pour $t \leq 0$ (on explicitera les composantes de \vec{u}) ?

b) Quelle est la dimension de la constante a ?

c) Montrer que pour $\tau > 0$, les composantes $u^\alpha(\tau)$ de la quadrivitesse de \mathcal{O} obéissent au système suivant :

$$u^y(\tau) = u^z(\tau) = 0 \quad (\text{B.34})$$

$$[u^0(\tau)]^2 - [u^x(\tau)]^2 = 1 \quad (\text{B.35})$$

$$-\left(\frac{du^0}{d\tau}\right)^2 + \left(\frac{du^x}{d\tau}\right)^2 = c^2 a^2. \quad (\text{B.36})$$

1.5 Intégrer le système (B.35)-(B.36) pour obtenir $u^0(\tau)$ et $u^x(\tau)$. On rappelle que $\int \frac{du}{\sqrt{1+u^2}} = \text{argsinh } u$ et $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

1.6 a) Dédurre du résultat précédent que, pour $\tau > 0$, l'équation de la ligne d'univers \mathcal{L} de \mathcal{O} est

$$ct = X^0(\tau) = a^{-1} \sinh(ac\tau) \quad (\text{B.37})$$

$$x = X^x(\tau) = a^{-1} [\cosh(ac\tau) - 1] \quad (\text{B.38})$$

$$y = X^y(\tau) = 0 \quad (\text{B.39})$$

$$z = X^z(\tau) = 0. \quad (\text{B.40})$$

On rappelle que $\sinh' x = \cosh x$ et $\cosh' x = \sinh x$.

b) Quel type de courbe obtient-on ? Écrire l'équation de cette courbe en terme de t et x seulement (c'est-à-dire sans le paramètre τ).

c) Dessiner l'intégralité de la ligne d'univers \mathcal{L} (c'est-à-dire pour $\tau \leq 0$ et $\tau > 0$) dans un diagramme d'espace-temps basé sur les coordonnées (t, x) . On notera Δ la droite d'équation $ct = x + a^{-1}$.

1.7 Calculer la vitesse $v = dx/dt$ de \mathcal{O} par rapport à l'observateur inertiel lié aux coordonnées (ct, x, y, z) . L'exprimer en fonction de t . Discuter les cas limites $0 \leq t \ll (ca)^{-1}$ et $t \rightarrow +\infty$.

B.4.2 Décalage spectral et effet Einstein

On considère à présent un photon émis en direction de \mathcal{O} par un observateur inertiel de quadrivitesse $\vec{\partial}_0$ au point $(ct_{\text{em}}, x_{\text{em}}, 0, 0)$.

2.1 En raisonnant sur le diagramme d'espace-temps construit plus haut, montrer que le photon atteindra \mathcal{O} si, et seulement si,

$$ct_{\text{em}} < x_{\text{em}} + a^{-1}. \quad (\text{B.41})$$

En déduire l'existence d'un « horizon » pour l'observateur \mathcal{O} .

Si l'on ne se restreint plus aux trajectoires de photons contenues dans le plan (ct, x) , on admettra que l'horizon est constitué par l'hyperplan \mathcal{H} d'équation $ct = x + a^{-1}$, de sorte que l'intersection de \mathcal{H} avec le plan (ct, x) est la droite Δ . \mathcal{H} est appelé *horizon de Rindler*.

2.2 Dans tout ce qui suit, on suppose que $-|x_{\text{em}}| < ct_{\text{em}} < x_{\text{em}} + a^{-1}$. Dans quelle partie de la ligne d'univers de \mathcal{O} est alors reçu le photon ? Montrer que le temps propre τ de réception du photon par \mathcal{O} vaut

$$\tau = -\frac{1}{ac} \ln [1 + a(x_{\text{em}} - ct_{\text{em}})] \quad \text{si } x_{\text{em}} < a^{-1} \left[\sqrt{1 + (act_{\text{em}})^2} - 1 \right] \quad (\text{B.42})$$

$$\tau = \frac{1}{ac} \ln [1 + a(x_{\text{em}} + ct_{\text{em}})] \quad \text{si } x_{\text{em}} > a^{-1} \left[\sqrt{1 + (act_{\text{em}})^2} - 1 \right] \quad (\text{B.43})$$

Que donne la limite $a \rightarrow 0$ de ces expressions ?

2.3 Soit \vec{p} le vecteur quadri-impulsion du photon. Montrer qu'au point d'émission

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon_{\text{em}}}{c} \left(\vec{\partial}_0 \pm \vec{\partial}_x \right), \quad (\text{B.44})$$

où ε_{em} est l'énergie du photon mesurée par l'observateur inertiel de quadrivitesse $\vec{\partial}_0$. Que peut-on dire des quantités $\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}$ et $\vec{\partial}_x \cdot \vec{p}$ le long de la trajectoire du photon ? Dans le cas présent, que peut-on dire du vecteur \vec{p} lui-même ? En déduire l'énergie du photon mesurée par \mathcal{O} à la réception, ε_{rec} . On exprimera ε_{rec} dans un premier temps en fonction de τ , puis via (B.42) et (B.43) en fonction de t_{em} et x_{em} . Que se passe-t-il lorsque le point d'émission s'approche de \mathcal{H} ?

2.4 On suppose désormais $t_{\text{em}} = 0$. Montrer que la formule reliant les énergies du photon à l'émission et à la réception devient

$$\varepsilon_{\text{rec}} = \varepsilon_{\text{em}} (1 + ax_{\text{em}}). \quad (\text{B.45})$$

On se place au voisinage de \mathcal{L} , dans le sens où $a|x_{\text{em}}| \ll 1$. Montrer que le décalage spectral correspondant à (B.45) est

$$z \simeq -\frac{gx_{\text{em}}}{c^2}, \quad (\text{B.46})$$

où l'on a posé $g := c^2 a$. Quelle est la dimension de g ? Comparer avec la formule donnant le décalage spectral gravitationnel (effet Einstein). Commenter.

B.4.3 Coordonnées de Rindler

3.1 On rappelle que l'espace local de repos de l'observateur \mathcal{O} est, en tout événement $O(\tau)$ de temps propre τ le long de la ligne d'univers \mathcal{L} , l'hyperplan \mathcal{R}_τ passant par $O(\tau)$ et orthogonal à $\vec{u}(\tau)$. Montrer que l'équation de \mathcal{R}_τ est

$$ct = \tanh(ac\tau) (x + a^{-1}). \quad (\text{B.47})$$

En déduire que cet hyperplan passe par le point A de coordonnées $(ct, x, y, z) = (0, -a^{-1}, 0, 0)$, tout comme l'asymptote à \mathcal{L} . Dessiner \mathcal{R}_τ sur le diagramme d'espace-temps construit au 1.6 pour quelques valeurs de τ .

3.2 Un repère mobile lié à l'observateur \mathcal{O} correspond à une tétrade orthonormale $(\vec{e}_{(\alpha)})$ définie en tout point $O(\tau)$ de \mathcal{L} comme suit : (i) $\vec{e}_{(0)} = \vec{u}$, (ii) $\vec{e}_{(1)}$ est un vecteur unitaire, tangent à \mathcal{R}_τ et au plan (t, x) (rappelons que *vecteur unitaire* signifie $\vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(1)} = 1$), (iii) $\vec{e}_{(2)}$ est un vecteur unitaire, tangent à \mathcal{R}_τ et orthogonal à $\vec{e}_{(0)}$, ainsi qu'à $\vec{e}_{(1)}$, (iv) $\vec{e}_{(3)}$ est un vecteur unitaire, tangent à \mathcal{R}_τ et orthogonal aux trois vecteurs précédents. Montrer que le choix

$$\vec{e}_{(1)} = e_{(1)}^0 \vec{\partial}_0 + e_{(1)}^x \vec{\partial}_x, \quad e_{(1)}^x > 0, \quad (\text{B.48})$$

$$\vec{e}_{(2)} = \vec{\partial}_y \quad \text{et} \quad \vec{e}_{(3)} = \vec{\partial}_z \quad (\text{B.49})$$

correspond à une telle définition. Exprimer les composantes $e_{(1)}^0$ et $e_{(1)}^x$ du vecteur $\vec{e}_{(1)}$ en fonction de τ .

3.3 On définit dans la région de l'espace-temps qui n'est pas cachée de \mathcal{O} par l'horizon de Rindler \mathcal{H} , un système de coordonnées $(x'^\alpha) = (c\tau, \xi, y, z)$ de la manière suivante : à tout point M , on attribue la coordonnée $x'^0 = c\tau$ où τ est tel que $M \in \mathcal{R}_\tau$. On définit ensuite les coordonnées $(x'^1, x'^2, x'^3) = (\xi, y, z)$ comme l'unique triplet vérifiant

$$\overrightarrow{O(\tau)M} = \xi \vec{e}_{(1)}(\tau) + y \vec{e}_{(2)}(\tau) + z \vec{e}_{(3)}(\tau), \quad (\text{B.50})$$

où $O(\tau) = \mathcal{R}_\tau \cap \mathcal{L}$. Les coordonnées $(x'^\alpha) = (c\tau, \xi, y, z)$ sont appelées *coordonnées de Rindler*. Pour M voisin de \mathcal{L} , montrer que ces coordonnées sont celles mises en œuvre par l'observateur \mathcal{O} à l'aide de mesures physiques. En décomposant le vecteur $\overrightarrow{O(\tau)M}$ sur la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ liée aux coordonnées inertielles et en comparant avec (B.50) à l'aide du résultat du 3.2, montrer que les formules de passage des coordonnées (x^α) aux coordonnées (x'^α) sont

$$\begin{cases} ct &= (\xi + a^{-1}) \sinh(ac\tau) \\ x &= (\xi + a^{-1}) \cosh(ac\tau) - a^{-1} \\ y &= y \\ z &= z. \end{cases} \quad (\text{B.51})$$

Vérifier que ces formules sont compatibles avec l'équation de la ligne d'univers \mathcal{L} telle que donnée par (B.37)-(B.40).

3.4 Que vaut la coordonnée ξ sur l'horizon de Rindler \mathcal{H} ?

3.5 Montrer que les composantes du tenseur métrique par rapport aux coordonnées de Rindler sont données par

$$g'_{\mu\nu} dx'^{\mu} dx'^{\nu} = -(1 + a\xi)^2 c^2 d\tau^2 + d\xi^2 + dy^2 + dz^2. \quad (\text{B.52})$$

3.6 Que peut-on dire du vecteur $\vec{\partial}_\tau$ de la base naturelle associée aux coordonnées de Rindler ? Exprimer $\vec{\partial}_\tau$ en fonction de $\vec{\partial}_0$, $\vec{\partial}_x$, t et x .

3.7 Quelle est, en terme des coordonnées $(c\tau, \xi)$, l'équation des géodésiques lumière confinées au plan (ct, x) ? Dessiner l'allure de ces géodésiques dans un diagramme d'espace-temps basé sur les coordonnées de Rindler $(c\tau, \xi)$. Commenter.

3.8 Calculer les symboles de Christoffel $\Gamma'^{\gamma}_{\alpha\beta}$ associés aux coordonnées (x'^{α}) .

3.9 Calculer le tenseur de Riemann à partir des symboles de Christoffel obtenus ci-dessus. Conclure.

B.5 Expérience de Hafele & Keating

J.C. Hafele & R.E. Keating ont réalisé en 1971 [56, 57] une expérience qui a consisté à embarquer quatre horloges atomiques au césium sur des avions de ligne pour un tour du monde (avec escales) et à comparer au retour le temps mesuré par ces horloges avec des horloges identiques restées au sol. Il s'agit donc d'une réalisation macroscopique du fameux "problème des jumeaux". Nous nous proposons dans ce qui suit d'établir les prédictions de la relativité générale quant aux vieillissements relatifs des horloges, en nous basant sur une trajectoire simplifiée des avions.

1 On suppose qu'au voisinage de la Terre, le tenseur métrique \mathbf{g} est donné par la *métrique de Schwarzschild*, c'est-à-dire qu'il existe un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$, appelées *coordonnées de Schwarzschild*, tel que

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{B.53})$$

où $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ et $M = 6.0 \times 10^{24} \text{ kg}$. Pouvez-vous le justifier ?

2 Peut-on dire que les coordonnées (ct, r, θ, φ) tournent avec la Terre ?

3 On considère un observateur \mathcal{O} au voisinage de la Terre. Dans la suite, il s'agira soit d'un observateur à bord d'un avion, soit d'un observateur resté au sol, à la base de départ de l'avion. La ligne d'univers de \mathcal{O} est décrite en fonction des coordonnées de Schwarzschild par

$$r = r(t), \quad \theta = \theta(t), \quad \varphi = \varphi(t). \quad (\text{B.54})$$

On posera

$$\dot{r} := \frac{dr}{dt}, \quad \dot{\theta} := \frac{d\theta}{dt}, \quad \dot{\varphi} := \frac{d\varphi}{dt}. \quad (\text{B.55})$$

Exprimer les composantes u^α de la 4-vitesse \vec{u} de l'observateur \mathcal{O} dans la base naturelle $(c^{-1}\vec{\partial}_t, \vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ associée aux coordonnées de Schwarzschild, en fonction de \dot{r} , $\dot{\theta}$, $\dot{\varphi}$ et $u^0 := dt/d\tau$, où τ est le temps propre de l'observateur. Calculer u^0 .

4 Montrer que si l'observateur n'est pas animé d'une vitesse relativiste (par rapport aux coordonnées de Schwarzschild), une très bonne approximation de u^0 est

$$u^0 \simeq 1 + \frac{GM}{c^2 r} + \frac{1}{2c^2} \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (\text{B.56})$$

5 En déduire, sous la forme d'une intégrale par rapport à t , le temps propre $\Delta\tau$ écoulé pour l'observateur \mathcal{O} entre deux événements de coordonnées temporelles $t = t_1$ et $t = t_2$.

6 Évaluer $\Delta\tau$ en fonction de $\Delta t := t_2 - t_1$ lorsque l'observateur \mathcal{O} est celui qui reste au sol. On notera alors $\Delta\tau_{\text{sol}} := \Delta\tau$. L'événement de coordonnée temporelle t_1 est le départ de l'avion et celui de coordonnée temporelle t_2 son retour, après un tour du monde. On désignera dans ce cas par R la valeur de r et par Ω la valeur de $\dot{\varphi}$. Numériquement $R = 6.4 \times 10^6$ m (rayon de la Terre) et $\Omega = 2\pi/T$ avec $T = 23$ h 56 min (période de rotation de la Terre par rapport à un observateur asymptotiquement inertiel). Exprimer le résultat en fonction de Δt , R , Ω et θ , colatitude de l'aéroport où se trouve \mathcal{O} .

7 Afin d'évaluer $\Delta\tau =: \Delta\tau_{\text{avion}}$ pour l'observateur qui effectue le tour du monde en avion, nous supposons que (i) l'avion reste à la latitude de son point de départ (colatitude θ), (ii) il vole à une altitude h constante, et (iii) sa vitesse par rapport au sol est $\vec{V} = V \vec{e}_\varphi$ ($\vec{e}_\varphi := (r \sin \theta)^{-1} \vec{\partial}_\varphi$) avec V constant. De plus, nous négligerons les phases de décollage et d'atterrissage, ainsi que les escales. Étant données les faibles vitesses mises en jeu, nous supposons également que la loi newtonienne d'addition des vitesses s'applique, de sorte que

$$r \sin \theta \dot{\varphi}_{\text{avion}} = V + r \sin \theta \dot{\varphi}_{\text{sol}} = V + r\Omega \sin \theta, \quad (\text{B.57})$$

avec $V > 0$ (resp. $V < 0$) si l'avion va vers l'est (resp. l'ouest). Exprimer alors $\Delta\tau_{\text{avion}}$ en fonction de R , h , V , θ , Ω et Δt .

8 Montrer que l'écart relatif des temps propres des deux observateurs est

$$\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = \frac{GM}{c^2} \frac{h}{R(R+h)} - \frac{1}{2c^2} \left[V^2 + 2V(R+h)\Omega \sin \theta + h(2R+h)\Omega^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (\text{B.58})$$

Que vaut le rapport h/R par rapport à 1 ? En déduire une simplification de la formule ci-dessus. Une simplification supplémentaire peut être obtenue en comparant $VR\Omega/c^2$ et $(R\Omega)^2/c^2$ à $GM/(c^2 R)$. Écrire alors la formule finale. Commenter.

9 *Application numérique* : les deux vols autour du monde, l'un vers l'est, l'autre vers l'ouest, ont été effectués en octobre 1971 sur des Boeing 707 et 747 de compagnies américaines, à une latitude moyenne de 30° , une altitude moyenne $h = 9$ km et une vitesse moyenne par rapport au sol $|V| = 830$ km h⁻¹. Calculer l'écart relatif entre $\Delta\tau_{\text{avion}}$ et $\Delta\tau_{\text{sol}}$ pour le vol vers l'est et pour celui vers l'ouest.

10 Calculer $\delta\tau := \Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}$ pour chacun des deux vols. Les mesures effectuées par Hafele & Keating et moyennées sur les quatre horloges embarquées, ont donné [57]

$$\delta\tau_{\text{est}} = -59 \pm 10 \text{ ns} \quad \text{et} \quad \delta\tau_{\text{ouest}} = 273 \pm 7 \text{ ns.} \quad (\text{B.59})$$

Les prédictions théoriques, intégrant les trajectoires et les vitesses réelles des avions (contrairement au calcul simplifié considéré ici), sont [56]

$$\delta\tau_{\text{est}}^{\text{RG}} = -40 \pm 23 \text{ ns} \quad \text{et} \quad \delta\tau_{\text{ouest}}^{\text{RG}} = 275 \pm 21 \text{ ns,} \quad (\text{B.60})$$

les barres d'erreur reflétant les incertitudes sur les paramètres de vol. Conclure.

B.6 Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker

On considère un observateur \mathcal{O} de ligne d'univers \mathcal{L} dans un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. On désigne par \vec{u} la 4-vitesse de \mathcal{O} et par τ son temps propre. Soit (x^α) un système de coordonnées de \mathcal{E} défini au voisinage de \mathcal{L} . L'équation de \mathcal{L} , paramétrée par le temps propre, est alors donnée par quatre fonctions $X^\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que, le long de \mathcal{L} ,

$$x^\alpha = X^\alpha(\tau). \quad (\text{B.61})$$

1 Rappeler l'expression, en fonction de $X^\alpha(\tau)$, des composantes u^α de la 4-vitesse \vec{u} par rapport à la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ associée aux coordonnées (x^α) .

2 Pour toute fonction scalaire f définie le long de \mathcal{L} , c'est-à-dire toute fonction $f : \mathcal{L} \rightarrow \mathbb{R}$, on désignera par \tilde{f} n'importe quel champ scalaire défini sur \mathcal{E} qui coïncide avec f sur \mathcal{L} , c'est-à-dire n'importe quel champ $\tilde{f} : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x^0, x^1, x^2, x^3) \mapsto \tilde{f}(x^0, x^1, x^2, x^3)$ qui vérifie

$$\forall \tau \in \mathbb{R}, \quad \tilde{f}(X^0(\tau), X^1(\tau), X^2(\tau), X^3(\tau)) = f(\tau), \quad (\text{B.62})$$

où $f(\tau)$ désigne la valeur de f au point de \mathcal{L} de temps propre τ . \tilde{f} étant un champ scalaire sur \mathcal{E} , on peut considérer son gradient $\nabla \tilde{f}$. Exprimer les composantes $\nabla_\alpha \tilde{f}$ de $\nabla \tilde{f}$ par rapport aux coordonnées (x^α) en fonction des dérivées partielles de \tilde{f} . En utilisant les composantes de u^α obtenues à la question 1, montrer que l'on a la relation

$$\nabla_{\vec{u}} \tilde{f} = u^\alpha \nabla_\alpha \tilde{f} = \frac{1}{c} \frac{df}{d\tau}. \quad (\text{B.63})$$

3 On appelle *4-accélération* de l'observateur \mathcal{O} le vecteur suivant défini le long de \mathcal{L} :

$$\vec{a} := \nabla_{\vec{u}} \vec{u}, \quad (\text{B.64})$$

où ∇ est la connexion associée à la métrique \mathbf{g} . Montrer que \vec{a} est un vecteur orthogonal à \vec{u} . Que vaut \vec{a} si \mathcal{L} est une géodésique ?

4 Exprimer les composantes a^α de \vec{a} dans la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ en fonction des composantes de \vec{u} et des symboles de Christoffel $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ de la métrique \mathbf{g} .

5 En utilisant les résultats des questions 1 et 2 (sans toutefois employer des notations distinctes pour \tilde{u}^α et u^α), exprimer les composantes a^α en terme des fonctions $X^\alpha(\tau)$. Comparer avec l'équation des géodésiques et conclure.

6 Pour tout champ vectoriel \vec{v} sur \mathcal{E} , on appelle *dérivée de Fermi-Walker* de \vec{v} le long de \mathcal{L} le vecteur défini en tout point de \mathcal{L} par

$$D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v} := \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{u}. \quad (\text{B.65})$$

Montrer que $D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{u} = 0$ et que si \vec{v} est orthogonal à \vec{u} (c'est-à-dire si \vec{v} est dans l'espace local de repos de l'observateur \mathcal{O}), alors $D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v}$ l'est également. La dérivée covariante $\nabla_{\vec{u}} \vec{v}$ a-t-elle cette propriété ?

7 Montrer que si \vec{v} et \vec{w} sont deux champs vectoriels définis le long de \mathcal{L} tels que $D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v} = 0$ et $D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{w} = 0$, alors le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$ est constant le long de \mathcal{L} .

8 On définit l'opérateur vectoriel

$$\begin{aligned} \perp_{\vec{u}} : \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) &\longrightarrow \mathcal{T}_P(\mathcal{E}) \\ \vec{v} &\longmapsto \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}. \end{aligned} \quad (\text{B.66})$$

$\perp_{\vec{u}}$ est-il un opérateur linéaire? Constater que $\perp_{\vec{u}}(\vec{u}) = 0$ et que pour tout vecteur \vec{v} orthogonal à \vec{u} , $\perp_{\vec{u}}(\vec{v}) = \vec{v}$. En déduire que $\perp_{\vec{u}}$ est le projecteur orthogonal sur l'hyperplan normal à \vec{u} (espace local de repos de l'observateur \mathcal{O}). Exprimer la matrice \perp_{β}^{α} de $\perp_{\vec{u}}$ dans la base naturelle $(\vec{\partial}_{\alpha})$ en fonction des composantes u^{α} du vecteur \vec{u} et des composantes u_{α} de la forme linéaire \underline{u} associée à \vec{u} par la métrique \mathbf{g} .

9 Montrer que, pour tout champ vectoriel \vec{v} orthogonal à \vec{u} ,

$$D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v} = \perp_{\vec{u}} (\nabla_{\vec{u}} \vec{v}). \quad (\text{B.67})$$

B.7 Modèle d'étoile incompressible

On se propose d'étudier un modèle très simplifié d'étoile relativiste, à savoir une étoile statique constituée d'un fluide parfait *incompressible*. La densité d'énergie totale ρc^2 est alors constante dans toute l'étoile :

$$\rho = \rho_0 = \text{const.} \quad (\text{B.68})$$

Bien entendu, la matière qui constitue les étoiles réelles est compressible (notamment la matière nucléaire dont sont formées les étoiles à neutrons), de sorte que (B.68) est une hypothèse académique. Néanmoins elle présente l'avantage de conduire à une solution exacte de l'équation d'Einstein, obtenue par Karl Schwarzschild en 1916 [35].

On fera l'hypothèse d'un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ statique et à symétrie sphérique. Il existe alors un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ où les composantes de la métrique se mettent sous la forme (cf. § 4.6)

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -e^{2\nu(r)} c^2 dt^2 + e^{2\alpha(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{B.69})$$

En supposant un fluide parfait, c'est-à-dire un tenseur énergie-impulsion de la forme

$$\mathbf{T} = (\rho c^2 + p) \mathbf{u} \otimes \mathbf{u} + p \mathbf{g}, \quad (\text{B.70})$$

où p est le champ de pression et \mathbf{u} la forme linéaire associée à la 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ du fluide par dualité métrique, l'équation d'Einstein conduit au système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff (4.197)-(4.199) :

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi r^2 \rho(r) \quad (\text{B.71})$$

$$\frac{d\nu}{dr} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1} \left[\frac{Gm(r)}{c^2 r^2} + \frac{4\pi G}{c^4} r p(r) \right] \quad (\text{B.72})$$

$$\frac{dp}{dr} = - [\rho(r)c^2 + p(r)] \frac{d\nu}{dr}. \quad (\text{B.73})$$

Dans ce système, la fonction $m(r)$ est reliée à $\alpha(r)$ par

$$e^{2\alpha(r)} = \left[1 - \frac{2Gm(r)}{c^2 r} \right]^{-1}. \quad (\text{B.74})$$

1 En utilisant l'expression générale de la vitesse du son donnée par l'Eq. (B.94) du problème B.8 (cf. page 229 avec $\varepsilon = \rho c^2$), estimer la vitesse du son dans une étoile qui vérifie l'hypothèse (B.68) ? En quoi n'est-ce pas réaliste ?

2 Intégrer l'équation (B.71) sous l'hypothèse (B.68). Pourquoi doit-on fixer la constante d'intégration de manière à assurer $m(0) = 0$? On exprimera le résultat en fonction de la valeur R de la coordonnée r à la surface de l'étoile et de la masse totale de l'étoile $M = m(R)$. Que vaut $m(r)$ pour $r > R$?

3 Quelle est la métrique à l'extérieur de l'étoile ? En déduire la valeur des fonctions $\nu(r)$ et $\alpha(r)$ pour $r > R$.

4 Montrer que l'équation (B.73) conduit à

$$[\rho_0 c^2 + p(r)] e^{\nu(r)} = \text{const.} \quad (\text{B.75})$$

Que valent p et ν à la surface de l'étoile ? En déduire que la constante dans l'équation ci-dessus vaut $\rho_0 c^2 \sqrt{1 - R_S/R}$, si bien que l'on peut écrire

$$[\rho_0 c^2 + p(r)] e^{\nu(r)} = \rho_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}, \quad (\text{B.76})$$

où $R_S := 2GM/c^2$. Comment s'interprète la constante R_S ?

5 À l'aide des résultats des questions précédentes, montrer que l'on peut mettre l'Eq. (B.72) sous la forme

$$\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} = \frac{R_S}{R^3} \left(1 - \frac{R_S r^2}{R^3} \right)^{-1} \left(\frac{3}{2} e^{-\nu} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - 1 \right). \quad (\text{B.77})$$

Effectuer les changements de variable $x := \sqrt{1 - R_S r^2/R^3}$ et $N := e^\nu$ pour se ramener à l'équation différentielle

$$x \frac{dN}{dx} - N = -\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}. \quad (\text{B.78})$$

Quelle solution particulière très simple a-t-on ? Quelle est la solution générale de l'équation homogène (c'est-à-dire avec le membre de droite mis à zéro) ? En déduire la forme de la solution générale de l'équation complète. En fixant la constante par la valeur de ν à la surface de l'étoile, établir le résultat final

$$e^{\nu(r)} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R. \quad (\text{B.79})$$

6 Déduire la valeur du champ de pression $p(r)$ des résultats des questions 4 et 5. Vérifier que $p(R) = 0$. Que vaut la pression centrale $p_c := p(0)$? On l'exprimera en fonction de ρ_0 et du *paramètre de compacité* (cf. § 3.2.3) de l'étoile : $\Xi := GM/(c^2 R)$. Pour ρ_0 fixé, tracer la courbe p_c en fonction de Ξ . Que se passe-t-il pour $\Xi = 4/9$? En déduire qu'une étoile statique constituée d'un fluide incompressible ne peut pas avoir un rapport R_S/R plus grand qu'une valeur critique. En déduire également que pour ρ_0 fixé, la masse de l'étoile ne peut pas dépasser une certaine limite M_{\max} . Évaluer numériquement M_{\max} pour $\rho_0 = \rho_{\text{nuc}} = 2 \cdot 10^{17} \text{ kg m}^{-3}$ (densité nucléaire). On donne $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m s}^{-1}$, $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$ et $1M_\odot = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$.

7 Que devient le coefficient métrique g_{00} au centre de l'étoile lorsque $\Xi \rightarrow 4/9$?

8 Exprimer le décalage spectral subi par un photon émis à la surface de l'étoile et reçu par un observateur situé à l'infini et immobile par rapport à l'étoile. Quelle est la valeur maximale de ce décalage spectral ?

B.8 Vitesse du son relativiste

On considère, dans l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, un fluide parfait, de 4-vitesse \vec{u} , de densité d'énergie propre ε et de pression p . Dans un système de coordonnées (x^α) de \mathcal{E} , les composantes contravariantes de son tenseur énergie-impulsion sont alors

$$T^{\alpha\beta} = (\varepsilon + p) u^\alpha u^\beta + p g^{\alpha\beta}. \quad (\text{B.80})$$

On fera l'hypothèse d'une matière froide, c'est-à-dire d'une équation d'état de la forme

$$p = p(\varepsilon). \quad (\text{B.81})$$

1 Développer l'équation de conservation de l'énergie-impulsion

$$\nabla_\beta T^{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{B.82})$$

On fera apparaître la quadri-accélération du fluide, \vec{a} , dont les composantes sont $a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha$.

2 Montrer que les vecteurs \vec{u} et \vec{a} sont orthogonaux, c'est-à-dire que $u_\alpha a^\alpha = 0$. En déduire que la projection de l'équation obtenue à la question 1 sur la 4-vitesse du fluide conduit à

$$u^\beta \nabla_\beta \varepsilon + (\varepsilon + p) \nabla_\beta u^\beta = 0. \quad (\text{B.83})$$

3 À l'aide de (B.83), simplifier l'équation obtenue à la question 1 pour la mettre sous la forme

$$(\varepsilon + p) a^\alpha = -\nabla^\alpha p - (u^\beta \nabla_\beta p) u^\alpha. \quad (\text{B.84})$$

4 On considère une perturbation d'un fluide *homogène*, c'est-à-dire que

$$\varepsilon = \varepsilon_0 + \delta\varepsilon \quad (\text{B.85})$$

$$p = p_0 + \delta p \quad (\text{B.86})$$

$$\vec{u} = \vec{u}_0 + \delta\vec{u}, \quad (\text{B.87})$$

où ε_0 , p_0 et \vec{u}_0 sont des champs constants sur l'espace-temps : $\nabla\varepsilon_0 = 0$, $\nabla p_0 = 0$ et $\nabla\vec{u}_0 = 0$. On négligera les effets du champ gravitationnel, c'est-à-dire que l'on se place dans l'espace-temps de Minkowski. Montrer qu'au premier ordre en $\delta\vec{u}$,

$$a^\alpha \simeq u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha. \quad (\text{B.88})$$

Développer ensuite les équations (B.83) et (B.84) au premier ordre en $\delta\varepsilon$, δp et $\delta\vec{u}$.

5 Exprimer la perturbation δp en fonction de $\delta\varepsilon$ et de la dérivée de l'équation d'état (B.81)

$$p'_0 := \left. \frac{dp}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=\varepsilon_0}. \quad (\text{B.89})$$

On supposera $p'_0 > 0$ et on remarquera que p'_0 est un champ constant sur l'espace-temps. Réécrire alors la version linéarisée de l'Eq. (B.84) obtenue à la question 4 uniquement en fonction de $\delta\varepsilon$ et $\delta\vec{u}$.

6 En prenant la dérivée le long de \vec{u}_0 de la version linéarisée de l'Eq. (B.83) obtenue à la question 4 (c'est-à-dire en la contractant avec $u_0^\alpha \nabla_\alpha$) et en prenant la divergence de l'équation obtenue à la question 5 (c'est-à-dire en la contractant avec ∇_α), montrer que l'on obtient l'équation suivante pour la perturbation $\delta\varepsilon$:

$$(1 - p'_0) u_0^\alpha u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta\varepsilon - p'_0 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta\varepsilon = 0, \quad (\text{B.90})$$

ou de manière équivalente,

$$(1 - p'_0) \nabla_{\vec{u}_0} \nabla_{\vec{u}_0} \delta\varepsilon - p'_0 \square \delta\varepsilon = 0, \quad (\text{B.91})$$

$\square := \nabla_\alpha \nabla^\alpha$ étant l'opérateur d'alembertien associé à la métrique \mathbf{g} .

7 Dire pourquoi on peut introduire un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ tel que

$$u_0^\alpha \nabla_\alpha = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}. \quad (\text{B.92})$$

Montrer que l'équation (B.90) se met alors sous la forme

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta \varepsilon}{\partial t^2} - p'_0 \Delta \delta \varepsilon = 0, \quad (\text{B.93})$$

où $\Delta := \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$. En déduire que la vitesse de propagation de la perturbation $\delta \varepsilon$ par rapport aux coordonnées (x^α) est $c_s = c\sqrt{p'_0}$, c'est-à-dire

$$c_s = c\sqrt{\frac{dp}{d\varepsilon}}. \quad (\text{B.94})$$

Pourquoi c_s est-elle aussi la vitesse de propagation de la perturbation δp ? On dit alors que c_s est la *vitesse du son* dans le fluide considéré. Que vaut la limite non-relativiste de (B.94)? Retrouve-t-on une expression connue?

B.9 Photon émis par une étoile

On considère une étoile à symétrie sphérique, de masse M . Il existe alors un système de coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ sur l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ tel qu'à l'extérieur de l'étoile, les composantes de la métrique se mettent sous la forme

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -N(r)^2 c^2 dt^2 + N(r)^{-2} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2), \quad (\text{B.95})$$

avec

$$N(r) := \sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}, \quad R_S := \frac{2GM}{c^2}. \quad (\text{B.96})$$

1 Comment appelle-t-on la métrique donnée par (B.95)-(B.96)? Est-ce la seule solution possible pour l'espace-temps à l'extérieur de l'étoile?

2 On considère un photon émis par l'étoile. Sa 4-impulsion \vec{p} obéit aux deux conditions suivantes :

$$\vec{p} \cdot \vec{p} = 0 \quad (\text{B.97})$$

$$\nabla_{\vec{p}} \vec{p} = 0, \quad (\text{B.98})$$

où $\vec{p} \cdot \vec{p} := \mathbf{g}(\vec{p}, \vec{p})$ et ∇ est l'opérateur de dérivation covariante associé à \mathbf{g} . Pouvez-vous commenter les équations (B.97)-(B.98)? Comment s'écrivent-elles en termes des composantes $(g_{\alpha\beta})$ de \mathbf{g} et des composantes (p^α) de \vec{p} relatives aux coordonnées (x^α) ?

3 On suppose que le photon est émis *radialement*, dans le sens où

$$\vec{p} = p^0 \vec{\partial}_0 + p^r \vec{\partial}_r, \quad (\text{B.99})$$

$\vec{\partial}_\alpha$ désignant les vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) . Justifier que p^0 et p^r sont deux fonctions de r seulement : $p^0 = p^0(r)$ et $p^r = p^r(r)$. À l'aide de l'Éq. (B.97), exprimer p^r en fonction de p^0 et N . Quel est le signe de p^r ?

4 Montrer que la condition (B.98) conduit au système de quatre équations

$$\frac{N^2}{p^0} \frac{dp^\alpha}{dr} + \Gamma^\alpha_{00} + 2\Gamma^\alpha_{0r} N^2 + \Gamma^\alpha_{rr} N^4 = 0 \quad (0 \leq \alpha \leq 3), \quad (\text{B.100})$$

où les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles de Christoffel de \mathbf{g} dans les coordonnées (x^α) . On donne

$$\begin{aligned} \Gamma^0_{0r} &= \Gamma^0_{r0} = N'/N \\ \Gamma^r_{00} &= N^3 N' & \Gamma^r_{rr} &= -N'/N & \Gamma^r_{\theta\theta} &= -r N^2 & \Gamma^r_{\varphi\varphi} &= -r \sin^2 \theta N^2 \\ \Gamma^\theta_{r\theta} &= \Gamma^\theta_{\theta r} = 1/r & \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} &= -\cos \theta \sin \theta \\ \Gamma^\varphi_{r\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi r} = 1/r & \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} &= \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} = \frac{1}{\tan \theta}, \end{aligned} \quad (\text{B.101})$$

où $N' := dN/dr$. Tous les autres symboles de Christoffel sont nuls. Montrer que les composantes $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ de (B.100) conduisent toutes deux à la relation

$$N^2 p^0 = \frac{\varepsilon}{c} \quad \text{avec} \quad \varepsilon = \text{const.} \quad (\text{B.102})$$

Quelle est la dimension de la constante ε ? À quoi se réduisent les composantes $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$ de (B.100)? Exprimer $\vec{\mathbf{p}}$ en fonction de ε , N , c , $\vec{\mathbf{d}}_0$ et $\vec{\mathbf{d}}_r$.

5 Posons $\vec{\xi}_{(0)} := \vec{\mathbf{d}}_0$. Quelle est la particularité de ce champ de vecteurs vis-à-vis de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$? Que vaut le produit scalaire $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{\mathbf{p}}$? En déduire qu'il est constant le long de la ligne d'univers du photon. Ce résultat vous surprend-il?

6 On appelle *observateur statique* tout observateur \mathcal{O} dont la 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}_0$ est parallèle à $\vec{\xi}_{(0)}$. Exprimer $\vec{\mathbf{u}}_0$ en fonction de $\vec{\xi}_{(0)}$ et N . Quelle est l'énergie E du photon mesurée par un observateur statique? On exprimera le résultat en fonction de ε , R_S et r . En déduire l'interprétation physique de la constante ε . Comparer l'énergie du photon mesurée par un observateur statique à l'infini à celle mesurée par un observateur statique placé au point d'émission (on notera R la coordonnée r de la surface de l'étoile). Comment appelle-t-on le phénomène ainsi mis en évidence? Faire l'application numérique pour (i) le Soleil ($M = 2 \times 10^{30}$ kg, $R = 7 \times 10^5$ km) et (ii) une étoile à neutrons ($M = 3 \times 10^{30}$ kg, $R = 10$ km). On donne $G = 6.67 \times 10^{-11}$ m³ kg⁻¹ s⁻² et $c = 3 \times 10^8$ m s⁻¹.

B.10 Pression de radiation et effet Poynting-Robertson

On se place dans le même cadre qu'au problème B.9, à savoir dans un espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ à symétrie sphérique extérieur à une étoile et dans des coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ définies par (B.95). On suppose que l'étoile est source d'un rayonnement électromagnétique (elle brille!). En toute rigueur, l'extérieur de l'étoile n'est plus le vide car le champ électromagnétique possède une certaine énergie-impulsion. Cependant, nous négligerons la contribution de cette dernière à l'équation d'Einstein et continuerons de supposer que la métrique en dehors de l'étoile est donnée par l'Éq. (B.95).

Une bonne approximation du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique rayonné par l'étoile est

$$\mathbf{T} = q \underline{\mathbf{k}} \otimes \underline{\mathbf{k}}, \quad (\text{B.103})$$

où $q = q(r)$ et $\underline{\mathbf{k}}$ est la forme linéaire duale métrique d'un vecteur $\vec{\mathbf{k}}$ qui a les mêmes propriétés que le vecteur $\vec{\mathbf{p}}$ considéré dans le problème B.9, à savoir

$$\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{k}} = 0, \quad \nabla_{\vec{\mathbf{k}}} \vec{\mathbf{k}} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{\mathbf{k}} = k^0(r) \vec{\partial}_0 + k^r(r) \vec{\partial}_r. \quad (\text{B.104})$$

La différence avec le problème B.9 est que $\vec{\mathbf{k}}$ est un champ vectoriel défini dans tout l'espace alors que $\vec{\mathbf{p}}$ n'était défini que le long de la ligne d'univers du photon. Rappelons que le produit tensoriel \otimes qui apparaît dans (B.103) signifie que la forme bilinéaire \mathbf{T} associe à tout couple de vecteurs $(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2)$ le nombre réel $\mathbf{T}(\vec{\mathbf{v}}_1, \vec{\mathbf{v}}_2) = q(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_1)(\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{v}}_2)$. En d'autres termes, les composantes du tenseur \mathbf{T} par rapport aux coordonnées (x^α) sont

$$T_{\alpha\beta} = q k_\alpha k_\beta. \quad (\text{B.105})$$

Nous avons vu dans le problème B.9 que les trois propriétés (B.104) conduisent à $k^0 = \alpha/N^2$ et $k^r = \alpha$, où α est une constante. Quitte à renormaliser q , nous choisirons $\alpha = 1$, de sorte que l'on peut écrire

$$\vec{\mathbf{k}} = N^{-2} \vec{\partial}_0 + \vec{\partial}_r. \quad (\text{B.106})$$

1 La trace du tenseur énergie-impulsion est définie par $T := g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}$. Que vaut elle ? (il s'agit d'une propriété générale, vérifiée par tout tenseur énergie-impulsion d'un champ électromagnétique).

2 Le rayonnement électromagnétique étant la seule source d'énergie-impulsion à l'extérieur de l'étoile, la loi générale de conservation de l'énergie-impulsion s'écrit $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$, c'est-à-dire

$$\nabla^\mu T_{\alpha\mu} = 0. \quad (\text{B.107})$$

Montrer que cette équation est équivalente à la relation scalaire

$$\nabla_\mu (q k^\mu) = 0. \quad (\text{B.108})$$

En exprimant la divergence d'un champ vectoriel $\vec{\mathbf{v}}$ suivant la formule

$$\nabla_\mu v^\mu = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} v^\mu), \quad g := \det(g_{\alpha\beta}), \quad (\text{B.109})$$

en déduire que

$$q = \frac{A}{r^2}, \quad \text{avec} \quad A = \text{const.} \quad (\text{B.110})$$

3 On considère un observateur statique \mathcal{O} , tel que défini à la question 6 du problème B.9. Soit une surface élémentaire dans l'espace local de repos de \mathcal{O} , d'aire dS et de normale unitaire $\vec{\mathbf{n}} : \vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{n}} = 1$ et $\vec{\mathbf{u}}_0 \cdot \vec{\mathbf{n}} = 0$, $\vec{\mathbf{u}}_0$ étant la 4-vitesse de \mathcal{O} . L'énergie qui traverse cette

surface par unité du temps propre τ_0 de \mathcal{O} est donnée par le tenseur énergie-impulsion suivant la formule

$$\frac{dE}{d\tau_0} = -c \mathbf{T}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{n}}) dS. \quad (\text{B.111})$$

Considérons la sphère \mathcal{S} définie comme l'ensemble des points de \mathcal{E} de coordonnées t et r constantes. La luminosité totale de l'étoile mesurée par l'observateur statique ayant la même coordonnée r que \mathcal{S} est alors

$$L = \int_{\mathcal{S}} \frac{dE}{d\tau_0} = -c \int_{\mathcal{S}} \mathbf{T}(\vec{\mathbf{u}}_0, \vec{\mathbf{n}}) dS. \quad (\text{B.112})$$

Montrer que dans le cas présent $\vec{\mathbf{n}} = N \vec{\partial}_r$ et $dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. En déduire que

$$L = \frac{L_0}{N^2}, \quad \text{avec} \quad L_0 := 4\pi c A. \quad (\text{B.113})$$

Quelle est l'interprétation physique de L_0 ? Que vaut L_0 pour le Soleil?

4 On considère un petit corps sensible à la pression de radiation (grain de poussière, astéroïde, voile solaire, etc.). On ne tiendra pas compte de son extension spatiale, si bien qu'on le traitera comme une particule ponctuelle, de ligne d'univers \mathcal{L} , de temps propre τ , de 4-vitesse $\vec{\mathbf{u}}$ et de masse m . Son mouvement est alors régi par la relation fondamentale de la dynamique relativiste :

$$m \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{f}}, \quad (\text{B.114})$$

où

$$\vec{\mathbf{a}} := \nabla_{\vec{\mathbf{u}}} \vec{\mathbf{u}} \quad (\text{B.115})$$

est la 4-accélération du corps et $\vec{\mathbf{f}}$ la 4-force agissant sur lui. $\vec{\mathbf{f}}$ décrit l'ensemble des forces s'exerçant sur le corps, à l'exception de la « force » gravitationnelle. Pouvez-vous justifier pourquoi? Montrer que les composantes de la 4-accélération sont

$$a^\alpha = u^\mu \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu. \quad (\text{B.116})$$

À l'aide de (B.101) et (B.96), évaluer a^r et a^φ pour un mouvement dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$). On utilisera la relation de normalisation de la 4-vitesse pour éliminer u^0 et on exprimera le résultat en fonction de $du^r/d\tau$, $du^\varphi/d\tau$, u^r , u^φ , r et M .

5 La 4-force $\vec{\mathbf{f}}$ résultant de la pression de radiation sur le petit corps s'exprime en fonction du tenseur énergie-impulsion du champ électromagnétique suivant

$$f^\alpha = -\frac{\sigma}{c^2} (g^{\alpha\mu} + u^\alpha u^\mu) T_{\mu\nu} u^\nu, \quad (\text{B.117})$$

où σ est la section efficace du corps, vis-à-vis du rayonnement incident. Pour une sphère de rayon R_0 qui réémet de manière isotrope dans son référentiel propre le rayonnement absorbé, $\sigma = \pi R_0^2$. Montrer que (B.117) conduit à

$$\vec{\mathbf{f}} = -\frac{L_0}{4\pi c^3} \frac{\sigma}{r^2} (\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) \left[\vec{\mathbf{k}} + (\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) \vec{\mathbf{u}} \right], \quad \text{avec} \quad (\vec{\mathbf{k}} \cdot \vec{\mathbf{u}}) = -u^0 + \frac{u^r}{N^2}. \quad (\text{B.118})$$

Vérifier que la 4-force est orthogonale à la 4-vitesse : $\vec{f} \cdot \vec{u} = 0$.

6 On suppose qu'à $\tau = 0$, $u^r = 0$. Montrer que les équations du mouvement sont, à cet instant précis,

$$c \frac{du^r}{d\tau} = -\frac{GM}{r^2} + \left(1 - \frac{3R_S}{2r}\right) r (cu^\varphi)^2 + \frac{L_0}{4\pi c} \frac{\sigma}{mr^2} \sqrt{\frac{1 + (ru^\varphi)^2}{1 - R_S/r}} \quad (\text{B.119})$$

$$c \frac{du^\varphi}{d\tau} = -\frac{L_0}{4\pi c^2} \frac{\sigma}{mr^2} \frac{1 + (ru^\varphi)^2}{1 - R_S/r} cu^\varphi. \quad (\text{B.120})$$

Que vaudrait $du^\varphi/d\tau$ sur une orbite exactement circulaire ? Le fait que $du^\varphi/d\tau < 0$ pour $L_0 \neq 0$ constitue une « force de freinage », appelée *force de Poynting-Robertson*. Discuter la limite newtonienne des équations ci-dessus.

7 À partir des équations (B.119)-(B.120), montrer qu'il existe une position à laquelle le corps reste immobile par rapport à un observateur statique.

B.11 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild

1 On considère un trou noir stationnaire et sans rotation. Par quelle métrique est-il décrit ?

2 On désigne par $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ l'espace-temps de Schwarzschild. Donner les composantes $g_{\alpha\beta}$ du tenseur métrique \mathbf{g} dans les coordonnées de Schwarzschild $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$. Les exprimer en fonction du rayon de Schwarzschild R_S plutôt que de la masse M du trou noir.

3 On considère une particule massive \mathcal{P} , de masse $m \ll M$ et qui n'est soumise qu'au champ gravitationnel du trou noir. À quel type de courbe de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ correspond la ligne d'univers de cette particule ?

On pose

$$\varepsilon := -c^2 \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{u}, \quad (\text{B.121})$$

où \vec{u} est la 4-vitesse de \mathcal{P} et $\vec{\xi}_{(0)}$ le vecteur de Killing associé à la stationnarité de la métrique de Schwarzschild, c'est-à-dire le vecteur de composantes $\xi_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ dans les coordonnées (x^α) . Que pouvez-vous dire de la quantité ε le long de la ligne d'univers de \mathcal{P} ? Quelle est la signification physique de cette quantité ?

4 On suppose que \mathcal{P} a une trajectoire purement radiale, c'est-à-dire se déplace à coordonnées θ et φ fixes. Montrer que sa 4-vitesse est de la forme

$$u^\alpha = (u^0, u^r, 0, 0). \quad (\text{B.122})$$

Exprimer ε en fonction de r , R_S et u^0 . En déduire que

$$u^0 = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \frac{\varepsilon}{c^2}. \quad (\text{B.123})$$

5 Montrer que

$$u^r = \pm \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{c^4} - 1 + \frac{R_S}{r}}. \quad (\text{B.124})$$

À quel type de mouvement correspond le signe + (resp. le signe -) dans l'expression ci-dessus ?

6 Dans tout ce qui suit on suppose que la particule \mathcal{P} tombe vers le trou noir depuis $r = +\infty$. On désigne par Γ le facteur de Lorentz de \mathcal{P} par rapport à un observateur statique situé très loin du trou noir (en $r \rightarrow +\infty$). Justifier la relation

$$\varepsilon = \Gamma c^2. \quad (\text{B.125})$$

En déduire que si la particule tombe depuis l'infini avec une vitesse nulle (par rapport à l'observateur statique), alors

$$u^0 = \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} \quad \text{et} \quad u^r = -\sqrt{\frac{R_S}{r}}. \quad (\text{B.126})$$

7 Déduire de (B.126) que le mouvement de \mathcal{P} est régi par l'équation différentielle

$$\frac{dr}{dt} = -c\sqrt{\frac{R_S}{r}} \left(1 - \frac{R_S}{r}\right). \quad (\text{B.127})$$

Quelle est la limite newtonienne de cette équation ?

8 Les composantes covariantes de la 4-vitesse de \mathcal{P} sont définies par $u_\alpha := g_{\alpha\beta}u^\beta$. Montrer que

$$u_\alpha = \left(-1, -\frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r}, 0, 0\right). \quad (\text{B.128})$$

9 Montrer qu'il existe une fonction $T = T(t, r)$ telle que

$$u_\alpha = -c \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}. \quad (\text{B.129})$$

Exprimer T en fonction de t , r , R_S et c . On donne la primitive

$$\int \frac{\sqrt{x}}{x-1} dx = 2\sqrt{x} + \ln \left| \frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1} \right|. \quad (\text{B.130})$$

10 On note τ le temps propre de la particule \mathcal{P} . En utilisant (B.126) et (B.127), montrer que le long de la ligne d'univers de \mathcal{P}

$$d\tau = dt + \frac{1}{c} \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} dr. \quad (\text{B.131})$$

En déduire que

$$\tau = T + \text{const.} \quad (\text{B.132})$$

11 Pour $T_0 \in \mathbb{R}$ fixé, on désigne par Σ_{T_0} l'ensemble des points de l'espace-temps \mathcal{E} pour lesquels $T = T_0$. Il s'agit d'une hypersurface de \mathcal{E} . Montrer que tout vecteur \vec{v} tangent à Σ_{T_0} vérifie

$$v^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} = 0. \quad (\text{B.133})$$

Déduire alors de (B.129) qu'au point où la ligne d'univers de \mathcal{P} rencontre l'hypersurface Σ_{T_0} , la 4-vitesse \vec{u} de \mathcal{P} est orthogonale à Σ_{T_0} .

12 On appelle coordonnées de Painlevé-Gullstrand les coordonnées

$$\tilde{x}^\alpha := (cT, r, \theta, \varphi). \quad (\text{B.134})$$

À l'aide de (B.131) et (B.132), montrer que les composantes du tenseur métrique dans ces coordonnées sont données par

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dT^2 + 2\sqrt{\frac{R_S}{r}} c dT dr + dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{B.135})$$

Que vaut la métrique induite sur l'hypersurface Σ_{T_0} ?

13 Comment se comportent les coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'horizon des événements? Connaissez-vous un autre système de coordonnées qui partage cette propriété? Qu'en est-il en $r = 0$?

14 Montrer qu'une écriture alternative à (B.135) est

$$\tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = -c^2 dT^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{R_S}{r}} c dT\right)^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (\text{B.136})$$

En déduire l'équation des géodésiques lumière radiales, entrantes et sortantes, dans les coordonnées de Painlevé-Gullstrand. On donne les primitives

$$\int \frac{dx}{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}} = x - 2\sqrt{x} + 2 \ln(1 + \sqrt{x}) \quad (\text{B.137})$$

$$\int \frac{dx}{1 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = x + 2\sqrt{x} + 2 \ln|1 - \sqrt{x}|. \quad (\text{B.138})$$

Commenter.

B.12 Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs

1 On considère un astre à symétrie sphérique, étoile ou trou noir, que l'on désignera ci-après sous le vocable *corps central*. Justifier l'existence d'un système de coordonnées

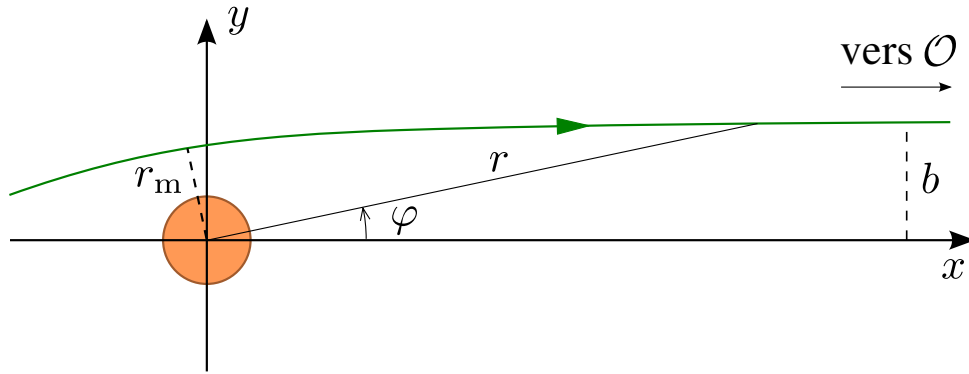


FIGURE B.1 – Trajectoire d'un photon au voisinage du corps central, dans le plan équatorial ($\theta = \pi/2$). x et y sont reliés aux coordonnées (ct, r, θ, φ) par $x = r \cos \varphi$ et $y = r \sin \varphi$.

$(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ où la métrique à l'extérieur du corps central s'écrit

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \quad (\text{B.139})$$

et exprimer R_S en fonction de la masse M du corps central.

2 On s'intéresse au mouvement d'un photon au voisinage du corps central. Soit \vec{p} la 4-impulsion du photon. On pose

$$\varepsilon := -c \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} \quad \text{et} \quad \ell := \vec{\xi}_{(z)} \cdot \vec{p}, \quad (\text{B.140})$$

où $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$ sont les vecteurs de composantes $\xi_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ et $\xi_{(z)}^\alpha = (0, 0, 0, 1)$ par rapport aux coordonnées (x^α) . Rappeler brièvement les grandes étapes conduisant à l'équation suivante pour le mouvement du photon :

$$\left(\frac{dr}{d\lambda}\right)^2 + U(r) = \frac{1}{b^2}, \quad (\text{B.141})$$

où λ paramètre la ligne d'univers du photon, $U(r) := r^{-2} (1 - R_S/r)$ et $b := c|\ell|/\varepsilon$. On suppose que le photon, émis au voisinage du corps central, parvient à atteindre une région infiniment éloignée de ce dernier. Quel est alors le sens physique de b ?

3 On considère un observateur \mathcal{O} infiniment éloigné. Sans perte de généralité, plaçons-le sur l'axe $\varphi = 0$ dans le plan $\theta = \pi/2$, à une coordonnée radiale $r \gg R_S$ (cf. Fig. B.1). Les photons qui parviennent à \mathcal{O} sont alors ceux pour lesquels $\varphi \rightarrow 0$ lorsque $\lambda \rightarrow +\infty$.

Supposons que le corps central soit une étoile et notons R la coordonnée r de sa surface. On se place dans le cas où $R > R_c$ avec $R_c := 3GM/c^2$. Dessiner le graphe de la fonction $U(r)$ (cf. Fig. 3.9 au Chap. 3) en y superposant la droite d'équation $r = R$.

4 Montrer que dans ce graphique, un photon suit un segment de droite horizontale situé *au dessus* de la courbe $U = U(r)$. Dessiner une telle trajectoire pour un photon émis en arrière plan de l'étoile et parvenant à \mathcal{O} sans toucher l'étoile. Établir la relation entre le

paramètre b et la valeur minimale de la coordonnée r sur la ligne d'univers du photon, que l'on notera r_m (cf. Fig. B.1).

5 Porter sur le graphique la trajectoire d'un photon émis depuis la surface de l'étoile. Vue par l'observateur \mathcal{O} , la taille angulaire de l'étoile est

$$\alpha = \frac{2R_a}{d}, \tag{B.142}$$

où d est la distance de l'étoile et R_a est appelé *rayon apparent*. Justifier l'égalité entre R_a et la valeur la plus élevée du paramètre b d'un photon qui quitte l'étoile et atteint \mathcal{O} . En déduire l'expression de R_a en fonction de R et de M . Comparer R_a et R .

6 On suppose à présent que le corps central est un trou noir. En raisonnant sur le graphe de $U(r)$ considéré aux questions 3 et 4, montrer que le trou noir apparaît à l'observateur \mathcal{O} comme un disque noir sur le fond du ciel dont le diamètre angulaire est donné la formule (B.142), où R_a est relié à une valeur particulière du paramètre b . Exprimer R_a en fonction de la masse M du trou noir. Comparer R_a et R_S .

7 Calculer numériquement α pour les trous noirs suivants, dont on donne la masse et la distance à la Terre :

	$M [M_\odot]$	$d [\text{pc}]$
Cyg X-1	15	1.9×10^3
Sgr A*	4.3×10^6	8.3×10^3
M87	4×10^9	1.7×10^7

Rappelons que $1 \text{ pc} = 3.1 \times 10^{16} \text{ m}$, $c = 3.0 \times 10^8 \text{ ms}^{-1}$, $G = 6.67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $1 M_\odot = 1.98 \times 10^{30} \text{ kg}$. On exprimera α en microsecondes d'arc.

8 Considérons à présent une (hypothétique) étoile ultracompacte vérifiant $R_S < R \leq R_c$. Montrer que le rayon apparent d'une telle étoile est indépendant de R . L'exprimer en fonction de M .

B.13 Tenseur de Killing et constante de Carter

Dans tout le problème, $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ dénote un espace-temps et ∇ la connexion compatible avec \mathbf{g} .

1 On appelle tenseur de Killing-Yano tout champ \mathbf{Y} de formes bilinéaires (i.e. tenseurs de type $\binom{0}{2}$) sur \mathcal{E} vérifiant

1. \mathbf{Y} est antisymétrique : pour tout couple de vecteurs (\vec{u}, \vec{v}) , $\mathbf{Y}(\vec{v}, \vec{u}) = -\mathbf{Y}(\vec{u}, \vec{v})$;
2. $\nabla \mathbf{Y}$ est complètement antisymétrique, c'est-à-dire est une forme trilinéaire qui change de signe lorsqu'on permute deux quelconques de ses arguments.

Montrer qu'en vertu de la propriété 1, la propriété 2 est équivalente à l'identité suivante sur les composantes de \mathbf{Y} dans une base quelconque :

$$\nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = -\nabla_\beta Y_{\alpha\gamma}. \tag{B.143}$$

2 On appelle tenseur de Killing tout champ \mathbf{K} de formes bilinéaires sur \mathcal{E} vérifiant

1. \mathbf{K} est symétrique ;
2. $\nabla \mathbf{K}$ obéit à

$$\nabla_\alpha K_{\beta\gamma} + \nabla_\beta K_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma K_{\alpha\beta} = 0. \quad (\text{B.144})$$

Pouvez-vous donner un exemple simple de tenseur de Killing ?

- 3 Si \mathbf{Y} est un tenseur de Killing-Yano, montrer que le champ tensoriel \mathbf{K} défini par

$$K_{\alpha\beta} := Y_{\alpha\mu} Y^\mu_{\ \beta} = g^{\mu\nu} Y_{\alpha\mu} Y_{\nu\beta} \quad (\text{B.145})$$

est un tenseur de Killing.

- 4 Soit \mathcal{L} une courbe géodésique de (\mathcal{E}, g) et \vec{p} un champ de vecteurs tangents à \mathcal{L} associé à un paramètre affine ; \vec{p} obéit à

$$\nabla_{\vec{p}} \vec{p} = 0. \quad (\text{B.146})$$

\mathbf{K} étant un tenseur de Killing, on considère le scalaire

$$\mathcal{K} := \mathbf{K}(\vec{p}, \vec{p}). \quad (\text{B.147})$$

Calculer $\nabla_{\vec{p}} \mathcal{K}$. En déduire que \mathcal{K} est constant le long de \mathcal{L} .

- 5 On se place dans l'espace-temps de Kerr, décrit par les coordonnées de Boyer-Lindquist $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$. Les composantes du tenseur métrique sont alors

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{2amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ 0 & \frac{\rho^2}{\Delta} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -\frac{2amr \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (\text{B.148})$$

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -\frac{(r^2 + a^2)^2}{\rho^2 \Delta} + \frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} & 0 & 0 & -\frac{2amr}{\rho^2 \Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\rho^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2} & 0 \\ -\frac{2amr}{\rho^2 \Delta} & 0 & 0 & \frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} - \frac{a^2}{\rho^2 \Delta} \end{pmatrix}, \quad (\text{B.149})$$

où $m := GM/c^2$ (M étant la masse du trou noir), $\rho^2 = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$ et $\Delta := r^2 - 2mr + a^2$. Considérons les vecteurs \vec{l} et \vec{k} définis respectivement par

$$\vec{l} := \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \vec{\partial}_0 + \vec{\partial}_r + \frac{a}{\Delta} \vec{\partial}_\varphi \quad (\text{B.150})$$

$$\vec{k} := \frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} \vec{\partial}_0 - \frac{\Delta}{2\rho^2} \vec{\partial}_r + \frac{a}{2\rho^2} \vec{\partial}_\varphi. \quad (\text{B.151})$$

Montrer que \vec{l} et \vec{k} sont des vecteurs du genre lumière et que, de plus,

$$\vec{l} \cdot \vec{k} = -1. \quad (\text{B.152})$$

6 On admettra que le tenseur défini par

$$\mathbf{K} := \rho^2 (\underline{l} \otimes \underline{k} + \underline{k} \otimes \underline{l}) + r^2 \mathbf{g} \quad (\text{B.153})$$

[en composantes : $K_{\alpha\beta} = \rho^2 (l_\alpha k_\beta + k_\alpha l_\beta) + r^2 g_{\alpha\beta}$] est un tenseur de Killing. Il s'agit d'ailleurs d'un tenseur de Killing dérivé d'un tenseur de Killing-Yano suivant la formule (B.145). Soit \mathcal{P} une particule décrivant une géodésique \mathcal{L} dans l'espace-temps de Kerr et \vec{p} sa 4-impulsion. Montrer que la constante (B.147) vaut, dans le cas présent,

$$\mathcal{K} = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - p_0^2) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] + (p_\varphi + ap_0)^2, \quad (\text{B.154})$$

où $\mu^2 := -\vec{p} \cdot \vec{p}$. À quoi correspond le cas $\mu = 0$?

7 Rappeler pourquoi les quantités

$$\varepsilon := -\vec{p} \cdot \vec{\partial}_0 \quad \text{et} \quad \ell := \vec{p} \cdot \vec{\partial}_\varphi \quad (\text{B.155})$$

sont constantes le long de \mathcal{L} . En déduire que la quantité

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - p_0^2) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] \quad (\text{B.156})$$

est une constante du mouvement, appelée constante de Carter.

Remarque : Dans un espace-temps stationnaire et axisymétrique quelconque, il n'existe en général que trois constantes le long d'une géodésique \mathcal{L} : μ , E et L . L'existence de la quatrième constante Q est une particularité de l'espace-temps de Kerr, découverte en 1968 par Brandon Carter [46]. En 1970, Martin Walker et Roger Penrose [71] ont montré que Q découle de l'existence d'un tenseur de Killing non trivial dans l'espace-temps de Kerr, à savoir le tenseur (B.153). Ayant 4 constantes du mouvement (ou intégrales premières) indépendantes dans un espace de dimension 4, on dit que l'équation des géodésiques de l'espace-temps de Kerr est intégrable.

B.14 Gravité de surface d'un trou noir

1 On considère un trou noir stationnaire en rotation. Par quelle métrique est-il décrit ? Justifier brièvement la réponse.

2 On souhaite étudier quelques propriétés de l'horizon des événements \mathcal{H} . À cette fin, on ne peut employer les traditionnelles coordonnées de Boyer-Lindquist $(x'^\alpha) = (ct', r, \theta, \varphi')$ (cf. § 5.5.1) car elles sont singulières sur l'horizon ($g_{rr} \rightarrow \infty$). Nous allons plutôt utiliser

les coordonnées de Kerr 3+1 $(x^\alpha) = (t, r, \theta, \varphi)$, qui sont reliées aux coordonnées de Boyer-Lindquist par

$$dt = dt' + \frac{2mr dr}{r^2 - 2mr + a^2} \quad \text{et} \quad d\varphi = d\varphi' + \frac{a dr}{r^2 - 2mr + a^2}, \quad (\text{B.157})$$

où $m := GM/c^2$, $a := J/(cM)$, M et J étant respectivement la masse du trou noir et son moment cinétique. Notons que r et θ sont identiques dans les deux systèmes de coordonnées et que les premières et dernières coordonnées de Boyer-Lindquist sont notées (t', φ') et non (t, φ) comme dans le cours. Les coordonnées de Kerr 3+1 sont liées aux coordonnées (u, r, θ, φ) dans lesquelles Roy Kerr a présenté sa solution en 1963 [29] par la transformation $u = t + r$. Dans les coordonnées de Kerr 3+1, les composantes du tenseur métrique sont

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2mr}{\rho^2} & \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & -2am \frac{r \sin^2 \theta}{\rho^2} \\ \frac{2mr}{\rho^2} & 1 + \frac{2mr}{\rho^2} & 0 & -a \left(1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \\ 0 & 0 & \rho^2 & 0 \\ -2am \frac{r \sin^2 \theta}{\rho^2} & -a \left(1 + \frac{2mr}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta & 0 & \left(r^2 + a^2 + 2a^2 m \frac{r \sin^2 \theta}{\rho^2}\right) \sin^2 \theta \end{pmatrix}, \quad (\text{B.158})$$

où $\rho^2 := r^2 + a^2 \cos^2 \theta$. Quelle est la dimension des paramètres m et a ? À quel système de coordonnées vu en cours se réduisent les coordonnées de Kerr 3+1 lorsque $a = 0$? L'horizon des événements est l'hypersurface \mathcal{H} définie par la valeur constante suivante de la coordonnée r :

$$r = r_H := m + \sqrt{m^2 - a^2}. \quad (\text{B.159})$$

Vérifier que les coordonnées de Kerr 3+1 (x^α) sont régulières sur \mathcal{H} .

3 On rappelle que la métrique de Kerr admet deux vecteurs de Killing, $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$, qui s'expriment simplement en terme de la base naturelle $(\vec{\partial}_{0'}, \vec{\partial}_r, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_{\varphi'})$ associée aux coordonnées de Boyer-Lindquist :

$$\vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_{0'} = c^{-1} \vec{\partial}_{t'} \quad \text{et} \quad \vec{\xi}_{(z)} = \vec{\partial}_{\varphi'}. \quad (\text{B.160})$$

À quelles symétries d'espace-temps correspondent ces deux vecteurs? À partir de (B.157) et de la définition première d'un vecteur comme un opérateur différentiel sur les champs scalaires, montrer que

$$\vec{\partial}_{t'} = \vec{\partial}_t \quad \text{et} \quad \vec{\partial}_{\varphi'} = \vec{\partial}_\varphi, \quad (\text{B.161})$$

où $\vec{\partial}_t$ et $\vec{\partial}_\varphi$ sont respectivement le premier et le dernier vecteur de la base naturelle associée aux coordonnées de Kerr 3+1. En conclure que

$$\vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_0 = c^{-1} \vec{\partial}_t \quad \text{et} \quad \vec{\xi}_{(z)} = \vec{\partial}_\varphi \quad (\text{B.162})$$

et donner les composantes $\xi_{(0)}^\alpha$ de $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\xi_{(z)}^\alpha$ de $\vec{\xi}_{(z)}$ par rapport aux coordonnées de Kerr 3+1. Justifier alors les égalités suivantes $g_{00} = g_{0'0'}$, $g_{0\varphi} = g_{0'\varphi'}$ et $g_{\varphi\varphi} = g_{\varphi'\varphi'}$ que l'on observe en comparant (B.158) à l'expression (5.24) du cours.

4 Ω étant une constante, on forme le vecteur

$$\vec{\ell} := \vec{\xi}_{(0)} + \frac{\Omega}{c} \vec{\xi}_{(z)}. \quad (\text{B.163})$$

Quelle doit être la dimension de Ω pour que l'expression ci-dessus soit bien posée ? Sachant que les vecteurs de Killing $\vec{\xi}$ sont caractérisés par l'équation suivante, dite *équation de Killing* (cf. problème B.2) :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (\text{B.164})$$

le vecteur $\vec{\ell}$ est-il un vecteur de Killing ? Si oui, à quelle symétrie d'espace-temps correspond-il ?

5 À partir de (B.159), montrer que

$$2mr_H = r_H^2 + a^2. \quad (\text{B.165})$$

En déduire la valeur suivante des coefficients métriques sur \mathcal{H} :

$$g_{00}|_{\mathcal{H}} = a^2 \rho_H^{-2} \sin^2 \theta \quad (\text{B.166})$$

$$g_{0\varphi}|_{\mathcal{H}} = -a \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta \quad (\text{B.167})$$

$$g_{\varphi\varphi}|_{\mathcal{H}} = \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta, \quad (\text{B.168})$$

où $\rho_H^2 = \rho_H^2(\theta) := r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta$.

6 Déduire des résultats de la question 5 que, sur \mathcal{H} , le carré scalaire du vecteur $\vec{\ell}$ par rapport au tenseur métrique \mathbf{g} vaut

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}|_{\mathcal{H}} = \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} \left[a - (r_H^2 + a^2) \frac{\Omega}{c} \right]^2. \quad (\text{B.169})$$

Quelle doit être, en termes de a et r_H , la valeur de Ω pour que $\vec{\ell}$ soit du genre lumière sur l'horizon ? Dans toute la suite du problème, on fixera Ω à cette valeur. Montrer qu'une expression alternative de Ω est

$$\Omega = \frac{ca}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}. \quad (\text{B.170})$$

Que vaut Ω pour un trou noir de Schwarzschild ?

7 Montrer que sur \mathcal{H} ,

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_t = 0, \quad \vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_\theta = 0, \quad \vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_\varphi = 0. \quad (\text{B.171})$$

En déduire que $\vec{\ell}$ est normal à l'hypersurface \mathcal{H} . Justifier qu'il soit également tangent à \mathcal{H} .

8 On considère le vecteur

$$\vec{h} := \nabla_{\vec{\ell}} \vec{\ell}, \quad (\text{B.172})$$

dont les composantes sont $h^\alpha = \ell^\mu \nabla_\mu \ell^\alpha$. En utilisant l'équation de Killing (B.164), montrer que, pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\vec{h} \cdot \vec{v} = -\frac{1}{2} \nabla_{\vec{v}} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) \quad (\text{B.173})$$

(écrire $\vec{h} \cdot \vec{v} = h_\mu v^\mu$, avec $h_\mu = \ell^\nu \nabla_\nu \ell_\mu$).

En déduire que si \vec{v} est tangent à \mathcal{H} , alors $\vec{h} \cdot \vec{v} = 0$. En conclure qu'il existe un champ scalaire κ défini sur \mathcal{H} tel que

$$\nabla_{\vec{\ell}} \vec{\ell} = \kappa \vec{\ell} \quad \text{sur } \mathcal{H}. \quad (\text{B.174})$$

κ est appelé *gravité de surface du trou noir*.

9 On considère une ligne de champ \mathcal{L} de $\vec{\ell}$ sur \mathcal{H} . Soit λ le paramètre de \mathcal{L} associé à $\vec{\ell}$, c'est-à-dire le paramètre tel que l'équation de \mathcal{L} s'écrive $x^\alpha = X^\alpha(\lambda)$ avec X^α quatre fonctions de λ telles que

$$\ell^\alpha = \frac{dX^\alpha}{d\lambda}. \quad (\text{B.175})$$

Dire pourquoi λ coïncide (à une constante additive près) avec la valeur de la coordonnée de Kerr 3+1 $x^0 = ct$ le long de \mathcal{L} . Montrer que le long de \mathcal{L} ,

$$\ell^\mu \frac{\partial \ell^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2}. \quad (\text{B.176})$$

Déduire alors de (B.174) un système de quatre équations différentielles du second degré pour les fonctions X^α . Que reconnaît-on ? Comment qualifie-t-on λ lorsque $\kappa = 0$?

10 À partir de (B.174), montrer que, sur \mathcal{H} ,

$$\kappa \underline{\ell} = -\frac{1}{2} \nabla (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}), \quad (\text{B.177})$$

où $\underline{\ell}$ est la forme linéaire de composantes $\ell_\alpha = g_{\alpha\mu} \ell^\mu$. En utilisant une propriété de $\vec{\ell}$ établie plus haut, montrer que, sur \mathcal{H} ,

$$\ell_\alpha = (0, \ell_r, 0, 0). \quad (\text{B.178})$$

11 Nous allons utiliser (B.177) pour calculer κ . Au vu de (B.178), on s'intéresse à la composante r de (B.177). Montrer qu'elle s'écrit

$$\kappa \ell_r|_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) \right] \Big|_{\mathcal{H}}. \quad (\text{B.179})$$

En reliant ℓ_r aux composantes ℓ^α de $\vec{\ell}$, montrer que

$$\ell_r|_{\mathcal{H}} = \frac{r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_H^2 + a^2}. \quad (\text{B.180})$$

12 Montrer que dans tout l'espace-temps,

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} = -1 + \frac{1}{(r_H^2 + a^2)^2} \left[2m\rho_H^4 \frac{r}{\rho^2} + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) \right]. \quad (\text{B.181})$$

À titre de vérification, retrouver la valeur de $\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}$ pour $r = r_H$ (on pourra utiliser l'identité (B.165)). Calculer $\partial/\partial r(r/\rho^2)$ et en déduire que

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) \right] \Big|_{\mathcal{H}} = \frac{(a^2 - r_H^2)(r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{r_H(r_H^2 + a^2)^2}. \quad (\text{B.182})$$

On aura pris soin de remplacer m par son expression en terme de r_H et a donnée par (B.165).

13 Déduire la valeur de κ de ce qui précède. κ dépend-il de θ ? Conclure quant à l'uniformité de κ sur \mathcal{H} . Donner deux expressions alternatives de κ

1. uniquement en termes de r_H et m ;
2. uniquement en termes de m et a .

Que vaut κ pour un trou noir de Schwarzschild ? Et pour un trou noir de Kerr extrême ?

Commentaires

L'appellation *gravité de surface* vient de l'égalité entre $c^2\kappa$ et la norme γ de l'accélération d'un observateur statique près de l'horizon d'un trou de noir de Schwarzschild renormalisée par le facteur de décalage spectral gravitationnel $(1 - 2m/r)^{-1/2}$. En effet, γ diverge lorsque $r \rightarrow r_H = 2m$ (l'observateur doit subir une accélération énorme pour rester statique au voisinage de l'horizon) mais $\gamma(1 - 2m/r)^{-1/2}$ tend vers une valeur finie : $c^2\kappa$.

L'uniformité de κ sur l'horizon est appelée *Principe zéro de la dynamique des trous noirs* par analogie avec le Principe zéro de la thermodynamique, qui stipule qu'à l'équilibre thermique, un corps a une température uniforme. L'analogie entre la dynamique des trous noirs résultant de l'équation d'Einstein et la thermodynamique a en fait été étendue au Premier, Second et Troisième Principes par James Bardeen, Brandon Carter et Stephen Hawking lors d'une célèbre École des Houches en 1972 [39]. En particulier, dans le Premier Principe, κ joue le rôle de la température dans le terme $T dS$ de la variation d'énergie, l'aire du trou noir jouant le rôle de l'entropie S . L'analogie formelle entre κ et la température est même devenue une identification lors de l'étude des effets quantiques au voisinage du trou noir et la découverte du *rayonnement de Hawking* : un trou noir rayonne comme un corps noir à la température

$$T = \frac{\hbar c}{2\pi k_B} \kappa, \quad (\text{B.183})$$

où \hbar est la constante de Planck et k_B celle de Boltzmann. Notons que pour les trous noirs astrophysiques, le rayonnement de Hawking est ultra-négligeable ($T \sim 10^{-8}$ K pour un trou noir stellaire et $T \sim 10^{-14}$ K pour un trou noir supermassif comme Sgr A*).

B.15 Déviation géodésique

On considère une variété \mathcal{E} de dimension $n \geq 2$ munie d'une métrique \mathbf{g} de signature quelconque. Trois cas seront plus particulièrement examinés :

- (I) le plan euclidien : $n = 2$, $\mathcal{E} = \mathbb{R}^2$ et $\text{sign}(\mathbf{g}) = (+, +)$;
 (II) la sphère (munie de la métrique standard) : $n = 2$, $\mathcal{E} = \mathbb{S}^2$ et $\text{sign}(\mathbf{g}) = (+, +)$;
 (III) l'espace-temps relativiste : $n = 4$ et $\text{sign}(\mathbf{g}) = (-, +, +, +)$.

On notera ∇ la dérivée covariante associée à \mathbf{g} . Dans $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, on considère une famille de géodésiques $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in I}$, où le paramètre σ décrit un intervalle $I \subset \mathbb{R}$, telle que (i) $\mathcal{L}_{\sigma+\delta\sigma}$ est infiniment proche de \mathcal{L}_σ pour $\delta\sigma$ infiniment petit, (ii) si $\sigma_1 \neq \sigma_2$, \mathcal{L}_{σ_1} et \mathcal{L}_{σ_2} ont au plus un nombre fini de points en commun et (iii) toutes les courbes \mathcal{L}_σ sont du même genre (temps, lumière ou espace). Le long de chaque géodésique \mathcal{L}_σ , on désigne par λ un paramètre *affine*. On note alors $P(\lambda, \sigma)$ le point de paramètre λ sur la géodésique \mathcal{L}_σ .

1 Soit (x^α) un système de coordonnées sur une partie de \mathcal{E} où l'on souhaite étudier la famille de géodésiques. Dans ce système de coordonnées, on écrit l'équation de la géodésique \mathcal{L}_σ sous la forme

$$x^\alpha = X^\alpha(\lambda, \sigma) \quad 0 \leq \alpha \leq n-1, \quad (\text{B.184})$$

où les X^α sont n fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. On désigne par \vec{u} le vecteur tangent à \mathcal{L}_σ associé au paramètre λ . Montrer que les composantes u^α de \vec{u} dans la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ associée aux coordonnées (x^α) s'écrivent

$$u^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \lambda}. \quad (\text{B.185})$$

2 On appelle Σ la sous-variété de \mathcal{E} formée par l'ensemble des géodésiques de la famille $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in I}$. Quelle est la dimension de Σ ? Quel système de coordonnées est naturel sur Σ ? En quels points ce système de coordonnées peut-il être singulier ?

3 On appelle *vecteur séparation* le champ vectoriel \vec{s} défini sur Σ tel que pour $d\sigma$ infinitésimal, $d\sigma \vec{s}$ soit le vecteur qui joint le point $P(\lambda, \sigma)$ au point infiniment voisin $P(\lambda, \sigma + d\sigma)$. Montrer que les composantes s^α de \vec{s} dans la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ sont

$$s^\alpha = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma}. \quad (\text{B.186})$$

4 Représenter la famille $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in I}$ sur une figure dans chacun des exemples suivants :

1. $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est le plan euclidien (cas (I) mentionné ci-dessus), $(x^\alpha) = (x, y)$ est un système de coordonnées cartésiennes, $I = \mathbb{R}$ et \mathcal{L}_σ est la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} x = \sigma \\ y = \lambda. \end{cases} \quad (\text{B.187})$$

2. Toujours dans le plan euclidien, mais avec $I =]-\pi/2, \pi/2]$ et l'équation paramétrique suivante pour \mathcal{L}_σ :

$$\begin{cases} x = (1 + \lambda) \sin \sigma \\ y = (1 + \lambda) \cos \sigma. \end{cases} \quad (\text{B.188})$$

3. $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est la sphère (cas (II) mentionné ci-dessus), $(x^\alpha) = (\theta, \varphi)$ est un système de coordonnées sphériques, $I = [0, 2\pi[$ et \mathcal{L}_σ est la courbe d'équation paramétrique

$$\begin{cases} \theta &= \frac{\pi}{2} - \lambda \\ \varphi &= \sigma. \end{cases} \quad (\text{B.189})$$

On rappelle que la métrique standard sur la sphère s'exprime comme

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2. \quad (\text{B.190})$$

Dans chacun des cas, on précisera le type de la courbe \mathcal{L}_σ , on calculera les composantes des vecteurs \vec{u} et \vec{s} dans la base naturelle associée aux coordonnées considérées et on représentera \vec{u} et \vec{s} pour $(\lambda, \sigma) = (0, 0)$.

5 Pour tout champ scalaire $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}$, $(x^\alpha) \mapsto f(x^0, \dots, x^{n-1})$, on définit la restriction F de f à Σ par

$$F(\lambda, \sigma) := f(X^0(\lambda, \sigma), \dots, X^{n-1}(\lambda, \sigma)). \quad (\text{B.191})$$

Montrer que

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = u^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \nabla_{\vec{u}} f \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = s^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} = \nabla_{\vec{s}} f. \quad (\text{B.192})$$

6 Soient \vec{u}_* et \vec{s}_* des extensions des champs vectoriels \vec{u} et \vec{s} dans un domaine ouvert de \mathcal{E} autour de Σ , c'est-à-dire des champs vectoriels dont les composantes dans la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ vérifient¹

$$u^\alpha(\lambda, \sigma) = u_*^\alpha(X^0(\lambda, \sigma), \dots, X^{n-1}(\lambda, \sigma)) \quad \text{et} \quad s^\alpha(\lambda, \sigma) = s_*^\alpha(X^0(\lambda, \sigma), \dots, X^{n-1}(\lambda, \sigma)).$$

Établir les identités suivantes sur Σ :

$$u^\mu \nabla_\mu u_*^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu u^\nu, \quad s^\mu \nabla_\mu u_*^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha s^\mu u^\nu, \quad u^\mu \nabla_\mu s_*^\alpha = \frac{\partial s^\alpha}{\partial \lambda} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu s^\nu, \quad (\text{B.193})$$

où les $\Gamma_{\mu\nu}^\alpha$ sont les symboles de Christoffel de \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) . En déduire que, sur Σ , les vecteurs $\nabla_{\vec{u}} \vec{u}_*$, $\nabla_{\vec{s}} \vec{u}_*$ et $\nabla_{\vec{u}} \vec{s}_*$ sont indépendants du choix des extensions \vec{u}_* et \vec{s}_* . On pose alors, sur Σ , $\nabla_{\vec{u}} \vec{u} := \nabla_{\vec{u}} \vec{u}_*$, $\nabla_{\vec{s}} \vec{u} := \nabla_{\vec{s}} \vec{u}_*$ et $\nabla_{\vec{u}} \vec{s} := \nabla_{\vec{u}} \vec{s}_*$.

7 Montrer que

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{u} = 0. \quad (\text{B.194})$$

En déduire que le produit scalaire $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est constant le long d'une géodésique \mathcal{L}_σ . Que vaut-il dans chacun des exemples considérés à la question 4 ?

8 Montrer que

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{s} = \nabla_{\vec{s}} \vec{u}. \quad (\text{B.195})$$

Au vu de cette identité, on dit que les vecteurs \vec{u} et \vec{s} commutent.

1. Pour $n = 2$, les champs \vec{u}_* et \vec{u} coïncident, de même que \vec{s}_* et \vec{s} .

9 Nous allons montrer que pour des géodésiques du genre espace ou temps, on peut toujours se ramener au cas où \vec{u} et \vec{s} sont orthogonaux. À cette fin, effectuons, le long de chaque géodésique \mathcal{L}_σ , le changement de paramètre affine

$$\lambda' = \lambda + b(\sigma). \quad (\text{B.196})$$

Exprimer le vecteur séparation \vec{s}' résultant de cette nouvelle paramétrisation en fonction de \vec{s} , \vec{u} et $db/d\sigma$. Conclure que l'on peut choisir la fonction $b(\sigma)$ de manière à assurer $\vec{u} \cdot \vec{s}' = 0$.

10 On peut considérer que la dérivée covariante du vecteur séparation le long de \mathcal{L}_σ ,

$$\vec{V} := \nabla_{\vec{u}} \vec{s}, \quad (\text{B.197})$$

est la “vitesse de déviation” des géodésiques. La dérivée de cette vitesse,

$$\vec{A} := \nabla_{\vec{u}} \vec{V} = \nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} \vec{s}, \quad (\text{B.198})$$

représente alors “l'accélération de déviation”. En un point où $\vec{V} = 0$, on dira que les géodésiques voisines sont *parallèles*, leur séparation restant localement constante. Calculer \vec{V} et \vec{A} pour chacun des exemples de la question 4. On utilisera la dernière des identités (B.193) et, pour l'exemple 3, le fait que les seuls symboles de Christoffel non nuls dans les coordonnées (θ, φ) sont $\Gamma_{\varphi\varphi}^\theta = -\sin\theta \cos\theta$ et $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = \Gamma_{\varphi\theta}^\varphi = 1/\tan\theta$.

11 Montrer en utilisant successivement l'Eq. (B.195) et l'identité de Ricci [Eq. (4.99) du cours] que

$$A^\alpha = u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \nabla_\nu s^\alpha) = u^\mu s^\nu (R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho + \nabla_\nu \nabla_\mu u^\alpha) + u^\mu \nabla_\mu s^\nu \nabla_\nu u^\alpha.$$

En utilisant la règle de Leibniz sous la forme $u^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu u^\alpha = \nabla_\nu (u^\mu \nabla_\mu u^\alpha) - \nabla_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\alpha$, ainsi que les identités (B.194) et (B.195), en déduire que $A^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu$, résultat que l'on peut réécrire comme

$$\boxed{\nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} \vec{s} = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{u}, \vec{u}, \vec{s})}. \quad (\text{B.199})$$

Cette relation est appelée *équation de déviation géodésique* ou encore *équation de Jacobi*. En déduire que si la courbure est nulle, des géodésiques parallèles pour $\lambda = 0$ restent parallèles pour $\lambda \geq 0$. Commenter au vu des exemples considérés à la question 10.

12 Retrouver à partir de (B.199) les valeurs de \vec{A} obtenues à la question 10 pour chacun des trois exemples. Pour la sphère, on utilisera le fait que les seules composantes non nulles du tenseur de Riemann sont $R^\theta_{\varphi\theta\varphi} = -R^\theta_{\varphi\varphi\theta} = \sin^2\theta$ et $R^\varphi_{\theta\varphi\theta} = -R^\varphi_{\theta\theta\varphi} = 1$.

13 On se place dans l'espace-temps relativiste $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ (cas (III) mentionné dans l'introduction) et on considère des géodésiques \mathcal{L}_σ du genre temps. Montrer que l'on peut toujours choisir le paramètre affine λ de manière à assurer $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$. Quelle est alors l'interprétation physique de λ ? En un point $P \in \Sigma$ donné, soit $E_{\vec{u}}$ le sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ (espace tangent à la variété \mathcal{E} en P) formé par l'ensemble des vecteurs orthogonaux à \vec{u} . Quelle est la dimension de $E_{\vec{u}}$? Comment s'interprète physiquement cet espace?

14 À l'aide des symétries du tenseur de Riemann, montrer que l'équation de déviation géodésique conduit à

$$\vec{u} \cdot \vec{A} = 0. \quad (\text{B.200})$$

En déduire que l'application

$$\begin{aligned} \mathbf{K} : E_{\vec{u}} &\longrightarrow E_{\vec{u}} \\ \vec{s} &\longmapsto \vec{A} = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{u}, \vec{u}, \vec{s}) \end{aligned} \quad (\text{B.201})$$

est bien définie. Dire pourquoi il s'agit d'une application linéaire. En utilisant les symétries du tenseur de Riemann, montrer que \mathbf{K} est un endomorphisme symétrique (autoadjoint), c'est-à-dire qu'il vérifie

$$\forall(\vec{v}, \vec{w}) \in E_{\vec{u}} \times E_{\vec{u}}, \quad \vec{v} \cdot \mathbf{K}(\vec{w}) = \mathbf{K}(\vec{v}) \cdot \vec{w}. \quad (\text{B.202})$$

Soit ² $(\vec{e}_\alpha) = (\vec{e}_0, \vec{e}_i)$ une base orthonormale de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ telle que $\vec{e}_0 = \vec{u}$. Exprimer la matrice K^i_j de \mathbf{K} dans la base (\vec{e}_i) en fonction des composantes du tenseur de Riemann. Relier la trace de \mathbf{K} au tenseur de Ricci et en déduire que, dans le vide, $\text{tr } \mathbf{K} = 0$.

15 Dans le cadre de la mécanique newtonienne, on considère une famille de particules se déplaçant sous l'effet d'un champ gravitationnel stationnaire. On suppose la famille continue, indexée par un paramètre $\sigma \in I \subset \mathbb{R}$, et on écrit l'équation du mouvement de la particule d'indice σ sous la forme $x^i = X^i(t, \sigma)$ où t est le temps absolu newtonien, les $(x^i) = (x, y, z)$ sont les coordonnées cartésiennes associées à un référentiel inertiel et les X^i sont trois fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Montrer que si l'on désigne par Φ le potentiel gravitationnel newtonien (solution de l'équation de Poisson $\Delta\Phi = 4\pi G \rho$), les équations du mouvement s'écrivent

$$\frac{\partial^2 X^i}{\partial t^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \quad (\text{B.203})$$

Notons $d\sigma s^i(t, \sigma) := X^i(t, \sigma + d\sigma) - X^i(t, \sigma)$ la séparation entre la particule d'indice σ et celle d'indice $\sigma + d\sigma$ à l'instant t . Montrer que s^i obéit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\partial^2 s^i}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} s^j. \quad (\text{B.204})$$

Comment appelle-t-on l'effet physique associé ?

16 La limite newtonienne s'obtient à partir d'une métrique de la forme [cf. Eq. (4.143) du cours]

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 + 2\frac{\Phi}{c^2}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - 2\frac{\Phi}{c^2}\right) (dx^2 + dy^2 + dz^2), \quad (\text{B.205})$$

avec $|\Phi|/c^2 \ll 1$. Au premier ordre en Φ/c^2 , le tenseur de Riemann de \mathbf{g} est tel que

$$R^i_{0j0} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j}. \quad (\text{B.206})$$

Commenter les résultats précédents au vu de cette propriété. En particulier, quelle loi retrouve-t-on lorsqu'on écrit $\text{tr } \mathbf{K} = 0$ à la limite newtonienne ?

2. Dans toute la suite du problème, les indices grecs α, β, \dots varient entre 0 et 3, alors que les indices latins i, j, \dots varient entre 1 et 3 seulement.

Annexe C

Solutions des problèmes

version 2013-2014

Sommaire

C.1 Décalage spectral au voisinage de la Terre	249
C.2 Équation de Killing	253
C.3 Trou de ver	255
C.4 Observateur accéléré et horizon de Rindler	260
C.5 Expérience de Hafele & Keating	269
C.6 Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker	272
C.7 Modèle d'étoile incompressible	275
C.8 Vitesse du son relativiste	280
C.9 Photon émis par une étoile	284
C.10 Pression de radiation et effet Poynting-Robertson	286
C.11 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild	291
C.12 Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs	297
C.13 Tenseur de Killing et constante de Carter	302
C.14 Gravité de surface d'un trou noir	306
C.15 Déviation géodésique	314

C.1 Décalage spectral au voisinage de la Terre

1 La métrique de Schwarzschild en coordonnées isotropes est donnée par l'Éq. (3.18) (où l'on fait $\bar{r} = r$). Puisqu'au voisinage de la Terre $GM/(c^2r) \ll 1$, on peut effectuer un développement limité au premier ordre en $GM/(c^2r)$:

$$g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - 2 \times \frac{GM}{2c^2r}\right) \left(1 - 2 \times \frac{GM}{2c^2r}\right) c^2 dt^2$$

$$\begin{aligned}
& + \left(1 + 4 \times \frac{GM}{2c^2 r}\right) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] \\
= & - \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 + \frac{2GM}{c^2 r}\right) [dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)].
\end{aligned}$$

On obtient donc l'expression (B.1) avec $\Phi(r) = -GM/r$, ce qui correspond bien au potentiel gravitationnel newtonien à l'extérieur de la Terre supposée sphérique. Pour $r = R_\oplus$:

$$\frac{|\Phi(R_\oplus)|}{c^2} = \frac{GM}{c^2 R_\oplus} = \frac{6.67 \times 10^{-11} \times 6.0 \times 10^{24}}{(3.0 \times 10^8)^2 \times 6.4 \times 10^6} = 7 \times 10^{-10}.$$

2 L'espace-temps décrit par (B.1) est *statique* et à *symétrie sphérique* (cf. les définitions données au § 3.2.1).

3 Puisqu'un observateur \mathcal{S} est à coordonnées r, θ et φ fixées, sa 4-vitesse doit être colinéaire à $\vec{\partial}_0$: $\vec{u}_* = u_*^0 \vec{\partial}_0$. La relation de normalisation $\vec{u}_* \cdot \vec{u}_* = -1$ s'écrit alors

$$g_{00}(u_*^0)^2 = -1 \iff - \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) (u_*^0)^2 = -1 \iff u_*^0 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right)^{-1/2}.$$

Au premier ordre en Φ/c^2 , il vient donc $u_*^0 = 1 - \Phi/c^2$, d'où la relation (B.2).

4 On sait que $-\Gamma$ est le produit scalaire des deux 4-vitesses (Éq. (2.102) du cours) :

$$\Gamma = -\vec{u}_* \cdot \vec{u}.$$

On a donc, compte tenu de (B.2) et du caractère diagonal de $(g_{\alpha\beta})$:

$$\Gamma = -g_{\alpha\beta} u_*^\alpha u^\beta = -g_{0\beta} u_*^0 u^\beta = -g_{00} u_*^0 u^0 = \left(1 + \frac{2\Phi}{c^2}\right) \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) u^0 \simeq \left(1 + \frac{\Phi}{c^2}\right) u^0,$$

d'où la relation (B.3).

5 On a $\vec{v} \cdot \vec{u}_* = g_{\alpha\beta} v^\alpha u_*^\beta = g_{\alpha 0} v^\alpha u_*^0 = g_{i0} v^i u_*^0 = 0$ car $g_{i0} = 0$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Les vecteurs \vec{v} et \vec{u}_* sont donc orthogonaux.

On a

$$\begin{aligned}
\vec{v} &= \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_*} \vec{\partial}_r + \frac{d\theta}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_*} \vec{\partial}_\theta + \frac{d\varphi}{d\tau} \frac{d\tau}{d\tau_*} \vec{\partial}_\varphi = \frac{d\tau}{d\tau_*} \left(\frac{dr}{d\tau} \vec{\partial}_r + \frac{d\theta}{d\tau} \vec{\partial}_\theta + \frac{d\varphi}{d\tau} \vec{\partial}_\varphi \right) \\
&= \frac{d\tau}{d\tau_*} c \left(u^r \vec{\partial}_r + u^\theta \vec{\partial}_\theta + u^\varphi \vec{\partial}_\varphi \right),
\end{aligned}$$

où pour écrire la dernière ligne nous avons utilisé l'expression suivante des composantes de la 4-vitesse de \mathcal{O} (Éq. (2.85) du cours) :

$$u^r = \frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau}, \quad u^\theta = \frac{1}{c} \frac{d\theta}{d\tau}, \quad u^\varphi = \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{d\tau}.$$

Par ailleurs, d'après l'Éq. (2.98) du cours, $d\tau_* = \Gamma d\tau$. On peut aussi l'établir à partir de (B.2) et (B.3) :

$$\frac{d\tau}{d\tau_*} = \frac{d\tau}{dt} \frac{dt}{d\tau_*} = (u^0)^{-1} u_*^0 = \Gamma^{-1} \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right)^{-1} \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) = \Gamma^{-1}.$$

On a donc, en utilisant successivement (B.3) et (B.2),

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \Gamma^{-1} c \left(u^r \vec{\partial}_r + u^\theta \vec{\partial}_\theta + u^\varphi \vec{\partial}_\varphi \right) = \Gamma^{-1} c \left(\vec{u} - u^0 \vec{\partial}_0 \right) = c \left[\Gamma^{-1} \vec{u} - \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \vec{\partial}_0 \right] \\ &= c \left(\Gamma^{-1} \vec{u} - \vec{u}_* \right), \end{aligned}$$

d'où la relation (B.5).

Au vu de (B.5), la condition de normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ s'écrit

$$\Gamma^2 \left(\underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{u}_*}_{-1} + \frac{2}{c} \underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{v}}_0 + \frac{1}{c^2} \vec{v} \cdot \vec{v} \right) = -1.$$

On en déduit immédiatement la relation (B.6) entre Γ et \vec{v} . Cette relation est identique à celle de la relativité restreinte.

6 L'énergie du photon mesurée par \mathcal{S} est (cf. Éq. (2.104) du cours)

$$E = -\vec{u}_* \cdot \vec{p} c = -c \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right) \vec{\partial}_0 \cdot \vec{p} = cK \left(1 - \frac{\Phi}{c^2}\right),$$

avec $K := -\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}$. Notons que $\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p} = g_{0\alpha} p^\alpha = g_{00} p^0 = -(1 + 2\Phi/c^2) p^0$, ce qui établit la deuxième égalité dans (B.8).

7 Le vecteur \vec{n} est orthogonal au vecteur \vec{u} , car \vec{P} l'est par construction.

La 4-impulsion d'un photon est nécessairement un vecteur du genre lumière ; on a donc successivement

$$\begin{aligned} \vec{p} \cdot \vec{p} &= 0 \\ \left(\frac{E}{c} \vec{u}_* + P \vec{n} \right) \cdot \left(\frac{E}{c} \vec{u}_* + P \vec{n} \right) &= 0 \\ \frac{E^2}{c^2} \underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{u}_*}_{-1} + 2 \frac{PE}{c} \underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{n}}_0 + P^2 \underbrace{\vec{n} \cdot \vec{n}}_1 &= 0 \\ P^2 &= \frac{E^2}{c^2} \\ P &= \frac{E}{c}. \end{aligned}$$

On retrouve donc la même relation $P = E/c$ qu'en relativité restreinte. Combinée à (B.7), elle conduit à (B.10). La relation (B.9) permet alors d'écrire (B.11).

8 L'énergie du photon mesurée par \mathcal{O} est (cf. Éq. (2.104) du cours)

$$\begin{aligned} E &= -c \vec{u} \cdot \vec{p} \\ &= -c \Gamma \left(\vec{u}_* + \frac{1}{c} \vec{v} \right) \cdot \left[K \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) (\vec{u}_* + \vec{n}) \right] \\ &= -c \Gamma K \left(1 - \frac{\Phi}{c^2} \right) \left(\underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{u}_*}_{-1} + \underbrace{\vec{u}_* \cdot \vec{n}}_0 + \frac{1}{c} \underbrace{\vec{v} \cdot \vec{u}_*}_0 + \frac{1}{c} \vec{v} \cdot \vec{n} \right), \end{aligned}$$

d'où l'Éq. (B.12).

9 La quantité K est conservée le long de la géodésique lumière entre A_1 et A_2 car $K = -\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}$ et $\vec{\partial}_0$ est un vecteur de Killing (c'est le vecteur de Killing associé à la stationarité de l'espace-temps). La conservation de K , jointe à l'expression (B.12) de l'énergie, permet d'écrire

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{E_2}{E_1} = \frac{\Gamma_2 \left(1 - \frac{\Phi_2}{c^2} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \vec{n}_2 \cdot \vec{v}_2 \right)}{\Gamma_1 \left(1 - \frac{\Phi_1}{c^2} \right) \left(1 - \frac{1}{c} \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 \right)}. \quad (\text{C.1})$$

10 a) Pour $\vec{v}_1 = 0$ ($\Rightarrow \Gamma_1 = 1$) et $\vec{v}_2 = 0$ ($\Rightarrow \Gamma_2 = 1$), l'Éq. (C.1) se réduit à

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \frac{1 - \frac{\Phi_2}{c^2}}{1 - \frac{\Phi_1}{c^2}} \simeq 1 + \frac{1}{c^2} (\Phi_1 - \Phi_2).$$

On retrouve la formule de l'effet *Einstein* vue en cours (cf. Éq. (3.65) avec $z = (\lambda_2 - \lambda_1)/\lambda_1 = (\nu_2/\nu_1)^{-1} - 1$).

b) Si $\Phi_1 = \Phi_2 = 0$ (pas de champ gravitationnel) et $\vec{v}_2 = 0$ (récepteur immobile), l'Éq. (C.1) se réduit à

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \Gamma_1^{-1} \left(1 - \frac{1}{c} \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 \right)^{-1}.$$

On retrouve la formule classique de l'effet *Doppler* en relativité restreinte, le terme $\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1/c$ donnant l'effet Doppler du premier ordre (ou longitudinal) et le facteur Γ_1 l'effet Doppler du second ordre (ou transverse).

c) Si $\vec{v}_1 = v_1 \vec{n}$ (émetteur en mouvement dans la direction de propagation du photon), on a $\Gamma_1 = (1 - v_1^2/c^2)^{-1/2}$ et $1 - \frac{1}{c} \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 = 1 - v_1/c$, de sorte que la formule ci-dessus se simplifie en

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} = \sqrt{\frac{1 + v_1/c}{1 - v_1/c}}.$$

Là encore, on retrouve une formule classique de la relativité restreinte. On vérifie en particulier que si \mathcal{O}_1 se rapproche d' \mathcal{O}_2 , i.e. si $v_1 > 0$, alors $\nu_2 > \nu_1$.

11 Au second ordre en v/c , on a, pour $i \in \{1, 2\}$,

$$\Gamma_i = \left(1 - \frac{v_i^2}{c^2} \right)^{-1/2} \simeq 1 + \frac{v_i^2}{2c^2},$$

si bien que le développement limité de (C.1) conduit à

$$\frac{\nu_2}{\nu_1} \simeq \left(1 + \frac{v_2^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{v_1^2}{2c^2}\right) \left(1 - \frac{\Phi_2}{c^2}\right) \left(1 + \frac{\Phi_1}{c^2}\right) \left(1 - \frac{1}{c} \vec{n}_2 \cdot \vec{v}_2\right) \times \\ \times \left[1 + \frac{1}{c} \vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1 + \frac{1}{c^2} (\vec{n}_1 \cdot \vec{v}_1)^2\right].$$

Remarquons qu'il faut bien inclure le dernier terme pour avoir un développement limité au deuxième ordre en v_1/c . Au premier ordre d'approximation en Φ/c^2 et au deuxième ordre en v/c , on peut faire $\vec{n}_1 \simeq \vec{n}_2 \simeq \vec{n}$. En développant la formule ci-dessus, on obtient alors la formule (B.13).

Application numérique : pour une orbite circulaire et avec $r_1 = 4R_\oplus$

$$v_1 = \sqrt{\frac{GM}{r_1}} = 4.0 \times 10^3 \text{ m s}^{-1}.$$

Par ailleurs

$$v_2 = R_\oplus \Omega_\oplus = 4.6 \times 10^2 \text{ m s}^{-1}.$$

Il vient alors

$$\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{v}_1 = \frac{v_1}{2c} = 7 \times 10^{-6}$$

$$\frac{1}{c} \vec{n} \cdot \vec{v}_2 = \frac{v_2}{2c} = 8 \times 10^{-7}$$

$$\frac{\Phi_1}{c^2} = -\frac{GM}{4c^2 R_\oplus} = -1.7 \times 10^{-10}$$

$$\frac{\Phi_2}{c^2} = -\frac{GM}{c^2 R_\oplus} = -7 \times 10^{-10}$$

$$\frac{v_1^2}{2c^2} = 9 \times 10^{-11}$$

$$\frac{v_2^2}{2c^2} = 1.2 \times 10^{-12}.$$

L'effet Einstein, exprimé par $(\Phi_1 - \Phi_2)/c^2$ dans la formule (B.13), est donc largement dominé par l'effet Doppler du premier ordre, exprimé par $\vec{n} \cdot \vec{v}_1/c$ et $\vec{n} \cdot \vec{v}_2/c$. On peut cependant s'affranchir de ce dernier par une technique dite de *transfert à deux voies*, par opposition au *transfert à une voie* étudié ici.

C.2 Équation de Killing

1 On a, pour tout vecteur $\vec{v} \in \mathcal{T}_P(\mathcal{E})$,

$$\langle \underline{\xi}, \vec{v} \rangle = \mathbf{g}(\vec{\xi}, \vec{v}) = g_{\alpha\beta} \xi^\alpha v^\beta = g_{\alpha\beta} \xi^\beta v^\alpha. \quad (\text{C.2})$$

Par ailleurs, par définition même des composantes dans une base naturelle (cf. § 4.2.1),

$$\underline{\xi} = \xi_\alpha dx^\alpha \quad \text{et} \quad \vec{v} = v^\alpha \vec{\partial}_\alpha.$$

On en déduit (cf. Éq. (4.10))

$$\langle \underline{\xi}, \vec{v} \rangle = \langle \xi_\alpha dx^\alpha, v^\beta \vec{\partial}_\beta \rangle = \xi_\alpha v^\beta \underbrace{\langle dx^\alpha, \vec{\partial}_\beta \rangle}_{\delta^\alpha_\beta} = \xi_\alpha v^\alpha.$$

En comparant avec (C.2), on obtient (B.15).

2 En considérant le champ scalaire $f := \xi_\beta u^\beta$ défini le long de \mathcal{L} , il vient

$$u^\alpha \nabla_\alpha f = \nabla_\alpha f u^\alpha = \langle \nabla f, \vec{u} \rangle = \vec{u}(f),$$

où la dernière égalité résulte de la définition (4.4) du gradient, $\vec{u}(f)$ représentant l'action du vecteur \vec{u} sur le champ scalaire f . Puisque \vec{u} est le vecteur tangent à \mathcal{L} associé au paramétrage $c\tau$, on a (cf. Éq. (2.11) du cours)

$$\vec{u}(f) = \left. \frac{1}{c} \frac{df}{d\tau} \right|_{\mathcal{L}}.$$

Il vient donc

$$u^\alpha \nabla_\alpha f = \left. \frac{1}{c} \frac{df}{d\tau} \right|_{\mathcal{L}}.$$

En remplaçant f par $\xi_\beta u^\beta$ et en omettant le $|_{\mathcal{L}}$ puisque $\xi_\beta u^\beta$ n'est défini que le long de \mathcal{L} , on obtient la formule (B.16).

3 On a, d'après le résultat (B.15),

$$\xi_\beta u^\beta = g_{\beta\gamma} \xi^\gamma u^\beta = \mathbf{g}(\vec{\xi}, \vec{u}) = \vec{\xi} \cdot \vec{u}.$$

Or, puisque $\vec{\xi}$ est un vecteur de Killing et \mathcal{L} une géodésique, la quantité $\vec{\xi} \cdot \vec{u}$ est constante le long de \mathcal{L} (cf. § 3.4.1). On a donc

$$\frac{d}{d\tau}(\xi_\beta u^\beta) = 0.$$

En reportant ce résultat dans (B.16), il vient successivement

$$\begin{aligned} u^\alpha \nabla_\alpha (\xi_\beta u^\beta) &= 0 \\ u^\alpha (\nabla_\alpha \xi_\beta u^\beta + \xi_\beta \nabla_\alpha u^\beta) &= 0 \\ \nabla_\alpha \xi_\beta u^\alpha u^\beta + \xi_\beta u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta &= 0. \end{aligned}$$

Or $u^\alpha \nabla_\alpha u^\beta = (\nabla_{\vec{u}} \vec{u})^\beta = 0$ car la 4-vitesse \vec{u} est transportée parallèlement à elle-même le long de la géodésique \mathcal{L} . On en déduit immédiatement (B.17).

4 On peut écrire

$$\nabla_\alpha \xi_\beta u^\alpha u^\beta = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \xi_\beta u^\alpha u^\beta + \underbrace{\nabla_\alpha \xi_\beta u^\alpha u^\beta}_{\nabla_\beta \xi_\alpha u^\beta u^\alpha}) = \frac{1}{2} (\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha) u^\alpha u^\beta.$$

L'équation (B.17) est donc équivalente à

$$\mathbf{A}(\vec{u}, \vec{u}) = 0$$

où \mathbf{A} est la forme bilinéaire symétrique de composantes $A_{\alpha\beta} := \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha$. Comme \mathbf{A} est symétrique, elle est diagonalisable : cela signifie qu'en tout point $P \in \mathcal{E}$, il existe une base $(\vec{\varepsilon}_\alpha)$ de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ telle que

$$A'_{00}(u'_0)^2 + A'_{11}(u'_1)^2 + A'_{22}(u'_2)^2 + A'_{33}(u'_3)^2 = 0,$$

où l'on a désigné par des primes les composantes dans la base $(\vec{\varepsilon}_\alpha)$. L'identité ci-dessus devant être valable pour tout vecteur \vec{u} unitaire du genre temps, on a nécessairement $A'_{00} = A'_{11} = A'_{22} = A'_{33} = 0$, d'où $\mathbf{A} = 0$ et donc $A_{\alpha\beta} = 0$ dans n'importe quelle base. Puisque $A_{\alpha\beta} = \nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha$, on obtient l'équation de Killing (B.18).

C.3 Trou de ver

1 Au vu des définitions données au § 3.2.1 du cours, l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est *statique* et à *symétrie sphérique*.

2 La métrique \mathbf{g} est *asymptotiquement plate* lorsque $r \rightarrow +\infty$ ou $r \rightarrow -\infty$, car $b^2 + r^2 \sim r^2$ lorsque $r \rightarrow \pm\infty$ et (B.19) se réduit alors à l'élément de longueur plat (métrique de Minkowski) en coordonnées sphériques.

3 Pour $t = \text{const}$, $\theta = \text{const} = \pi/2$ et $r = \text{const}$, (B.19) conduit à l'élément de longueur suivant

$$ds^2 = (b^2 + r^2) d\varphi^2.$$

La circonférence du cercle $r = \text{const}$ est donc

$$\mathcal{C} = \int_0^{2\pi} \sqrt{b^2 + r^2} d\varphi = 2\pi \sqrt{b^2 + r^2}.$$

\mathcal{C} est minimale pour $r = 0$:

$$\min \mathcal{C} = 2\pi b.$$

On en déduit l'allure des surfaces $\{t = \text{const}, \theta = \pi/2\}$ lorsqu'on les représente plongées dans \mathbb{R}^3 muni de la métrique euclidienne (cf. Fig. C.1).

4 Les géodésiques lumière vérifient la condition $g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = 0$. Pour θ et φ fixés (c'est-à-dire $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$), l'Éq. (B.19) conduit alors à

$$-c^2 dt^2 + dr^2 = 0,$$

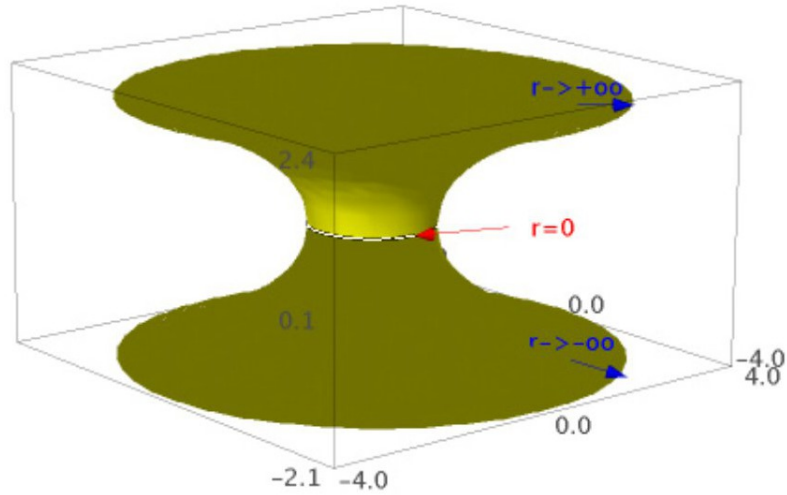


FIGURE C.1 – Diagramme de plongement de la surface $\{t = \text{const}, \theta = \pi/2\}$ de l'espace-temps de trou de ver (\mathcal{E}, g) dans l'espace \mathbb{R}^3 muni de la métrique euclidienne ; il s'agit d'un plongement *isométrique* : la longueur d'un déplacement sur la surface donnée par la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 coïncide avec la longueur donnée par la métrique d'espace-temps g .

dont les solutions sont

$$\frac{dr}{dt} = \pm c.$$

L'équation d'une géodésique lumière radiale est donc

$$r = ct + r_0 \quad (\text{géodésique lumière sortante})$$

ou bien

$$r = -ct + r_0 \quad (\text{géodésique lumière entrante}).$$

On en déduit que, le long d'une géodésique lumière,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} r = +\infty \quad \text{ou} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} r = -\infty.$$

Les géodésiques lumière radiales atteignent toujours l'une des deux régions asymptotiquement plates : il n'y a donc pas d'horizon des événements. Autrement dit, l'espace-temps (\mathcal{E}, g) ne contient pas de trou noir.

5 En utilisant le temps propre comme paramètre, l'équation des géodésiques (du genre temps) s'écrit (cf. Éq. (2.132) du cours)

$$\frac{d^2 x^\alpha}{d\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

La composante $\alpha = 1$ ($x^\alpha = r$) est

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} + \Gamma^r_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} = 0.$$

Compte tenu des symboles de Christoffel (B.21)-(B.23), il vient

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} - r \left(\frac{d\theta}{d\tau} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left(\frac{d\varphi}{d\tau} \right)^2 = 0.$$

Pour des géodésiques purement radiales $d\theta/d\tau = 0$ et $d\varphi/d\tau = 0$, de sorte que l'équation cherchée est

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = 0.$$

6 La solution générale de l'équation ci-dessus est bien évidemment une fonction affine de τ , que l'on peut écrire comme (B.24).

Les composantes u^α de la 4-vitesse sont données par (cf. Éq. (2.85) du cours)

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau}.$$

Dans le cas présent, on en déduit $u^r = c^{-1} dr/d\tau = V/c$, $u^\theta = 0$ et $u^\varphi = 0$, soit

$$u^\alpha = \left(u^0, \frac{V}{c}, 0, 0 \right).$$

La composante u^0 est déterminée par la condition de normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$:

$$\begin{aligned} g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1 &\iff \underbrace{g_{00}}_{-1} (u^0)^2 + 2 \underbrace{g_{0r}}_0 u^0 \frac{V}{c} + \underbrace{g_{rr}}_1 \frac{V^2}{c^2} = -1 \\ &\iff -(u^0)^2 + \frac{V^2}{c^2} = -1 \\ &\iff u^0 = \sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}, \end{aligned}$$

où nous avons utilisé le fait que $u^0 > 0$ puisque \vec{u} est orienté vers le futur. Les composantes de la 4-vitesse le long d'une géodésique radiale du genre temps sont donc

$$u^\alpha = \left(\sqrt{1 + \frac{V^2}{c^2}}, \frac{V}{c}, 0, 0 \right).$$

Pour $V \neq 0$, l'Éq. (B.24) se met sous la forme

$$\tau = \frac{r - r_0}{V}.$$

On en déduit que lorsqu'on se rend de $r = r_0$ à $r = -r_0$, le temps propre écoulé est

$$\tau = \frac{2|r_0|}{|V|}.$$

7 Les composantes du tenseur de Ricci sont données par (cf. Éq. (4.110) du cours)

$$R_{\alpha\beta} = \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\alpha\mu}}{\partial x^\beta} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \Gamma^\nu_{\mu\nu} - \Gamma^\nu_{\alpha\mu} \Gamma^\mu_{\nu\beta}.$$

Compte tenu des valeurs (B.21)-(B.23) des symboles de Christoffel, il vient

$$\bullet R_{00} = \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\mu_{00}}{\partial x^\mu}}_0 - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\mu_{0\mu}}{\partial x^0}}_0 + \underbrace{\Gamma^\mu_{00}}_0 \Gamma^\nu_{\mu\nu} - \underbrace{\Gamma^\nu_{0\mu}}_0 \underbrace{\Gamma^\mu_{\nu 0}}_0 = 0.$$

$$\begin{aligned} \bullet R_{rr} &= \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\mu_{rr}}{\partial x^\mu}}_0 - \frac{\partial \Gamma^\mu_{r\mu}}{\partial r} + \underbrace{\Gamma^\mu_{rr}}_0 \Gamma^\nu_{\mu\nu} - \Gamma^\nu_{r\mu} \Gamma^\mu_{\nu r} \\ &= -\frac{\partial \Gamma^\theta_{r\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^\varphi_{r\varphi}}{\partial r} - \Gamma^\theta_{r\theta} \Gamma^\theta_{\theta r} - \Gamma^\varphi_{r\varphi} \Gamma^\varphi_{\varphi r} \\ &= -2 \frac{b^2 - r^2}{(b^2 + r^2)^2} - 2 \frac{r^2}{(b^2 + r^2)^2} = -\frac{2b^2}{(b^2 + r^2)^2}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet R_{\theta\theta} &= \frac{\partial \Gamma^\mu_{\theta\theta}}{\partial x^\mu} - \frac{\partial \Gamma^\mu_{\theta\mu}}{\partial \theta} + \Gamma^\mu_{\theta\theta} \Gamma^\nu_{\mu\nu} - \Gamma^\nu_{\theta\mu} \Gamma^\mu_{\nu\theta} \\ &= \frac{\partial \Gamma^r_{\theta\theta}}{\partial r} - \frac{\partial \Gamma^\varphi_{\theta\varphi}}{\partial \theta} + \Gamma^r_{\theta\theta} (\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) - \Gamma^\theta_{\theta r} \Gamma^r_{\theta\theta} - \Gamma^r_{\theta\theta} \Gamma^\theta_{r\theta} - \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} \\ &= -1 + \frac{1}{\sin^2 \theta} - r \left(\frac{2r}{b^2 + r^2} \right) - \frac{r}{b^2 + r^2} (-r) + r \frac{r}{b^2 + r^2} - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bullet R_{\varphi\varphi} &= \frac{\partial \Gamma^\mu_{\varphi\varphi}}{\partial x^\mu} - \underbrace{\frac{\partial \Gamma^\mu_{\varphi\mu}}{\partial \varphi}}_0 + \Gamma^\mu_{\varphi\varphi} \Gamma^\nu_{\mu\nu} - \Gamma^\nu_{\varphi\mu} \Gamma^\mu_{\nu\varphi} \\ &= \frac{\partial \Gamma^r_{\varphi\varphi}}{\partial r} + \frac{\partial \Gamma^\theta_{\varphi\varphi}}{\partial \theta} + \Gamma^r_{\varphi\varphi} (\Gamma^\theta_{r\theta} + \Gamma^\varphi_{r\varphi}) + \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi r} \Gamma^r_{\varphi\varphi} - \Gamma^\varphi_{\varphi\theta} \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \\ &\quad - \Gamma^r_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{r\varphi} - \Gamma^\theta_{\varphi\varphi} \Gamma^\varphi_{\theta\varphi} \\ &= -\sin^2 \theta - (-\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) - r \sin^2 \theta \frac{2r}{b^2 + r^2} - \cos \theta \sin \theta \times \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &\quad - \frac{r}{b^2 + r^2} (-r \sin^2 \theta) - \frac{\cos \theta}{\sin \theta} (-\cos \theta \sin \theta) - r \sin^2 \theta \frac{r}{b^2 + r^2} + \cos \theta \sin \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Les composantes diagonales du tenseur de Ricci sont donc bien données par (B.25).

Remarque : Si $b = 0$, on obtient $R_{rr} = 0$, ce qui est compatible avec $R_{\alpha\beta} = 0$ et le fait que la métrique (B.19) se réduit à la métrique plate (Minkowski) lorsque $b = 0$.

8 Le tenseur d'Einstein se déduit du tenseur de Ricci par la formule (cf. Éq. (4.114) du cours)

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}Rg_{\alpha\beta}.$$

Pour le calculer, il nous faut donc la courbure scalaire R . Puisque les composantes de la métrique dans les coordonnées $(x^\alpha) = (ct, r, \theta, \varphi)$ sont diagonales, on a

$$R = g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} = g^{00}\underbrace{R_{00}}_0 + \underbrace{g^{rr}}_1 R_{rr} + g^{\theta\theta}\underbrace{R_{\theta\theta}}_0 + g^{\varphi\varphi}\underbrace{R_{\varphi\varphi}}_0 = R_{rr} = -\frac{2b^2}{(b^2 + r^2)^2}.$$

Les composantes diagonales du tenseur d'Einstein sont donc

- $G_{00} = R_{00} - \frac{1}{2}Rg_{00} = 0 + \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}(-1) = -\frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$
- $G_{rr} = R_{rr} - \frac{1}{2}Rg_{rr} = -\frac{2b^2}{(b^2 + r^2)^2} + \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2} \times 1 = -\frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}$
- $G_{\theta\theta} = R_{\theta\theta} - \frac{1}{2}Rg_{\theta\theta} = 0 + \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}(b^2 + r^2) = \frac{b^2}{b^2 + r^2}$
- $G_{\varphi\varphi} = R_{\varphi\varphi} - \frac{1}{2}Rg_{\varphi\varphi} = 0 + \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}(b^2 + r^2)\sin^2\theta = \frac{b^2\sin^2\theta}{b^2 + r^2}.$

L'équation d'Einstein $G_{\alpha\beta} = (8\pi G/c^4)T_{\alpha\beta}$ implique

$$T_{00} = \frac{c^4}{8\pi G}G_{00}.$$

Au vu de la valeur de G_{00} obtenue ci-dessus, on obtient l'Éq. (B.26).

Les composantes de la 4-vitesse \vec{u}_* de l'observateur statique sont données par la formule (2.85) du cours, avec dans le cas présent $dr = 0$, $d\theta = 0$ et $d\varphi = 0$. On a donc $u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$: \vec{u}_* est ainsi colinéaire à $\vec{\partial}_0$: $\vec{u}_* = u_*^0 \vec{\partial}_0$. Or $\vec{\partial}_0$ est un vecteur unitaire puisque $g_{00} = -1 = \vec{\partial}_0 \cdot \vec{\partial}_0$. Comme il est orienté vers le futur, on en déduit que

$$\vec{u}_* = \vec{\partial}_0.$$

La densité d'énergie mesurée par l'observateur statique est (cf. Éq. (4.116) du cours)

$$\varepsilon = \mathbf{T}(\vec{u}_*, \vec{u}_*) = \mathbf{T}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_0) = T_{00},$$

soit, d'après (B.26),

$$\varepsilon = -\frac{c^4}{8\pi G} \frac{b^2}{(b^2 + r^2)^2}.$$

On constate que, pour $b \neq 0$,

$$\varepsilon < 0$$

La matière que remplit l'espace-temps du trou de ver viole donc la condition d'énergie faible (cf. § 4.4.1 du cours). Il ne peut par conséquent s'agir que d'une matière très exotique.

Remarque : Il existe des solutions de trou de ver plus compliquées que (B.19) et où $\varepsilon > 0$. Par contre, dans toutes ces solutions, il existe toujours des observateurs (non statiques) pour lesquels la densité d'énergie apparaît négative. La condition d'énergie faible est donc toujours violée par ces solutions.

C.4 Observateur accéléré et horizon de Rindler

C.4.1 Mouvement uniformément accéléré

1.1 De part la définition $\vec{u} := c^{-1} \overrightarrow{d\mathbf{P}}/d\tau$ de la quadrivitesse, il vient immédiatement

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dX^\alpha}{d\tau}.$$

1.2 On a $\vec{u} \cdot \vec{a} = \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{u}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{u}} (-1) = 0$. \vec{u} étant un vecteur du genre temps, on en déduit que \vec{a} est nécessairement du genre espace.

1.3 Au vu de (B.27), les composantes $g_{\alpha\beta}$ de \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) sont constantes. Par conséquent les symboles de Christoffel sont identiquement nuls : $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma} = 0$. On a donc $a^\alpha = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = u^\mu \partial u^\alpha / \partial x^\mu$. Or $u^\mu \partial u^\alpha / \partial x^\mu = c^{-1} du^\alpha / d\tau$ [cf. Eq. (4.57)], d'où la première égalité dans (B.31). La deuxième égalité découle alors de l'expression de $u^\alpha(\tau)$ obtenue en 1.1.

1.4 a) Pour $t \leq 0$, $\tau = t$ et $\vec{u} = \vec{\partial}_0$. En particulier

$$u^\alpha(\tau) = (1, 0, 0, 0) \quad \text{pour } \tau \leq 0.$$

b) D'après (B.31), les composantes a^α ont la dimension de l'inverse d'une longueur ; il en est donc de même pour a .

c) La forme (B.32) de \vec{a} implique $a^y = a^z = 0$, ce qui, au vu de la relation (B.31), se traduit par

$$\frac{du^y}{d\tau} = 0 \quad \text{et} \quad \frac{du^z}{d\tau} = 0.$$

Étant données les conditions initiales $u^y(0) = 0$ et $u^z(0) = 0$ [cf. a)], ce système s'intègre immédiatement en $u^y(\tau) = 0$ et $u^z(\tau) = 0$, d'où (B.34). (B.35) n'est pas autre chose que la condition de normalisation $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$. Quant à (B.36), il s'agit de la condition (B.33) compte tenu des composantes (B.31) de \vec{a} et de la forme (B.27) des coefficients métriques.

1.5 De (B.35) on tire $u^0 = \sqrt{1 + (u^x)^2}$ (car $u^0 > 0$). En reportant dans (B.36), il vient

$$\frac{1}{1 + (u^x)^2} \left(\frac{du^x}{d\tau} \right)^2 = c^2 a^2.$$

D'après (B.32), $du^x/d\tau = ca^x > 0$. En prenant la racine carrée de l'équation ci-dessus on obtient donc

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (u^x)^2}} \frac{du^x}{d\tau} = ca.$$

Étant donnée la condition initiale $u^x(0) = 0$ [cf. 1.4a)], cette équation s'intègre en

$$u^x(\tau) = \sinh(a\tau).$$

Comme $u^0 = \sqrt{1 + (u^x)^2}$ et $1 + \sinh^2(a\tau) = \cosh^2(a\tau)$, on en déduit

$$u^0(\tau) = \cosh(a\tau).$$

On peut donc écrire la quadrivitesse de \mathcal{O} sous la forme

$$\vec{u} = \cosh(a\tau) \vec{\delta}_0 + \sinh(a\tau) \vec{\delta}_x.$$

1.6 a) Puisque $u^\alpha = c^{-1}dX^\alpha/d\tau$ (réponse à la question 1.1), on déduit du résultat de la question 1.5 que

$$\frac{dX^0}{d\tau} = c \cosh(a\tau) \quad \text{et} \quad \frac{dX^x}{d\tau} = c \sinh(a\tau).$$

Compte tenu des conditions initiales, $X^0(0) = 0$ et $X^x(0) = 0$, ce système s'intègre immédiatement pour donner (B.37)-(B.38). Quant aux résultats (B.39) et (B.40), ils découlent de (B.34) avec les conditions initiales $X^y(0) = 0$ et $X^z(0) = 0$.

b) Dans le plan (t, x) , la courbe correspondant aux équations (B.37) et (B.38) est une branche d'hyperbole, ayant pour axe la droite $t = 0$ et pour asymptote la droite $ct = x + a^{-1}$, c'est-à-dire Δ . L'équation de \mathcal{L} en terme de (t, x) s'obtient à partir de (B.37)-(B.38) et de la relation $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$: il vient

$$(ax + 1)^2 - (act)^2 = 1.$$

c) cf. Fig. C.2.

1.7 On a

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{cu^x}{u^0} = c \frac{\sinh(a\tau)}{\cosh(a\tau)} = c \frac{\sinh(a\tau)}{\sqrt{1 + \sinh^2(a\tau)}}$$

En utilisant (B.37) on obtient

$$v = c \frac{act}{\sqrt{1 + (act)^2}}.$$

Pour $0 \leq t \ll (ca)^{-1}$, c'est-à-dire $0 \leq act \ll 1$, cette expression se réduit à $v \simeq c^2 at$. On retrouve l'expression non relativiste de la vitesse en fonction de l'accélération et du temps avec la condition initiale $v(0) = 0$. Notons que $c^2 a$ a la dimension d'une accélération.

Pour $t \rightarrow +\infty$, la formule ci-dessus donne $v \rightarrow c$: la vitesse de \mathcal{O} mesurée par l'observateur inertiel tend vers la vitesse de la lumière, ce qui n'est pas surprenant puisque \mathcal{O} est en accélération constante.

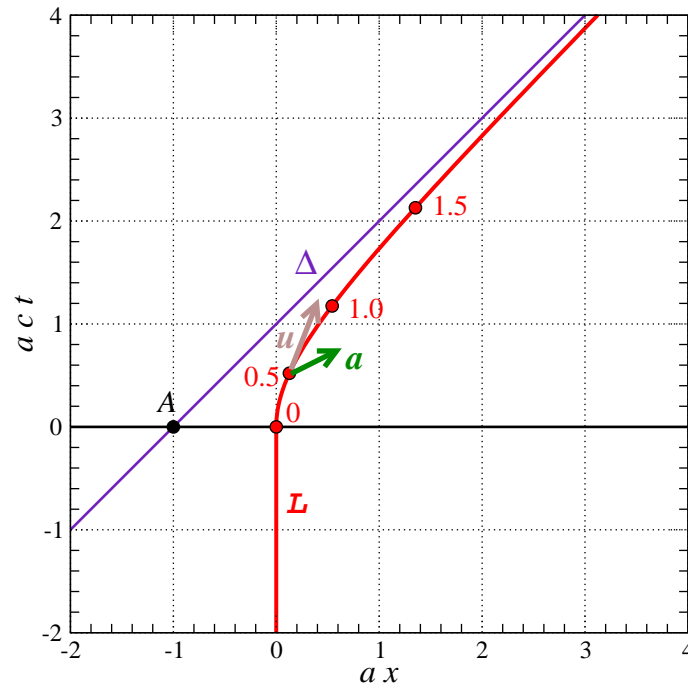


FIGURE C.2 – Ligne d’univers de l’observateur \mathcal{O} dans le plan (ct, x) . Les quatre événements représentés le long de \mathcal{L} sont étiquetés par la valeur du temps propre τ , en unité de $(ca)^{-1}$: $\tau = 0, 0.5(ca)^{-1}, (ca)^{-1}$ et $1.5(ca)^{-1}$.

C.4.2 Décalage spectral et effet Einstein

2.1 Dans le diagramme d’espace-temps en (ct, x) , les lignes d’univers des photons sont des droites de pente $\pm 45^\circ$ (cf. Fig. C.3). Pour que le photon atteigne la ligne d’univers de \mathcal{O} on en déduit que le point d’émission doit être situé en dessous de l’asymptote Δ à la branche d’hyperbole (Δ est elle-même une droite de pente 45°). Cela équivaut à la condition (B.41). Les événements situés au dessus de Δ dans le plan (ct, x) ne sont donc jamais visibles pour l’observateur \mathcal{O} : Δ constitue un horizon pour \mathcal{O} .

2.2 Le photon est reçu dans la partie accélérée de la ligne d’univers de \mathcal{O} , c’est-à-dire la partie $t > 0$ (branche d’hyperbole dans le diagramme ci-dessus).

Il faut distinguer deux cas (cf. Fig. C.3) :

1. Le photon est émis dans la partie du diagramme située à gauche de \mathcal{L} : sa ligne d’univers est alors une droite de pente $+45^\circ$, dont l’équation est

$$\frac{X^0(\tau) - ct_{\text{em}}}{X^x(\tau) - x_{\text{em}}} = 1.$$

En remplaçant $X^0(\tau)$ et $X^x(\tau)$ par les valeurs données par (B.37) et (B.38), on obtient $\sinh(acs) - act_{\text{em}} = \cosh(acs) - 1 - ax_{\text{em}}$, soit $1 + a(x_{\text{em}} - ct_{\text{em}}) = \cosh(acs) - \sinh(acs) = \exp(-acs)$. D’où (B.42).

2. Le photon est émis dans la partie du diagramme située à droite de \mathcal{L} : sa ligne

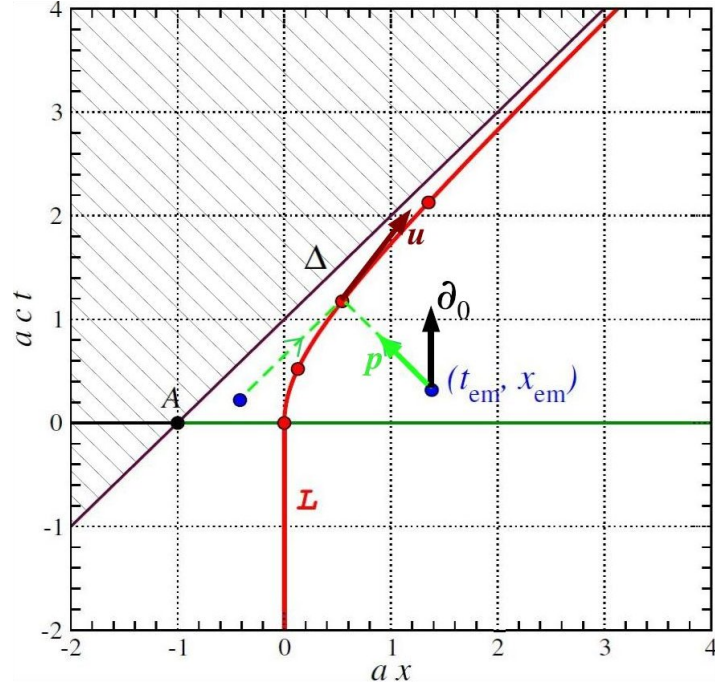


FIGURE C.3 – Émission d'un photon par un observateur inertiel (quadrivitesse $\vec{\partial}_0$) et réception par \mathcal{O} (quadrivitesse \vec{u}). Le vecteur \vec{p} est la quadri-impulsion du photon. La zone hachurée représente la région d'espace-temps cachée de \mathcal{O} par l'horizon de Rindler \mathcal{H} . L'intersection de ce dernier avec le plan de la figure est la droite Δ asymptote de \mathcal{L} .

d'univers est alors une droite de pente -45° , dont l'équation est

$$\frac{X^0(\tau) - ct_{em}}{X^x(\tau) - x_{em}} = -1.$$

Il vient alors $\sinh(ac\tau) - act_{em} = -\cosh(ac\tau) + 1 + ax_{em}$, soit $1 + a(x_{em} + ct_{em}) = \cosh(ac\tau) + \sinh(ac\tau) = \exp(ac\tau)$. D'où (B.43).

Lorsque $a \rightarrow 0$, on peut développer les logarithmes au premier ordre et (B.42) et (B.43) se réduisent respectivement à

$$\begin{aligned} \tau &\simeq t_{em} - \frac{x_{em}}{c} && \text{si } x_{em} < 0 \\ \tau &\simeq t_{em} + \frac{x_{em}}{c} && \text{si } x_{em} > 0. \end{aligned}$$

On reconnaît les temps de réception que l'on aurait obtenus si \mathcal{O} était resté immobile en $x = 0$.

2.3 \vec{p} est un vecteur du genre lumière tangent au plan (ct, x) . Il s'écrit donc $\vec{p} = \alpha(\vec{\partial}_0 \pm \vec{\partial}_x)$, le signe $+$ correspondant au cas no. 1 ci-dessus (propagation vers la droite) et le signe $-$ au cas no. 2 (propagation vers la gauche). L'énergie du photon mesurée par l'observateur inertiel est donnée par la formule $\varepsilon_{em} = -\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}c$ (cf. § 2.5.4). On obtient ainsi $\varepsilon_{em} = \alpha c$, d'où (B.44).

$\vec{\partial}_0$ et $\vec{\partial}_x$ étant deux vecteurs de Killing de l'espace-temps de Minkowski (associés respectivement à la stationnarité de cet espace-temps et à son invariance par translation dans la direction x), et le photon décrivant une géodésique, les quantités $\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}$ et $\vec{\partial}_x \cdot \vec{p}$ sont conservées le long de la ligne d'univers du photon. Elles valent respectivement $\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p} = -\varepsilon_{\text{em}}/c$ et $\vec{\partial}_x \cdot \vec{p} = \pm\varepsilon_{\text{em}}/c$. Dans le cas présent (espace-temps de Minkowski), les vecteurs $\vec{\partial}_0$ et $\vec{\partial}_x$ sont constants sur \mathcal{E} ($\nabla\vec{\partial}_0 = 0$ et $\nabla\vec{\partial}_x = 0$), il en est donc de même pour \vec{p} . L'énergie du photon mesurée par \mathcal{O} est

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{rec}} &= -\vec{u} \cdot \vec{p}c = -\left[u^0(\tau)\vec{\partial}_0 + u^x(\tau)\vec{\partial}_x\right] \cdot \vec{p}c = -c\left[u^0(\tau)\underbrace{\vec{\partial}_0 \cdot \vec{p}}_{=-\varepsilon_{\text{em}}/c} + u^x(\tau)\underbrace{\vec{\partial}_x \cdot \vec{p}}_{=\pm\varepsilon_{\text{em}}/c}\right] \\ &= \varepsilon_{\text{em}}\left[u^0(\tau) \mp u^x(\tau)\right]. \end{aligned}$$

En reportant les valeurs de $u^0(\tau)$ et $u^x(\tau)$ obtenues au 1.5, il vient

$$\varepsilon_{\text{rec}} = \varepsilon_{\text{em}}\left[\cosh(a\tau) \mp \sinh(a\tau)\right] = \varepsilon_{\text{em}}\exp(\mp a\tau),$$

le signe $-$ correspondant au cas no. 1 du 1.8 (propagation vers la droite) et le signe $+$ au cas no. 2 (propagation vers la gauche). En utilisant la formule (B.42) [resp. (B.43)] pour le cas no. 1 [resp. no. 2], on obtient

$$\begin{aligned} \varepsilon_{\text{rec}} &= \varepsilon_{\text{em}}\left[1 + a(x_{\text{em}} - ct_{\text{em}})\right] & \text{si } x_{\text{em}} < a^{-1}\left[\sqrt{1 + (act_{\text{em}})^2} - 1\right] \\ \varepsilon_{\text{rec}} &= \varepsilon_{\text{em}}\left[1 + a(x_{\text{em}} + ct_{\text{em}})\right] & \text{si } x_{\text{em}} > a^{-1}\left[\sqrt{1 + (act_{\text{em}})^2} - 1\right]. \end{aligned}$$

Lorsque le point d'émission s'approche de \mathcal{H} , $x_{\text{em}} + a^{-1} - ct_{\text{em}} \rightarrow 0$ et on se trouve dans le cas no. 1 (c'est-à-dire à gauche de \mathcal{L}). On doit donc utiliser la première des formules ci-dessus, qui conduit à $\varepsilon_{\text{rec}} \rightarrow 0$. Ainsi l'énergie reçue des photons émis près de l'horizon tend vers zéro.

2.4 Si $t_{\text{em}} = 0$, les deux formules obtenues au 1.9 se réduisent immédiatement à (B.45), sans distinction sur x_{em} (c'est-à-dire à la fois pour $x_{\text{em}} < 0$ et pour $x_{\text{em}} > 0$). Le décalage spectral est donné par la formule $z = \lambda_{\text{rec}}/\lambda_{\text{em}} - 1$, avec des longueurs d'ondes dans le rapport inverse des énergies. D'où

$$z = \frac{1}{1 + ax_{\text{em}}} - 1.$$

Lorsque $a|x_{\text{em}}| \ll 1$, le développement limité à l'ordre un en ax_{em} conduit à (B.46). Puisque a a la dimension de l'inverse d'une longueur, la dimension de g est celle d'une accélération.

Pour comparer avec le décalage spectral gravitationnel (effet Einstein) considérons la formule (3.69) avec $h_{\text{rec}} = 0$. Elle s'écrit

$$z = -\frac{gh_{\text{em}}}{c^2},$$

où $g = |g(r_0)|$ est la valeur absolue de l'accélération de la pesanteur au niveau du récepteur et h_{em} l'altitude de l'émetteur par rapport au récepteur. Si l'on identifie x_{em} et

h_{em} , on obtient un accord parfait entre la formule de l'effet Einstein et (B.46). Ceci est une conséquence du Principe d'équivalence : localement, on ne peut distinguer le champ gravitationnel d'une accélération dans l'espace-temps de Minkowski. Notons que les signes sont bien corrects : la quadriaccélération \vec{a} vers les x croissants crée dans le référentiel de l'observateur \mathcal{O} une force d'inertie dirigée vers les x décroissants. Si on identifie cette force d'inertie à la pesanteur \vec{g} , le « haut » pour \mathcal{O} est donc pour $x > 0$ et le « bas » pour $x < 0$. Cela justifie l'identification $x_{em} = h_{em}$.

C.4.3 Coordonnées de Rindler

3.1 Soit M un point générique de \mathcal{R}_τ , de coordonnées (ct, x, y, z) . Le vecteur $\overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M}$ est tangent à \mathcal{R}_τ et doit donc obéir à $\vec{u} \cdot \overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M} = 0$. Les composantes du vecteur $\overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M}$ sont $(ct - X^0(\tau), x - X^x(\tau), y, z)$ et celle de \vec{u} sont $(u^0 = \cosh(ac\tau), u^x = \sinh(ac\tau), 0, 0)$ (d'après la réponse à la question 1.5). La relation d'orthogonalité entre \vec{u} et $\overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M}$ s'écrit donc

$$-\cosh(ac\tau) [ct - X^0(\tau)] + \sinh(ac\tau) [x - X^x(\tau)] = 0.$$

En reportant les valeurs de $X^0(\tau)$ et $X^x(\tau)$ données par (B.37) et (B.38) et en divisant par $\cosh(ac\tau)$, on obtient (B.47).

Les coordonnées du point A vérifient l'Eq. (B.47), donc $A \in \mathcal{R}_\tau$.

Quelques hyperplans \mathcal{R}_τ sont représentés (comme des droites) dans le diagramme d'espace-temps de la Fig. C.4.

3.2 Puisque $\vec{e}_{(1)}$ est tangent au plan (t, x) , il s'écrit nécessairement sous la forme (B.48). Les conditions (iii) et (iv) impliquent que les vecteurs $\vec{e}_{(2)}$ et $\vec{e}_{(3)}$ soient dans le plan (y, z) . Comme de plus, ils doivent être unitaires et orthogonaux, le choix (B.49) est permis. Les composantes de $\vec{e}_{(1)}$ découlent des deux conditions $\vec{e}_{(1)} \cdot \vec{e}_{(1)} = 1$ (vecteur unitaire) et $\vec{u} \cdot \vec{e}_{(1)} = 0$ ($\vec{e}_{(1)}$ tangent à \mathcal{R}_τ). Ces dernières s'écrivent respectivement, compte tenu des composantes de \vec{u} obtenues au 1.5,

$$\begin{aligned} -[e_{(1)}^0]^2 + [e_{(1)}^x]^2 &= 1 \\ -\cosh(ac\tau) e_{(1)}^0 + \sinh(ac\tau) e_{(1)}^x &= 0. \end{aligned}$$

De la deuxième équation on tire $e_{(1)}^0 = \tanh(ac\tau) e_{(1)}^x$. En reportant cette valeur dans la première équation, il vient $[e_{(1)}^x]^2 / \cosh^2(ac\tau) = 1$, soit, puisque $e_{(1)}^x > 0$, $e_{(1)}^x = \cosh(ac\tau)$. On a alors $e_{(1)}^0 = \sinh(ac\tau)$. Au total,

$$\vec{e}_{(1)} = \sinh(ac\tau) \vec{\partial}_0 + \cosh(ac\tau) \vec{\partial}_x.$$

3.3 Au voisinage de \mathcal{L} , l'hyperplan \mathcal{R}_τ coïncide avec l'hypersurface de simultanéité de \mathcal{O} pour le temps propre τ (cf. Fig. 2.15). Il est donc naturel que \mathcal{O} attribue la coordonnée temporelle τ au point M . Puisque $(\vec{e}_{(1)}, \vec{e}_{(2)}, \vec{e}_{(3)})$ est une base orthonormale de l'espace vectoriel tangent à \mathcal{R}_τ , ξ , y et z sont les distances métriques entre les points $\mathcal{O}(\tau)$ et M , tous deux situés dans \mathcal{R}_τ . Pour M proche de \mathcal{L} (en fait tel que $\overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M} \cdot \overrightarrow{\mathcal{O}(\tau)M} \ll a^{-2}$),

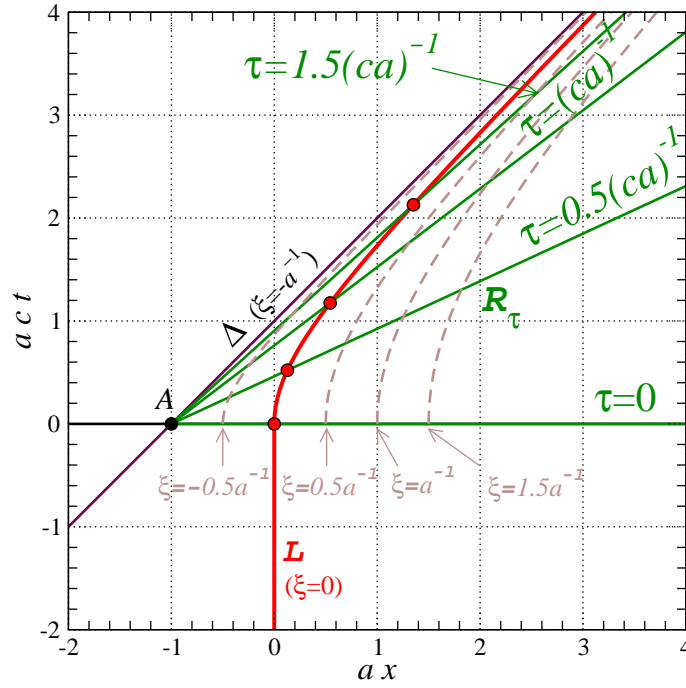


FIGURE C.4 – Même diagramme d’espace-temps que sur les Fig. C.2 et C.3, mais sur lequel on a dessiné l’espace local de repos de \mathcal{O} , \mathcal{R}_τ , pour quatre instants différents : $\tau = 0, 0.5(ca)^{-1}, (ca)^{-1}$ et $1.5(ca)^{-1}$, ainsi que des lignes de coordonnée ξ constante.

ces distances peuvent être obtenues par la méthode « radar » exposée dans le § 6.4. Les coordonnées minkowskiennes de $\mathcal{O}(\tau)$ sont $(X^\alpha(\tau))$ [formules (B.37)-(B.40)] et celles de M sont (ct, x, y, z) . On a donc

$$\overline{\mathcal{O}(\tau)\vec{M}} = [ct - X^0(\tau)] \vec{\partial}_0 + [x - X^x(\tau)] \vec{\partial}_x + y \vec{\partial}_y + z \vec{\partial}_z.$$

En remplaçant dans l’expression (B.50) les $\vec{e}_{(i)}$ par leurs valeurs obtenues au 3.2, à savoir $\vec{e}_{(1)} = \sinh(ac\tau) \vec{\partial}_0 + \cosh(ac\tau) \vec{\partial}_x$, $\vec{e}_{(2)} = \vec{\partial}_y$ et $\vec{e}_{(3)} = \vec{\partial}_z$, et en comparant avec la décomposition ci-dessus, on obtient évidemment $y = y$ et $z = z$, ainsi que

$$\begin{aligned} \xi \sinh(ac\tau) &= ct - X^0(\tau) \\ \xi \cosh(ac\tau) &= x - X^x(\tau). \end{aligned}$$

En remplaçant $X^0(\tau)$ et $X^x(\tau)$ par les expressions (B.37) et (B.38), on obtient (B.51). Quelques lignes de coordonnée ξ constante sont représentées sur la Fig. C.4. L’équation de la ligne d’univers \mathcal{L} dans les coordonnées de Rindler est $\xi = 0, y = 0$ et $z = 0$. En reportant ces valeurs dans (B.51), on obtient bien (B.37)-(B.40).

3.4 \mathcal{H} est donné par l’équation $ct = x + a^{-1}$ (cf. 2.1). En reportant dans (B.51), il vient $(\xi + a^{-1}) \sinh(ac\tau) = (\xi + a^{-1}) \cosh(ac\tau)$, c’est-à-dire $(\xi + a^{-1}) \exp(-ac\tau) = 0$. On en déduit

$$\xi|_{\mathcal{H}} = -a^{-1}.$$

3.5 En différenciant les deux premières expressions de (B.51), il vient

$$\begin{aligned} c dt &= (1 + a\xi) \cosh(a\tau) c d\tau + \sinh(a\tau) d\xi \\ dx &= (1 + a\xi) \sinh(a\tau) c d\tau + \cosh(a\tau) d\xi. \end{aligned}$$

En utilisant $\cosh^2(a\tau) - \sinh^2(a\tau) = 1$, on en déduit

$$-c^2 dt^2 + dx^2 = -(1 + a\xi)^2 c^2 d\tau^2 + d\xi^2.$$

En reportant dans (B.27), avec $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g'_{\mu\nu} dx'^\mu dx'^\nu$, on obtient (B.52).

Remarque : on peut également obtenir (B.52) en appliquant la loi de transformation des composantes d'un tenseur deux fois covariant : $g'_{\alpha\beta} = g_{\mu\nu} \partial x^\mu / \partial x'^\alpha \partial x^\nu / \partial x'^\beta$ avec la matrice jacobienne $\partial x^\mu / \partial x'^\alpha$ déduite de (B.51).

3.6 D'après (B.52), $\frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial \tau} = 0$. On en déduit que $\vec{\partial}_\tau$ est un vecteur de Killing. De plus, il s'agit d'un vecteur de genre temps : $\vec{\partial}_\tau \cdot \vec{\partial}_\tau = g'_{\tau\tau} = -c^2(1 + a\xi)^2 < 0$. $\vec{\partial}_\tau$ est donc le vecteur de Killing associé à la stationnarité du référentiel de l'observateur \mathcal{O} .

En revenant à la définition première des vecteurs comme des opérateurs différentiels agissant sur les champs scalaires, on obtient

$$\vec{\partial}_\tau = \frac{\partial}{\partial \tau} \Big|_\xi = \frac{\partial}{\partial ct} \Big|_x \frac{\partial ct}{\partial \tau} \Big|_\xi + \frac{\partial}{\partial x} \Big|_t \frac{\partial x}{\partial \tau} \Big|_\xi = \frac{\partial ct}{\partial \tau} \Big|_\xi \vec{\partial}_0 + \frac{\partial x}{\partial \tau} \Big|_\xi \vec{\partial}_x.$$

En utilisant (B.51) pour exprimer les dérivées $\partial ct / \partial \tau$ et $\partial x / \partial \tau$, il vient

$$\vec{\partial}_\tau = ca(\xi + a^{-1}) \left[\cosh(a\tau) \vec{\partial}_0 + \sinh(a\tau) \vec{\partial}_x \right].$$

En invoquant de nouveau (B.51), on peut mettre cette expression sous une forme très simple :

$$\vec{\partial}_\tau = ca \left[(x + a^{-1}) \vec{\partial}_0 + ct \vec{\partial}_x \right].$$

3.7 Cherchons les géodésiques de longueur nulle à partir de l'élément de longueur (B.52), en y faisant $dy = 0$ et $dz = 0$, puisque on se restreint au plan (ct, x) :

$$0 = -(1 + a\xi)^2 c^2 d\tau^2 + d\xi^2,$$

d'où

$$cd\tau = \pm \frac{d\xi}{1 + a\xi}.$$

L'intégration donne

$$c\tau = \pm a^{-1} \ln(1 + a\xi) + \text{const},$$

le signe \pm correspondant au sens de propagation des photons. Ces géodésiques sont représentées sur la Fig. C.5 dans un diagramme d'espace-temps en coordonnées de Rindler. On remarque qu'au voisinage de la ligne d'univers \mathcal{L} de l'observateur \mathcal{O} , les géodésiques

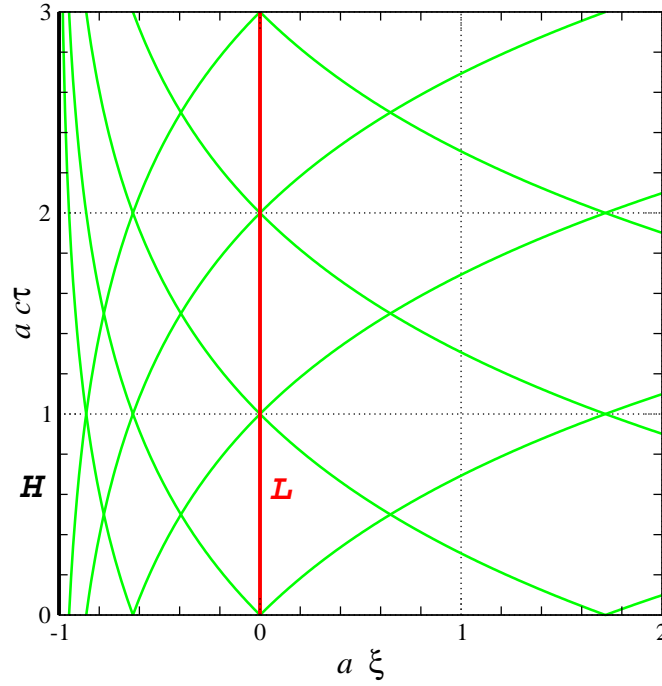


FIGURE C.5 – Géodésiques lumière dans un diagramme d'espace-temps en coordonnées de Rindler $(c\tau, \xi)$.

sont inclinées à $\pm 45^\circ$, tout comme dans un référentiel inertiel : les effets de l'accélération ne se font sentir qu'à une distance finie de \mathcal{L} . On remarque également qu'aucune géodésique ne provient de l'horizon \mathcal{H} .

3.8 Les symboles de Christoffel sont obtenus par la formule (2.130) :

$$\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} := \frac{1}{2} g^{\gamma\sigma} \left(\frac{\partial g'_{\sigma\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial g'_{\alpha\sigma}}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial x'^{\sigma}} \right).$$

Étant données les composantes (B.52), on obtient

$$\begin{aligned} \Gamma^{\prime 0}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2(1+a\xi)^2} \left(\frac{\partial g'_{0\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial g'_{\alpha 0}}{\partial x'^{\beta}} \right) \\ \Gamma^{\prime 1}_{\alpha\beta} &= -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial g'_{1\beta}}{\partial x'^{\alpha}} + \frac{\partial g'_{\alpha 1}}{\partial x'^{\beta}} - \frac{\partial g'_{\alpha\beta}}{\partial \xi} \right) \\ \Gamma^{\prime a}_{\alpha\beta} &= 0, \quad a = 2, 3. \end{aligned}$$

Finalement, les seuls symboles de Christoffel non nuls sont

$$\Gamma^{\prime 0}_{01} = \Gamma^{\prime 0}_{10} = \frac{a}{1+a\xi} \quad \text{et} \quad \Gamma^{\prime 1}_{00} = a(1+a\xi).$$

3.9 Les composantes du tenseur de Riemann se calculent en injectant les symboles de Christoffel dans la formule (4.98). On obtient, pour toutes les composantes :

$$R^{\prime\alpha}_{\beta\mu\nu} = 0.$$

Par exemple,

$$R'^0{}_{101} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \Gamma'^0{}_{01} - \Gamma'^0{}_{01} \Gamma'^0{}_{10} = -\frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{a}{1+a\xi} \right) - \frac{a^2}{(1+a\xi)^2} = 0.$$

Le résultat ci-dessus était attendu : il signifie que le tenseur de Riemann est identiquement nul dans la région couverte par les coordonnées de Rindler. Or cette région n'est ni plus ni moins qu'une région de l'espace-temps de Minkowski, dont on sait que le tenseur de Riemann vaut zéro (espace-temps plat).

C.5 Expérience de Hafele & Keating

1 À un très bon degré d'approximation, la Terre est un corps à symétrie sphérique. D'après le théorème de Birkhoff (cf. § 3.2.4), la métrique à l'extérieur de la Terre est alors la métrique de Schwarzschild, avec comme paramètre M la masse de la Terre.

2 Non. Les coordonnées (ct, r, θ, φ) sont liées au vecteur de Killing $\vec{\partial}_t$, qui est associé au caractère statique l'espace-temps de Schwarzschild (cf. § 3.2.1). Elles ne tournent donc pas. Autrement dit, pour $r \rightarrow \infty$, elles coïncident avec les coordonnées d'un observateur asymptotiquement inertiel.

3 Par définition de la 4-vitesse (cf. § 2.85),

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{d\tau} = \frac{1}{c} \frac{dx^\alpha}{dt} \frac{dt}{d\tau} = \frac{u^0}{c} \frac{dx^\alpha}{dt}. \quad (\text{C.3})$$

On a donc (compte tenu de $x^0 = ct$)

$$u^\alpha = u^0 \left(1, \frac{\dot{r}}{c}, \frac{\dot{\theta}}{c}, \frac{\dot{\varphi}}{c} \right). \quad (\text{C.4})$$

u^0 est déterminé par la condition d'unitarité de \vec{u} : $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$, qui est équivalente à $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$. Avec les coefficients métriques donnés dans l'énoncé, il vient

$$-\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right) (u^0)^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} (u^r)^2 + r^2 [(u^\theta)^2 + \sin^2 \theta (u^\varphi)^2] = -1, \quad (\text{C.5})$$

soit, au vu de (C.4),

$$(u^0)^2 \left[-1 + \frac{2GM}{c^2 r} + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \frac{\dot{r}^2}{c^2} + r^2 \left(\frac{\dot{\theta}^2}{c^2} + \sin^2 \theta \frac{\dot{\varphi}^2}{c^2} \right) \right] = -1. \quad (\text{C.6})$$

Puisque $u^0 > 0$ ($u^0 = dt/d\tau$), on en déduit

$$u^0 = \left\{ 1 - \frac{2GM}{c^2 r} - \frac{1}{c^2} \left[\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right] \right\}^{-1/2}. \quad (\text{C.7})$$

4 Si l'observateur n'est pas animé d'une vitesse relativiste par rapport aux coordonnées de Schwarzschild,

$$\dot{r}^2/c^2 \ll 1, \quad r^2\dot{\theta}^2/c^2 \ll 1, \quad \text{et} \quad r^2\dot{\varphi}^2/c^2 \ll 1. \quad (\text{C.8})$$

Par ailleurs, comme $r \geq R$ ($R =$ rayon de la Terre), $GM/(c^2r) \leq \Xi_{\oplus}$, où $\Xi_{\oplus} := GM/(c^2R) \simeq 7 \times 10^{-10}$ est le facteur de compacité de la Terre (cf. Tableau 3.1). D'où

$$\frac{GM}{c^2r} \ll 1. \quad (\text{C.9})$$

Au vu de (C.8) et (C.9), il est légitime d'effectuer un développement limité au premier ordre de (C.7); on obtient ainsi

$$u^0 \simeq 1 + \frac{GM}{c^2r} + \frac{1}{2c^2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (\text{C.10})$$

5 Puisque $u^0 = dt/d\tau$, on a immédiatement

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} d\tau = \int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{u^0}. \quad (\text{C.11})$$

En effectuant un développement limité au premier ordre de $1/u^0$, il vient

$$\Delta\tau = \int_{t_1}^{t_2} \left[1 - \frac{GM}{c^2r} - \frac{1}{2c^2} \left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \right] dt. \quad (\text{C.12})$$

6 Pour l'observateur qui reste au sol, $r = R = \text{const}$, $\dot{r} = 0$, $\theta = \text{const}$, $\dot{\theta} = 0$ et $\dot{\varphi} = \Omega = \text{const}$. L'intégrand de (C.12) est alors indépendant de t , de sorte qu'il vient

$$\Delta\tau_{\text{sol}} = \left[1 - \frac{GM}{c^2R} - \frac{R^2\Omega^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right] \Delta t. \quad (\text{C.13})$$

7 Pour l'avion, compte tenu des hypothèses faites, $r = R + h = \text{const}$, $\dot{r} = 0$, $\theta = \text{const}$, $\dot{\theta} = 0$, $r \sin \theta \dot{\varphi} = V + r\Omega \sin \theta = V + (R + h)\Omega \sin \theta = \text{const}$. L'intégrand de (C.12) est de nouveau indépendant de t et il vient

$$\Delta\tau_{\text{avion}} = \left[1 - \frac{GM}{c^2(R + h)} - \frac{[V + (R + h)\Omega \sin \theta]^2}{2c^2} \right] \Delta t. \quad (\text{C.14})$$

8 En faisant le rapport de (C.14) et (C.13), le terme Δt s'élimine et on obtient

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\tau_{\text{avion}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} &= \left[1 - \frac{GM}{c^2(R + h)} - \frac{[V + (R + h)\Omega \sin \theta]^2}{2c^2} \right] \times \left[1 - \frac{GM}{c^2R} - \frac{R^2\Omega^2 \sin^2 \theta}{2c^2} \right]^{-1} \\ &\simeq 1 - \frac{GM}{c^2(R + h)} - \frac{1}{2c^2} [V^2 + 2V(R + h)\Omega \sin \theta + (R + h)^2\Omega^2 \sin^2 \theta] \\ &\quad + \frac{GM}{c^2R} + \frac{1}{2c^2} R^2\Omega^2 \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

où l'on a effectué un développement limité pour obtenir la seconde ligne. Après simplification des termes en $R^2\Omega^2\sin^2\theta$, on aboutit à la formule demandée :

$$\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = \frac{GM}{c^2} \frac{h}{R(R+h)} - \frac{1}{2c^2} [V^2 + 2V(R+h)\Omega\sin\theta + h(2R+h)\Omega^2\sin^2\theta]. \quad (\text{C.16})$$

h étant l'altitude de l'avion et R le rayon de la Terre, on a toujours $h/R \ll 1$. En se limitant au premier ordre en h/R , la formule ci-dessus s'écrit alors

$$\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = \left[\frac{GM}{c^2 R} - \frac{R\Omega\sin\theta}{c^2} (R\Omega\sin\theta + V) \right] \frac{h}{R} - \frac{V}{c^2} \left(\frac{V}{2} + R\Omega\sin\theta \right). \quad (\text{C.17})$$

On peut simplifier le terme en facteur de h/R , en remarquant que

$$\frac{(R\Omega)^2}{c^2} \ll \frac{GM}{c^2 R} \quad \text{et} \quad \frac{VR\Omega}{c^2} \ll \frac{GM}{c^2 R}. \quad (\text{C.18})$$

En effet, $\Omega = 7.3 \times 10^{-5} \text{ rad s}^{-1}$, $R = 6.4 \times 10^6 \text{ m}$ et V ne dépasse pas $1000 \text{ km h}^{-1} = 277 \text{ m s}^{-1}$, si bien que

$$\frac{(R\Omega)^2}{c^2} = 2.4 \times 10^{-12} \quad \text{et} \quad \max\left(\frac{VR\Omega}{c^2}\right) = 1.4 \times 10^{-12}. \quad (\text{C.19})$$

Puisque $GM/c^2R = 7 \times 10^{-10} = \Xi_{\oplus}$ (facteur de compacité de la Terre), on en déduit que les inégalités (C.18) sont vérifiées. On peut donc réduire le terme en facteur de h/R dans (C.17) à $GM/(c^2R)$ et écrire

$$\boxed{\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = \frac{GM}{c^2 R} \frac{h}{R} - \frac{V}{c^2} \left(\frac{V}{2} + R\Omega\sin\theta \right)}. \quad (\text{C.20})$$

Le premier terme du membre de droite, $GM/(c^2R)h/R$, correspond à l'effet Einstein décrit au § 3.4.2. Il est toujours positif, ce qui implique que l'observateur dans l'avion vieillit plus vite que celui resté au sol, ce dernier étant plus profond dans le champ gravitationnel de la Terre. Le second terme du membre de droite de (C.20), $-V(V/2 + R\Omega\sin\theta)/c^2$, correspond à la dilatation des temps des corps en mouvement en relativité restreinte. Son interprétation n'est pas directe car ni l'avion ni la station au sol ne sont en mouvement inertiel : tous deux tournent par rapport à un référentiel inertiel. Le signe de ce terme dépend d'ailleurs du sens du mouvement de l'avion. Pour des vitesses d'avion typiques ($|V| < 1000 \text{ km h}^{-1}$) et un angle θ pas trop petit, on a en effet toujours $V/2 + R\Omega\sin\theta > 0$, de sorte que le signe du terme $-V(V/2 + R\Omega\sin\theta)/c^2$ est celui de $-V$, c'est-à-dire positif pour un vol vers l'ouest et négatif pour un vol vers l'est. On peut comprendre ce comportement si on se souvient que la dilatation des temps de la relativité restreinte signifie qu'un observateur en mouvement par rapport à un observateur inertiel vieillit moins vite que ce dernier, les géodésiques du genre temps empruntées par les observateurs inertiels étant les lignes d'univers qui *maximisent* le temps propre entre deux événements donnés (cf. § 2.6). On peut alors comparer la vitesse de l'avion \tilde{V}_{avion} mesurée par un observateur inertiel

(observateur de coordonnées (r, θ, φ) fixes) et la vitesse \tilde{V}_{sol} de la station au sol, mesurée par le même observateur. Pour un vol vers l'est, soit dans le même sens que la Terre, on a $|\tilde{V}_{\text{avion}}| > |\tilde{V}_{\text{sol}}|$, de sorte que la dilatation des temps est plus grande dans le cas de l'avion que dans celui de la station au sol. En omettant le terme gravitationnel discuté plus haut (effet Einstein), on a donc $\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}} < 0$, ce qui correspond effectivement au signe de $-V$. Au contraire, si le vol a lieu vers l'ouest, $|\tilde{V}_{\text{avion}}| < |\tilde{V}_{\text{sol}}|$ et $\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}} > 0$, du même signe que $-V$ dans ce cas.

9 Avec les valeurs données,

$$\frac{GM}{c^2 R} \frac{h}{R} = 9.8 \times 10^{-13}.$$

Par ailleurs, une latitude de 30° correspond à $\theta = 60^\circ$, et $|V| = 830 \text{ km h}^{-1} = 231 \text{ m s}^{-1}$, d'où

- pour le vol vers l'est : $V = +231 \text{ m s}^{-1}$: $-\frac{V}{c^2} \left(\frac{V}{2} + R\Omega \sin \theta \right) = -1.3 \times 10^{-12}$;
- pour le vol vers l'ouest : $V = -231 \text{ m s}^{-1}$: $-\frac{V}{c^2} \left(\frac{V}{2} + R\Omega \sin \theta \right) = 7.4 \times 10^{-13}$.

Ainsi

- pour le vol vers l'est : $\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = -3.5 \times 10^{-13}$;
- pour le vol vers l'ouest : $\frac{\Delta\tau_{\text{avion}} - \Delta\tau_{\text{sol}}}{\Delta\tau_{\text{sol}}} = 1.7 \times 10^{-12}$.

10 Pour estimer $\delta\tau_{\text{est}}$ et $\delta\tau_{\text{ouest}}$, il suffit de multiplier les valeurs relatives ci-dessus par la durée totale du vol. Cette dernière est approximativement la même pour le vol vers l'est que pour celui vers l'ouest et vaut

$$\Delta\tau_{\text{sol}} \simeq \Delta\tau_{\text{avion}} \simeq \frac{2\pi R \sin \theta}{|V|}. \quad (\text{C.21})$$

L'application numérique donne $\Delta\tau_{\text{sol}} = 1.5 \times 10^5 \text{ s} = 42 \text{ h}$. On en déduit

$$\delta\tau_{\text{est}} = -52 \text{ ns} \quad \text{et} \quad \delta\tau_{\text{ouest}} = 255 \text{ ns}. \quad (\text{C.22})$$

En comparant avec les données de l'énoncé, on en tire deux conclusions :

- les résultats ci-dessus, basés des trajectoires très simplifiées des avions, sont en bon accord avec les prédictions théoriques basées sur les trajectoires réelles, c'est-à-dire utilisant l'Eq. (C.12) plutôt que l'équation approchée (C.14) ;
- compte tenu des barres d'erreur, l'effet Einstein (relativité générale) ainsi que la dilatation des temps des corps en mouvement (relativité restreinte) sont pleinement confirmés par ces expériences.

C.6 Quadriaccélération et dérivée de Fermi-Walker

1 On a, par définition [cf. Eq. (2.85)],

$$u^\alpha = \frac{1}{c} \frac{dX^\alpha}{d\tau}. \quad (\text{C.23})$$

2 On a tout simplement

$$\nabla_{\alpha} \tilde{f} = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (\text{C.24})$$

On en déduit

$$\nabla_{\vec{u}} \tilde{f} = u^{\alpha} \nabla_{\alpha} \tilde{f} = \frac{1}{c} \frac{dX^{\alpha}}{d\tau} \frac{\partial \tilde{f}}{\partial x^{\alpha}}. \quad (\text{C.25})$$

Or en dérivant la relation $\tilde{f}(X^0(\tau), X^1(\tau), X^2(\tau), X^3(\tau)) = f(\tau)$ par rapport à τ , on obtient, à un facteur c près, le membre de droite de l'équation ci-dessus. D'où la relation

$$u^{\alpha} \nabla_{\alpha} \tilde{f} = \frac{1}{c} \frac{df}{d\tau}. \quad (\text{C.26})$$

3 On a

$$\vec{a} \cdot \vec{u} = \nabla_{\vec{u}} \vec{u} \cdot \vec{u} = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{u}} (\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{1}{2} \nabla_{\vec{u}} (-1) = 0. \quad (\text{C.27})$$

Le caractère unitaire de \vec{u} assure donc l'orthogonalité de \vec{a} et \vec{u} .

Remarque : \vec{u} étant un vecteur du genre temps, cela implique que \vec{a} est du genre espace.

Si \mathcal{L} est une géodésique de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$, alors la 4-vitesse est transportée parallèlement à elle-même le long de \mathcal{L} , autrement dit $\nabla_{\vec{u}} \vec{u} = 0$, c'est-à-dire $\vec{a} = 0$.

4 On a

$$a^{\alpha} = u^{\nu} \nabla_{\nu} u^{\alpha} = u^{\nu} \left(\frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} u^{\mu} \right), \quad (\text{C.28})$$

soit

$$a^{\alpha} = u^{\nu} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} u^{\mu} u^{\nu}. \quad (\text{C.29})$$

5 D'après les résultats (C.26) et (C.23),

$$u^{\nu} \frac{\partial u^{\alpha}}{\partial x^{\nu}} = \frac{1}{c} \frac{du^{\alpha}}{d\tau} = \frac{1}{c^2} \frac{d^2 X^{\alpha}}{d\tau^2}, \quad (\text{C.30})$$

si bien que (C.29) s'écrit

$$a^{\alpha} = \frac{1}{c^2} \left(\frac{d^2 X^{\alpha}}{d\tau^2} + \Gamma^{\alpha}_{\mu\nu} \frac{dX^{\mu}}{d\tau} \frac{dX^{\nu}}{d\tau} \right). \quad (\text{C.31})$$

En comparant avec l'équation des géodésiques paramétrées par le temps propre [Eq. (2.132)], on retrouve le résultat de la question 3 : $\vec{a} = 0$ ssi \mathcal{L} est une géodésique.

6 On a, par définition,

$$\mathbf{D}_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{u} = \underbrace{\nabla_{\vec{u}} \vec{u}}_{=\vec{a}} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{=-1} \vec{a} - \underbrace{(\vec{a} \cdot \vec{u})}_{=0} \vec{u} = 0. \quad (\text{C.32})$$

Soit \vec{v} un vecteur orthogonal à \vec{u} en tout point de \mathcal{L} . On a alors

$$\begin{aligned}
\vec{u} \cdot D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v} &= \vec{u} \cdot [\nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{u}] \\
&= \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{a}}_{=0} - (\vec{a} \cdot \vec{v}) \underbrace{\vec{u} \cdot \vec{u}}_{=-1} \\
&= \nabla_{\vec{u}} (\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=0}) - \vec{v} \cdot \underbrace{\nabla_{\vec{u}} \vec{u}}_{=\vec{a}} + \vec{a} \cdot \vec{v} \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.33}$$

La dérivée de Fermi-Walker de \vec{v} est donc orthogonale à \vec{u} si \vec{v} l'est. Par contre,

$$\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{v} = \nabla_{\vec{u}} (\underbrace{\vec{u} \cdot \vec{v}}_{=0}) - \vec{v} \cdot \underbrace{\nabla_{\vec{u}} \vec{u}}_{=\vec{a}} = -\vec{a} \cdot \vec{v}, \tag{C.34}$$

avec, dans le cas général, $\vec{a} \cdot \vec{v} \neq 0$ (\vec{a} et \vec{v} sont deux vecteurs dans l'hyperplan normal à \vec{u} ; ils n'ont a priori pas de raison d'être orthogonaux entre eux). La dérivée covariante $\nabla_{\vec{u}}$ ne préserve donc pas l'orthogonalité par rapport à la ligne d'univers, contrairement à la dérivée de Fermi-Walker.

7 On a, d'après (C.26),

$$\begin{aligned}
\frac{1}{c} \frac{d}{d\tau} (\vec{v} \cdot \vec{w}) &= \nabla_{\vec{u}} (\vec{v} \cdot \vec{w}) = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{w} \\
&= [\underbrace{D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v}}_{=0} - (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{u}] \cdot \vec{w} + \vec{v} \cdot [\underbrace{D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{w}}_{=0} - (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{a} + (\vec{a} \cdot \vec{w}) \vec{u}] \\
&= -(\vec{u} \cdot \vec{v}) (\vec{a} \cdot \vec{w}) + (\vec{a} \cdot \vec{v}) (\vec{u} \cdot \vec{w}) - (\vec{u} \cdot \vec{w}) (\vec{a} \cdot \vec{v}) + (\vec{a} \cdot \vec{w}) (\vec{u} \cdot \vec{v}) \\
&= 0.
\end{aligned} \tag{C.35}$$

Le produit scalaire $\vec{v} \cdot \vec{w}$ est donc constant le long de \mathcal{L} .

8 $\perp_{\vec{u}}$ est clairement un opérateur linéaire. Il vérifie de plus

$$\perp_{\vec{u}} (\vec{u}) = \vec{u} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{u}) \vec{u}}_{=-1} = 0, \tag{C.36}$$

et, pour tout vecteur \vec{v} orthogonal à \vec{u} ,

$$\perp_{\vec{u}} (\vec{v}) = \vec{v} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u}}_{=0} = \vec{v}. \tag{C.37}$$

L'opérateur linéaire $\perp_{\vec{u}}$ se réduit donc à l'identité dans l'hyperplan normal à \vec{u} et s'annule dans la direction de \vec{u} . Ces deux propriétés montrent qu'il s'agit du projecteur orthogonal sur l'hyperplan normal à \vec{u} (espace local de repos de l'observateur \mathcal{O}). On a, pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\perp_{\vec{u}} (\vec{v}) = \vec{v} + (\vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} = v^\alpha \vec{\partial}_\alpha + (u_\beta v^\beta) u^\alpha \vec{\partial}_\alpha = (\delta^\alpha_\beta + u^\alpha u_\beta) v^\beta \vec{\partial}_\alpha, \tag{C.38}$$

d'où

$$\perp^\alpha{}_\beta = \delta^\alpha{}_\beta + u^\alpha u_\beta. \quad (\text{C.39})$$

9 On a, pour tout vecteur \vec{v} orthogonal à \vec{u} ,

$$\begin{aligned} D_{\vec{u}}^{\text{FW}} \vec{v} &= \nabla_{\vec{u}} \vec{v} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{=0} \vec{a} - (\vec{a} \cdot \vec{v}) \vec{u} \\ &= \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - (\nabla_{\vec{u}} \vec{u} \cdot \vec{v}) \vec{u} = \nabla_{\vec{u}} \vec{v} - [\nabla_{\vec{u}} \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{v})}_{=0} - \vec{u} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{v}] \vec{u} \\ &= \perp_{\vec{u}} (\nabla_{\vec{u}} \vec{v}). \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

En particulier, on retrouve la propriété de préservation de l'orthogonalité à \vec{u} établie à la question 6.

C.7 Modèle d'étoile incompressible

1 Dans la matière froide, la vitesse du son est donnée par la formule (B.94) :

$$c_s = \sqrt{\frac{dp}{d\rho}}.$$

Dans le cas incompressible, ρ ne dépend pas de p , d'où $c_s^{-2} = dp/d\rho = 0$, ce qui conduit à une vitesse du son infinie. Ce n'est pas réaliste, car dans le cadre de la relativité, la vitesse du son ne doit pas dépasser la vitesse de la lumière.

2 Puisque $\rho(r) = \rho_0 = \text{const}$, il vient immédiatement $m(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3 + \text{const}$. On fixe la constante à zéro car il est nécessaire d'avoir $m(0) = 0$ pour que le coefficient métrique $\alpha(r)$ soit régulier au centre de l'étoile. On a donc $m(r) = 4\pi\rho_0 r^3/3$. En $r = R$, cette relation donne

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho_0 R^3. \quad (\text{C.41})$$

Pour $r > R$, $\rho = 0$ et donc $dm/dr = 0$. On en déduit $m(r) = M$ pour $r > R$. En exprimant ρ_0 en fonction de M et R via (C.41), on peut donc écrire

$$\begin{cases} m(r) = M \frac{r^3}{R^3} & \text{pour } 0 \leq r \leq R \\ m(r) = M & \text{pour } r > R \end{cases} \quad (\text{C.42})$$

3 Puisque nous faisons l'hypothèse de la symétrie sphérique, la métrique à l'extérieur de l'étoile est la métrique de Schwarzschild, en vertu du théorème de Birkhoff (cf. § 3.2.4). Les coordonnées que nous utilisons coïncidant avec les coordonnées de Schwarzschild à l'extérieur de l'étoile, on a donc

$$g_{00} = 1 - \frac{2GM}{c^2 r} \quad \text{et} \quad g_{rr} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1},$$

d'où, par définition de ν et α :

$$e^{\nu(r)} = \sqrt{1 - \frac{2GM}{c^2 r}} \quad \text{pour } r > R, \quad (\text{C.43})$$

$$e^{\alpha(r)} = \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1/2} \quad \text{pour } r > R. \quad (\text{C.44})$$

4 Puisque $\rho = \rho_0$, la troisième équation du système TOV se met sous la forme

$$\frac{1}{\rho_0 c^2 + p} \frac{dp}{dr} + \frac{d\nu}{dr} = 0.$$

Cette équation s'intègre immédiatement en $\ln(\rho_0 c^2 + p) + \nu = \text{const.}$ En prenant l'exponentielle, on obtient

$$[\rho_0 c^2 + p(r)] e^{\nu(r)} = \text{const.} \quad (\text{C.45})$$

À la surface de l'étoile, $p = 0$ car la pression externe est nulle (vide) et la pression est une fonction continue pour une configuration d'équilibre. Quant à ν , sa valeur à l'extérieur de l'étoile est donnée par (C.43). Comme la métrique est continue dans tout l'espace-temps \mathcal{E} , il en est de même de ν . On a donc, à la surface de l'étoile,

$$e^{\nu(R)} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}, \quad (\text{C.46})$$

où nous avons introduit le rayon de Schwarzschild de l'étoile, $R_S = 2GM/c^2$. Il s'agit du rayon aérotaire du trou noir qui aurait la même masse que l'étoile. Grâce à (C.46) et à $p(R) = 0$, on obtient la valeur de la constante dans (C.45) :

$$\text{const} = (\rho_0 c^2 + 0) \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} = \rho_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}},$$

d'où

$$[\rho_0 c^2 + p(r)] e^{\nu(r)} = \rho_0 c^2 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}. \quad (\text{C.47})$$

5 En reportant la valeur (C.42) de $m(r)$ obtenue à la question 1 dans la deuxième équation du système TOV, on obtient, pour $r \leq R$,

$$\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} = \left(1 - \frac{R_S r^2}{R^3}\right)^{-1} \left(\frac{R_S}{2R^3} + \frac{4\pi G}{c^4} p\right).$$

En remplaçant p par sa valeur tirée de (C.47) et en remarquant que

$$\frac{4\pi G}{c^2} \rho_0 = \frac{4\pi G}{c^2} \frac{M}{4/3 \pi R^3} = \frac{3 R_S}{2 R^3},$$

on obtient l'équation demandée :

$$\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} = \frac{R_S}{R^3} \left(1 - \frac{R_S r^2}{R^3}\right)^{-1} \left(\frac{3}{2} e^{-\nu} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - 1\right). \quad (\text{C.48})$$

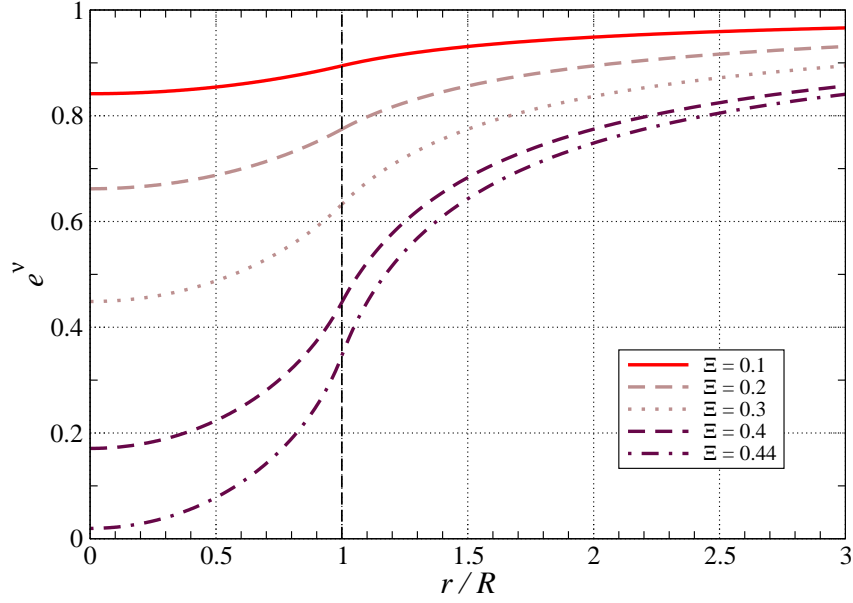


FIGURE C.6 – Coefficient métrique $e^\nu = \sqrt{-g_{00}}$ pour différentes valeurs du paramètre de compacité $\Xi = 1/2 R_S/R$.

Le changement de variable $x := \sqrt{1 - R_S r^2/R^3}$ se traduit par

$$\frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} = \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dx} \frac{dx}{dr} = -\frac{R_S}{R^3} \frac{1}{x} \frac{d\nu}{dx},$$

si bien que (C.48) devient

$$x e^\nu \frac{d\nu}{dx} = e^\nu - \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}.$$

En posant $N := e^\nu$, on obtient l'équation différentielle linéaire

$$x \frac{dN}{dx} - N = -\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}. \quad (\text{C.49})$$

Une solution particulière est la fonction constante $N = 3/2 \sqrt{1 - R_S/R}$. Par ailleurs, la solution générale de l'équation homogène $x dN/dx - N = 0$ est $N = \alpha x$, où α est une constante. On en déduit la forme de la solution générale de (C.49) :

$$N = \alpha x + \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}},$$

soit, en terme de r et ν :

$$e^\nu = \alpha \sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}} + \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}.$$

La valeur de α est déterminée en faisant $r = R$ dans l'expression ci-dessus et en comparant avec (C.46). Il vient immédiatement $\alpha = -1/2$, d'où

$$\boxed{e^{\nu(r)} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}}} \quad \text{pour } 0 \leq r \leq R. \quad (\text{C.50})$$

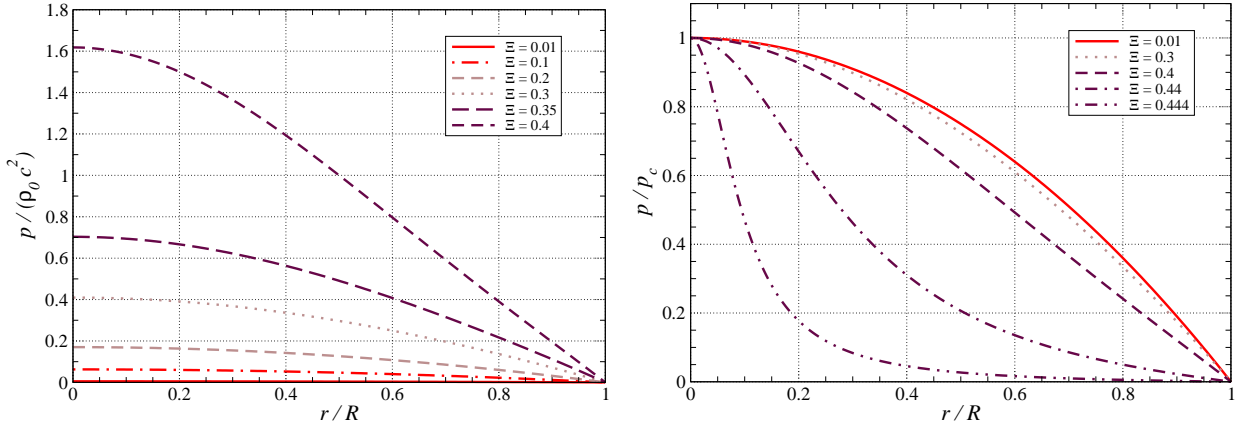


FIGURE C.7 – Profil de pression dans l'étoile. À gauche : valeur de la pression en unité de $\rho_0 c^2$; à droite : pression rapportée à la pression centrale.

Ce résultat vient en complément de (C.43), qui donne la valeur de $\nu(r)$ pour $r > R$. Le graphe de e^ν , obtenu en combinant les formules (C.43) et (C.50), est représenté sur la Fig. C.6. On constate que e^ν est bien continu, et même différentiable, à la surface de l'étoile.

6 On tire de (C.47) que

$$p = \rho_0 c^2 \left(e^{-\nu} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - 1 \right).$$

En reportant la valeur de e^ν donnée par (C.50), il vient

$$p = \rho_0 c^2 \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}{\frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}}} - 1 \right),$$

soit

$$p(r) = \rho_0 c^2 \frac{\sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}} - \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - \sqrt{1 - \frac{R_S r^2}{R^3}}}. \quad (\text{C.51})$$

Le numérateur s'annule pour $r = R$; on a donc bien $p(R) = 0$. Le profil de pression dans l'étoile donné par la formule ci-dessus est représenté sur la Fig. C.7.

En faisant $r = 0$ dans (C.51), il vient

$$p_c = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}{3 \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - 1}. \quad (\text{C.52})$$

Puisque $R_S/R = 2\Xi$, on peut réécrire cette formule comme

$$p_c = \rho_0 c^2 \frac{1 - \sqrt{1 - 2\Xi}}{3 \sqrt{1 - 2\Xi} - 1}. \quad (\text{C.53})$$

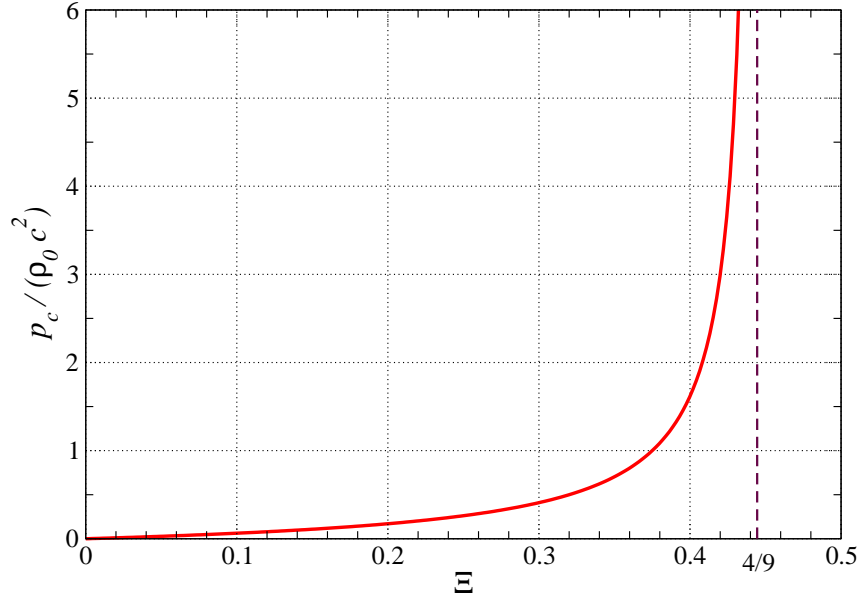


FIGURE C.8 – Pression centrale p_c en fonction du paramètre de compacité Ξ de l'étoile.

Le graphe de cette fonction est dessiné sur la Fig. C.8. Il présente une asymptote verticale. Cette dernière est due à l'annulation du dénominateur de (C.53), qui se produit pour

$$\Xi = \Xi_{\max} := \frac{4}{9}. \quad (\text{C.54})$$

On a donc $p_c \rightarrow +\infty$ lorsque $\Xi \rightarrow 4/9$. Par conséquent, une étoile statique constituée d'un fluide incompressible ne peut avoir un rapport R_S/R plus grand que $2 \times 4/9 = 8/9$.

Remarque : Cette limite est en fait générale : ainsi que l'a démontré Hans A. Buchdahl en 1959 [44], tous les modèles d'étoiles sphériques statiques, compressibles ou pas, doivent vérifier $R_S/R < 8/9$. Autrement dit, on ne peut pas approcher un trou noir par une séquence de configurations d'équilibres hydrostatiques telle que $R_S/R \rightarrow 1$.

La Fig. C.8 montre également que $p_c \in [0, +\infty[$ et $\Xi \in [0, 4/9[$ sont en correspondance univoque. Ainsi, pour ρ_0 fixé, une configuration d'équilibre est entièrement déterminée par la donnée de p_c ou bien de Ξ .

En extrayant R de (C.41), on peut écrire

$$\Xi = \frac{GM}{c^2 R} = \frac{GM}{c^2} \left(\frac{4\pi\rho_0}{3M} \right)^{1/3} = \frac{G}{c^2} \left(\frac{4\pi\rho_0 M^2}{3} \right)^{1/3},$$

d'où l'expression de la masse de l'étoile en fonction de ρ_0 et du paramètre de compacité :

$$M = \left(\frac{c^2}{G} \Xi \right)^{3/2} \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0}}.$$

À ρ_0 fixé, M est une fonction croissante de Ξ . Sa valeur maximale est donc atteinte pour

$\Xi_{\max} = 4/9$:

$$\boxed{M_{\max} = \left(\frac{2c}{3\sqrt{G}}\right)^3 \sqrt{\frac{3}{4\pi\rho_0}}}. \quad (\text{C.55})$$

L'application numérique conduit à

$$M_{\max} = 8.0 \left(\frac{\rho_{\text{nuc}}}{\rho_0}\right)^{1/2} M_{\odot}. \quad (\text{C.56})$$

Cette valeur est de l'ordre de grandeur (à un facteur 2 ou 3 près) de la masse maximale des étoiles à neutrons.

7 On a $g_{00} = -(e^\nu)^2$, avec d'après (C.50), au centre de l'étoile,

$$e^{\nu(0)} = \frac{3}{2} \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} (3\sqrt{1 - 2\Xi} - 1).$$

Lorsque Ξ tend vers sa valeur maximale, $4/9$, on obtient $e^{\nu(0)} \rightarrow 0$, d'où

$$g_{00} \rightarrow 0 \quad \text{lorsque} \quad \Xi \rightarrow \frac{4}{9}. \quad (\text{C.57})$$

C'est effectivement le comportement observé sur la Fig. C.6.

8 D'après la formule (3.61), le décalage spectral est

$$z = \frac{1}{\sqrt{1 - 2\Xi}} - 1. \quad (\text{C.58})$$

Sa valeur maximale est atteinte pour $\Xi = \Xi_{\max} = 4/9$: $z_{\max} = 1/\sqrt{1 - 8/9} - 1 = \sqrt{9} - 1$, soit

$$\boxed{z_{\max} = 2}. \quad (\text{C.59})$$

C.8 Vitesse du son relativiste

1 En utilisant la règle de Leibniz, il vient

$$\begin{aligned} \nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} &= \nabla_{\beta} [(\varepsilon + p) u^{\alpha} u^{\beta} + p g^{\alpha\beta}] \\ &= \nabla_{\beta} (\varepsilon + p) u^{\alpha} u^{\beta} + (\varepsilon + p) \underbrace{(\nabla_{\beta} u^{\alpha} u^{\beta} + u^{\alpha} \nabla_{\beta} u^{\beta})}_{a^{\alpha}} + \underbrace{g^{\alpha\beta} \nabla_{\beta} p}_{\nabla^{\alpha} p} + p \underbrace{\nabla_{\beta} g^{\alpha\beta}}_0. \end{aligned}$$

L'équation $\nabla_{\beta} T^{\alpha\beta} = 0$ s'écrit donc

$$\boxed{[u^{\beta} \nabla_{\beta} (\varepsilon + p) + (\varepsilon + p) \nabla_{\beta} u^{\beta}] u^{\alpha} + (\varepsilon + p) a^{\alpha} + \nabla^{\alpha} p = 0}. \quad (\text{C.60})$$

2 L'orthogonalité de \vec{u} et \vec{a} résulte de la normalisation de la 4-vitesse. En effet

$$u_{\alpha} a^{\alpha} = u_{\alpha} u^{\beta} \nabla_{\beta} u^{\alpha} = u^{\beta} [\nabla_{\beta} (\underbrace{u_{\alpha} u^{\alpha}}_{-1}) - u^{\alpha} \nabla_{\beta} u_{\alpha}] = -u^{\alpha} \underbrace{u^{\beta} \nabla_{\beta} u_{\alpha}}_{a_{\alpha}} = -u_{\alpha} a^{\alpha},$$

d'où $2u_\alpha a^\alpha = 0$, c'est-à-dire $u_\alpha a^\alpha = 0$.

La projection de l'équation de conservation de l'énergie-impulsion sur \vec{u} revient à contracter la relation (C.60) avec u_α . On obtient ainsi

$$[u^\beta \nabla_\beta (\varepsilon + p) + (\varepsilon + p) \nabla_\beta u^\beta] \underbrace{u_\alpha u^\alpha}_{-1} + (\varepsilon + p) \underbrace{u_\alpha a^\alpha}_0 + \underbrace{u_\alpha \nabla^\alpha p}_{u^\beta \nabla_\beta p} = 0,$$

soit

$$\boxed{u^\beta \nabla_\beta \varepsilon + (\varepsilon + p) \nabla_\beta u^\beta = 0}. \quad (\text{C.61})$$

On peut voir cette relation comme l'équation de conservation de l'énergie pour un fluide parfait.

3 L'équation (C.61) permet de simplifier le terme entre crochets dans l'Eq. (C.60). Cette dernière se réduit alors à

$$\boxed{(\varepsilon + p) a^\alpha = -\nabla^\alpha p - (u^\beta \nabla_\beta p) u^\alpha}. \quad (\text{C.62})$$

Il s'agit de la version relativiste de l'équation d'Euler qui gouverne la dynamique d'un fluide parfait.

Remarque : L'équation de conservation de l'énergie-impulsion (C.60), qui est une équation vectorielle, a quatre composantes indépendantes (repérées par l'indice α). Nous l'avons transformée ci-dessus en deux équations : l'une scalaire [Eq. (C.61)] et l'autre vectorielle [Eq. (C.62)], soit un total de cinq composantes. Cependant l'Eq. (C.62) n'a que trois composantes indépendantes, car elle est clairement orthogonale à \vec{u} : $u_\alpha a^\alpha = 0$ (cf. question 2) et $u_\alpha [\nabla^\alpha p + (u^\beta \nabla_\beta p) u^\alpha] = 0$ en raison de $u_\alpha u^\alpha = -1$. Ainsi le système (C.61)-(C.62) n'a que quatre composantes indépendantes, tout comme l'équation de départ (C.60).

4 On a

$$a^\alpha = u^\beta \nabla_\beta u^\alpha = (u_0^\beta + \delta u^\beta) \nabla_\beta (u_0^\alpha + \delta u^\alpha) = u_0^\beta \underbrace{\nabla_\beta u_0^\alpha}_0 + u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha + \delta u^\beta \underbrace{\nabla_\beta u_0^\alpha}_0 + \delta u^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha,$$

où les annulations résultent du caractère constant de \vec{u}_0 . En remarquant que le dernier terme est du second ordre en $\delta \vec{u}$, on en conclut qu'au premier ordre

$$a^\alpha \simeq u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha. \quad (\text{C.63})$$

L'Eq. (C.61) s'écrit

$$(u_0^\beta + \delta u^\beta) \nabla_\beta (\varepsilon_0 + \delta \varepsilon) + (\varepsilon_0 + \delta \varepsilon + p_0 + \delta p) \nabla_\beta (u_0^\beta + \delta u^\beta) = 0.$$

En utilisant $\nabla_\beta \varepsilon_0 = 0$, $\nabla_\beta u_0^\beta = 0$, et en développant au premier ordre dans les perturbations, il vient

$$\boxed{u_0^\beta \nabla_\beta \delta \varepsilon + (\varepsilon_0 + p_0) \nabla_\beta \delta u^\beta = 0}. \quad (\text{C.64})$$

De même, compte tenu de (C.63), l'équation d'Euler relativiste (C.62) s'écrit

$$(\varepsilon_0 + \delta\varepsilon + p_0 + \delta p)u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha = -\nabla^\alpha(p_0 + \delta p) - [(u_0^\beta + \delta u^\beta)\nabla_\beta(p_0 + \delta p)](u_0^\alpha + \delta u^\alpha).$$

En utilisant $\nabla_\beta p_0 = 0$ et en développant au premier ordre, il vient

$$\boxed{(\varepsilon_0 + p_0)u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha = -\nabla^\alpha \delta p - (u_0^\beta \nabla_\beta \delta p)u_0^\alpha}. \quad (\text{C.65})$$

5 Puisque δp et $\delta\varepsilon$ sont des quantités infinitésimales et que p est une fonction de ε suivant l'équation d'état $p = p(\varepsilon)$, on a

$$\delta p = \frac{dp}{d\varepsilon} \delta\varepsilon.$$

Comme on se place autour de ε_0 , on peut donc écrire, en utilisant la notation introduite dans l'énoncé,

$$\delta p = p'_0 \delta\varepsilon. \quad (\text{C.66})$$

En reportant cette relation dans l'équation d'Euler linéarisée (C.65), il vient

$$\boxed{(\varepsilon_0 + p_0)u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha = -p'_0 \left[\nabla^\alpha \delta\varepsilon + (u_0^\beta \nabla_\beta \delta\varepsilon)u_0^\alpha \right]}, \quad (\text{C.67})$$

où l'on a utilisé le fait que p'_0 est constant sur \mathcal{E} , puisque ε_0 l'est.

6 La dérivée de (C.64) le long de \vec{u}_0 s'écrit

$$u_0^\alpha \nabla_\alpha \left[u_0^\beta \nabla_\beta \delta\varepsilon + (\varepsilon_0 + p_0) \nabla_\beta \delta u^\beta \right] = 0.$$

En développant et en utilisant $\nabla_\alpha \varepsilon_0 = 0$ et $\nabla_\alpha p_0 = 0$, il vient

$$u_0^\alpha u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta\varepsilon + (\varepsilon_0 + p_0) u_0^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta u^\beta = 0. \quad (\text{C.68})$$

Par ailleurs, la divergence de (C.67) s'écrit

$$\nabla_\alpha \left[(\varepsilon_0 + p_0) u_0^\beta \nabla_\beta \delta u^\alpha \right] = -\nabla_\alpha \left\{ p'_0 \left[\nabla^\alpha \delta\varepsilon + (u_0^\beta \nabla_\beta \delta\varepsilon)u_0^\alpha \right] \right\}.$$

En développant et en utilisant $\nabla_\alpha \varepsilon_0 = 0$, $\nabla_\alpha p_0 = 0$, $\nabla_\alpha p'_0 = 0$ et $\nabla_\alpha u_0^\beta = 0$, il vient

$$(\varepsilon_0 + p_0) u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta u^\alpha = -p'_0 \left(\nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta\varepsilon + u_0^\alpha u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta\varepsilon \right),$$

soit en changeant les indices muets dans le membre de gauche,

$$(\varepsilon_0 + p_0) u_0^\alpha \nabla_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta = -p'_0 \left(\nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta\varepsilon + u_0^\alpha u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta\varepsilon \right). \quad (\text{C.69})$$

En comparant le membre de gauche avec le terme qui contient le facteur $(\varepsilon_0 + p_0)$ dans (C.68), on constate qu'il s'agit du même terme, à une permutation des dérivées covariantes

de $\delta\vec{u}$ près. Or, puisqu'on se place en espace plat (espace-temps de Minkowski), les dérivées covariantes commutent :

$$\nabla_\beta \nabla_\alpha \delta u^\beta = \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta u^\beta.$$

On peut donc utiliser (C.69) pour remplacer le terme $(\varepsilon_0 + p_0) u_0^\alpha \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta u^\beta$ dans (C.68) et obtenir ainsi une équation qui ne contient que la perturbation $\delta\varepsilon$:

$$(1 - p'_0) u_0^\alpha u_0^\beta \nabla_\alpha \nabla_\beta \delta\varepsilon - p'_0 \nabla_\alpha \nabla^\alpha \delta\varepsilon = 0. \quad (\text{C.70})$$

7 Le champ de 4-vitesse \vec{u}_0 étant constant sur $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ et ce dernier étant l'espace-temps de Minkowski, on peut trouver un observateur inertiel dont la 4-vitesse est \vec{u}_0 . Les coordonnées $(x^\alpha) = (ct, x, y, z)$ associées à cet observateur sont alors telles que $g_{\alpha\beta} = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$, ce qui conduit à des symboles de Christoffel identiquement nuls et donc à $\nabla_\alpha = \partial/\partial x^\alpha$. En particulier, puisque $u_0^\alpha = (1, 0, 0, 0)$ dans ces coordonnées,

$$u_0^\alpha \nabla_\alpha = u_0^\alpha \frac{\partial}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^0} = \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t}.$$

Par ailleurs, dans ces mêmes coordonnées,

$$\square = \nabla_\alpha \nabla^\alpha = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \Delta.$$

L'Eq. (C.70) devient donc

$$(1 - p'_0) \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\varepsilon}{\partial t^2} - p'_0 \left(-\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\varepsilon}{\partial t^2} + \Delta \delta\varepsilon \right) = 0,$$

soit après simplification,

$$\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \delta\varepsilon}{\partial t^2} - p'_0 \Delta \delta\varepsilon = 0. \quad (\text{C.71})$$

En introduisant $c_s := c\sqrt{p'_0}$, on peut réécrire cette équation comme

$$\boxed{\frac{1}{c_s^2} \frac{\partial^2 \delta\varepsilon}{\partial t^2} - \Delta \delta\varepsilon = 0}. \quad (\text{C.72})$$

On reconnaît là une équation d'onde pour la quantité $\delta\varepsilon$, avec c_s comme vitesse de propagation.

La perturbation de pression δp se propage également à la vitesse c_s car δp et $\delta\varepsilon$ sont liés par (C.66) avec p'_0 constant.

La densité d'énergie propre du fluide s'exprime comme

$$\varepsilon = \rho_* c^2 + \varepsilon_{\text{int}}, \quad (\text{C.73})$$

où $\rho_* c^2$ est la densité d'énergie de masse au repos et ε_{int} la densité d'énergie interne du fluide. À la limite non-relativiste, ρ_* est la densité de masse du fluide et $\rho_* c^2 \gg \varepsilon_{\text{int}}$, si bien que l'on peut écrire $\varepsilon \simeq \rho_* c^2$ et

$$c_s \simeq \sqrt{\frac{dp}{d\rho_*}}. \quad (\text{C.74})$$

On reconnaît l'expression classique de la vitesse du son, dans le cas d'une équation d'état barotrope : $p = p(\rho_*)$. Dans le cas général, il faut prendre la dérivée de p par rapport à ρ_* à entropie spécifique constante.

C.9 Photon émis par une étoile

1 Il s'agit de la *métrique de Schwarzschild*. L'étoile étant supposée à symétrie sphérique, c'est la seule solution possible, en vertu du théorème de Birkhoff (cf. § 3.2.4).

2 L'équation (B.97) signifie que le vecteur \vec{p} est du genre lumière. Comme \vec{p} est tangent à la ligne d'univers du photon, il en découle que cette dernière est une géodésique lumière. L'équation (B.98) signifie que \vec{p} est transporté parallèlement à lui-même le long de la géodésique lumière et exprime la conservation de la 4-impulsion du photon. En terme des composantes, les Éqs. (B.97)-(B.98) s'écrivent respectivement

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 \quad \text{et} \quad p^\mu \nabla_\mu p^\alpha = 0.$$

3 Puisque l'espace-temps à l'extérieur de l'étoile est statique et à symétrie sphérique (métrique de Schwarzschild), p^0 et p^r ne peuvent dépendre que de r . À l'aide des composantes $g_{\alpha\beta}$ lues sur (B.95), la condition (B.97) s'écrit, puisque $p^\theta = 0$ et $p^\varphi = 0$,

$$g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0 = -N^2(p^0)^2 + N^{-2}(p^r)^2.$$

Comme p^r doit être positif (le photon est émis par l'étoile), ainsi que p^0 (la 4-impulsion du photon est orientée vers le futur), on en déduit

$$p^r = N^2 p^0.$$

4 La condition (B.98) s'écrit successivement :

$$\begin{aligned} p^\mu \nabla_\mu p^\alpha &= 0, \\ p^\mu \left(\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} p^\nu \right) &= 0, \\ p^\mu \underbrace{\frac{\partial p^\alpha}{\partial x^\mu}}_{\delta^r_\mu dp^\alpha/dr} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= 0, \\ p^r \frac{dp^\alpha}{dr} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} p^\mu p^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Comme seuls p^0 et p^r sont non nuls, on en déduit

$$p^r \frac{dp^\alpha}{dr} + \Gamma^\alpha_{00}(p^0)^2 + 2\Gamma^\alpha_{0r}p^0 p^r + \Gamma^\alpha_{rr}(p^r)^2 = 0.$$

En utilisant la relation $p^r = N^2 p^0$ obtenue à la question 3 et en divisant par $(p^0)^2$, on obtient l'équation demandée.

La composante $\alpha = 0$ de (B.100) s'écrit, en vertu de (B.101),

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{p^0} \frac{dp^0}{dr} + \underbrace{\Gamma^0_{00}}_0 + 2 \underbrace{\Gamma^0_{0r}}_{N'/N} N^2 + \underbrace{\Gamma^0_{rr}}_0 N^4 &= 0, \\ \implies \frac{N^2}{p^0} \frac{dp^0}{dr} + 2N \frac{dN}{dr} &= 0, \\ \implies \frac{d}{dr} (N^2 p^0) &= 0. \end{aligned}$$

On en déduit que $N^2 p^0$ est constant, d'où l'équation (B.102).

De même, la composante $\alpha = 1$ de (B.100) s'écrit, en vertu de $p^r = N^2 p^0$ et de (B.101),

$$\begin{aligned} \frac{N^2}{p^0} \frac{d}{dr} (N^2 p^0) + \underbrace{\Gamma^r_{00}}_{N^3 N'} + 2 \underbrace{\Gamma^r_{0r}}_0 N^2 + \underbrace{\Gamma^r_{rr}}_{-N'/N} N^4 &= 0, \\ \implies \frac{d}{dr} (N^2 p^0) &= 0. \end{aligned}$$

On retrouve donc le résultat (B.102).

La 4-impulsion ayant la dimension d'une quantité de mouvement, la dimension de ε est celle d'une énergie.

Puisque $p^\theta = 0$ et $p^\varphi = 0$, et compte tenu des symboles de Christoffel donnés par (B.101), les composantes $\alpha = 2$ et $\alpha = 3$ de (B.100) se réduisent à $0 = 0$.

En reportant la relation $p^r = N^2 p^0$ ainsi que (B.102) dans (B.99), il vient

$$\vec{p} = p^0 \left(\vec{\partial}_0 + N^2 \vec{\partial}_r \right) = \frac{\varepsilon}{c N^2} \left(\vec{\partial}_0 + N^2 \vec{\partial}_r \right),$$

soit

$$\vec{p} = \frac{\varepsilon}{c} \left(\frac{1}{N^2} \vec{\partial}_0 + \vec{\partial}_r \right).$$

5 Les coefficients de la métrique (B.95) étant indépendants de la coordonnée $x^0 = ct$, $\vec{\xi}_{(0)}$ est un vecteur de Killing de l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. On a

$$\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} = g_{\mu\nu} \xi_{(0)}^\mu p^\nu = g_{\mu\nu} \underbrace{(\partial_0)^\mu}_{\delta^0_\mu} p^\nu = g_{0\nu} p^\nu.$$

En vertu des coefficients métriques (B.95) et de (B.102), il vient

$$\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p} = -N^2 p^0 = -\frac{\varepsilon}{c}.$$

Puisque ε est une constante, il est clair que $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}$ est constant le long de la ligne d'univers du photon. Ce résultat n'est pas surprenant car il s'agit d'un cas particulier du théorème qui stipule que *le long de toute géodésique, le produit scalaire de la 4-impulsion avec un vecteur de Killing est constant* (cf. § 3.4.1).

6 Par hypothèse, $\vec{u}_0 = \alpha \vec{\xi}_{(0)}$ avec $\alpha > 0$. La condition de normalisation de la 4-vitesse permet de déterminer α :

$$\vec{u}_0 \cdot \vec{u}_0 = -1 = \alpha^2 \vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{\xi}_{(0)}.$$

Comme $\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_0 \cdot \vec{\partial}_0 = g_{00} = -N^2$, on en déduit $\alpha = N^{-1}$, d'où

$$\vec{u}_0 = \frac{1}{N} \vec{\xi}_{(0)}.$$

L'énergie du photon mesurée par \mathcal{O} s'obtient à partir de la 4-impulsion \vec{p} suivant

$$E = -\vec{u}_0 \cdot \vec{p}c.$$

En reportant l'expression de \vec{u}_0 ci-dessus, ainsi que celle de \vec{p} obtenue à la question 4, il vient

$$E = -\frac{1}{N} \frac{\varepsilon}{c} \vec{\partial}_0 \cdot \left(\frac{1}{N^2} \vec{\partial}_0 + \vec{\partial}_r \right) c = -\frac{\varepsilon}{N} \left(\frac{1}{N^2} \underbrace{\vec{\partial}_0 \cdot \vec{\partial}_0}_{g_{00}} + \underbrace{\vec{\partial}_0 \cdot \vec{\partial}_r}_{g_{0r}} \right).$$

Or d'après (B.95), $g_{00} = -N^2$ et $g_{0r} = 0$, d'où $E = \varepsilon/N$, soit

$$E = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{r}}}.$$

Lorsque $r \rightarrow +\infty$, on obtient $E = \varepsilon$. La constante ε s'interprète donc comme l'énergie du photon mesurée par un observateur statique situé à l'infini : $\varepsilon = E_\infty$.

À l'émission, l'énergie mesurée par un observateur statique est

$$E_{\text{em}} = \frac{\varepsilon}{\sqrt{1 - \frac{R_S}{R}}}.$$

On en déduit

$$\frac{E_\infty - E_{\text{em}}}{E_{\text{em}}} = \sqrt{1 - \frac{R_S}{R}} - 1.$$

Cette formule correspond au décalage spectral gravitationnel, encore appelé *effet Einstein*. On constate que $E_\infty < E_{\text{em}}$: pour l'observateur à l'infini, le décalage est vers le rouge.

C.10 Pression de radiation et effet Poynting-Robertson

1 On a

$$T = g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta} = q g^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = q g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = q \vec{k} \cdot \vec{k}.$$

Puisque \vec{k} est du genre lumière [propriété (B.104)], on en déduit que le tenseur énergie-impulsion du rayonnement électromagnétique est de trace nulle :

$$T = 0.$$

2 On a successivement

$$\begin{aligned}
& \nabla^\mu T_{\alpha\mu} = 0 \\
\iff & \nabla^\mu (q k_\alpha k_\mu) = 0 \\
\iff & \nabla_\mu (q k_\alpha k^\mu) = 0 \\
\iff & \nabla_\mu (q k^\mu) k_\alpha + q k^\mu \nabla_\mu k_\alpha = 0 \\
\iff & \nabla_\mu (q k^\mu) k_\alpha + q g_{\alpha\nu} \underbrace{k^\mu \nabla_\mu k^\nu}_0 = 0 \\
\iff & \nabla_\mu (q k^\mu) k_\alpha = 0 \\
\iff & \nabla_\mu (q k^\mu) = 0,
\end{aligned}$$

où l'on a écrit $k^\mu \nabla_\mu k^\nu = 0$ en vertu de la deuxième des propriétés (B.104).

Au vu des composantes $g_{\alpha\beta}$ données par (B.95), on a

$$g = \det(g_{\alpha\beta}) = (-N^2) \times (N^{-2}) \times r^2 \times r^2 \sin^2 \theta = -r^4 \sin^2 \theta,$$

et donc

$$\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta,$$

d'où

$$\begin{aligned}
\nabla_\mu (q k^\mu) = 0 & \iff \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\sqrt{-g} q k^\mu) = 0 \\
\iff & \frac{\partial}{\partial x^0} (r^2 \sin \theta q k^0) + \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \sin \theta q k^r) = 0 \iff \frac{d}{dr} (r^2 q k^r) = 0.
\end{aligned}$$

Comme d'après (B.106), $k^r = 1$, on obtient $d(r^2 q)/dr = 0$. D'où le résultat :

$$q = \frac{A}{r^2}, \quad \text{avec } A = \text{const.}$$

3 D'après la métrique (B.95), le vecteur $\vec{\partial}_r$ est à la fois normal aux hypersurfaces $t = \text{const}$ (qui constituent localement l'espace de repos de \mathcal{O}) et normal à la surface \mathcal{S} . On a donc nécessairement $\vec{n} = \alpha \vec{\partial}_r$ avec $\alpha > 0$. Le coefficient α est déterminé via la relation de normalisation de \vec{n} :

$$\vec{n} \cdot \vec{n} = 1 = \alpha^2 \underbrace{\vec{\partial}_r \cdot \vec{\partial}_r}_{g_{rr}} = \alpha^2 N^{-2} \implies \alpha = N.$$

La sphère \mathcal{S} est définie par $t = \text{const}$, $r = \text{const}$ et est couverte par les coordonnées (θ, φ) , de sorte que la métrique induite sur \mathcal{S} s'obtient en faisant $dt = 0$ et $dr = 0$ dans (B.95) :

$$ds|_{\mathcal{S}}^2 = r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

On en déduit que l'élément de surface sur \mathcal{S} prend la forme habituelle, sans terme « relativiste »¹ :

$$dS = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

L'Éq. (B.112) de l'énoncé devient donc, en utilisant la forme (B.103) de \mathbf{T} , ainsi que l'expression de (B.110) de q ,

$$L = -c \int_{\mathcal{S}} \frac{A}{r^2} (\vec{k} \cdot \vec{u}_0) (\vec{k} \cdot \vec{n}) r^2 \sin \theta d\theta d\varphi.$$

Or

$$\vec{k} \cdot \vec{u}_0 = g_{\mu\nu} k^\mu u_0^\nu = (-N^2) \underbrace{k^0}_{N^{-2}} \underbrace{u_0^0}_{N^{-1}} + N^{-2} \underbrace{k^r}_1 \underbrace{u_0^r}_0 = -\frac{1}{N},$$

où les composantes de \vec{u}_0 se déduisent de la relation $\vec{u}_0 = N^{-1} \vec{\partial}_0$ établie à la question 6 du problème B.9. Par ailleurs

$$\vec{k} \cdot \vec{n} = g_{\mu\nu} k^\mu n^\nu = (-N^2) \underbrace{k^0}_{N^{-2}} \underbrace{n^0}_0 + N^{-2} \underbrace{k^r}_1 \underbrace{n^r}_N = \frac{1}{N}.$$

On a donc, en tenant compte de $N = N(r)$,

$$L = c \int_{\mathcal{S}} \frac{A}{N^2} \sin \theta d\theta d\varphi = \frac{cA}{N^2} \underbrace{\int_{\mathcal{S}} \sin \theta d\theta d\varphi}_{4\pi} = \frac{4\pi cA}{N^2}.$$

Cela établit la relation demandée : $L = L_0/N^2$ avec $L_0 := 4\pi cA$.

Lorsque $r \rightarrow +\infty$, $N \rightarrow 1$ et $L \rightarrow L_0$. L_0 s'interprète donc comme la luminosité de l'étoile mesurée par un observateur statique à l'infini. Pour le Soleil, $L_0 \simeq 4 \times 10^{26}$ W.

4 La 4-force \vec{f} ne contient pas de terme d'origine gravitationnelle car un corps uniquement soumis à la gravitation suit une géodésique de l'espace-temps et, pour ces dernières, la 4-vitesse est transportée parallèlement à elle-même (cf. § 4.2.4), de sorte que $\vec{a} = 0$ et donc $\vec{f} = 0$.

On a

$$a^\alpha = u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = u^\mu \left(\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\nu \right) = u^\mu \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

Or, par définition même de la 4-vitesse,

$$u^\mu \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau}.$$

On en déduit donc

$$a^\alpha = \frac{1}{c} \frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

1. C'est en fait une propriété des coordonnées choisies, à savoir les coordonnées de Schwarzschild (ct, r, θ, φ) , pour lesquelles r est le *rayon aréolaire* : il est relié à l'aire A des sphères $r = \text{const}$ par la formule $A = 4\pi r^2$.

En comparant avec l'Eq. (4.49) du cours, on retrouve le fait que $a^\alpha = 0$ si le corps suit une géodésique.

En appliquant la formule ci-dessus pour $\alpha = 1$, il vient, compte tenu des symboles de Christoffel (B.101) et du fait que $u^\theta = c^{-1}d\theta/d\tau = 0$ (trajectoire confinée dans le plan équatorial),

$$a^r = \frac{1}{c} \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma^r_{00}(u^0)^2 + \Gamma^r_{rr}(u^r)^2 + \Gamma^r_{\varphi\varphi}(u^\varphi)^2 = \frac{1}{c} \frac{du^r}{d\tau} + N^3 N'(u^0)^2 - \frac{N'}{N}(u^r)^2 - r N^2 (u^\varphi)^2.$$

Or, pour $\theta = \pi/2$,

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = -1 \iff (-N^2)(u^0)^2 + \frac{1}{N^2}(u^r)^2 + r^2(u^\varphi)^2 = -1,$$

d'où

$$N^2(u^0)^2 = 1 + \frac{(u^r)^2}{N^2} + r^2(u^\varphi)^2.$$

L'expression ci-dessus pour a^r se simplifie alors en

$$a^r = \frac{1}{c} \frac{du^r}{d\tau} + N'N + r(u^\varphi)^2 N(rN' - N).$$

On déduit de l'expression (B.96) de N que

$$N'N = \frac{R_S}{2r^2} = \frac{GM}{c^2 r^2} \quad \text{et} \quad N(rN' - N) = \frac{3R_S}{2r} - 1 = \frac{3GM}{c^2 r} - 1.$$

Par conséquent,

$$a^r = \frac{1}{c} \frac{du^r}{d\tau} + \frac{GM}{c^2 r^2} + r(u^\varphi)^2 \left(\frac{3GM}{c^2 r} - 1 \right).$$

Par ailleurs, la composante $\alpha = 3$ de la formule (B.116) s'écrit, compte tenu des symboles de Christoffel (B.101) et de $u^\theta = 0$,

$$a^\varphi = \frac{1}{c} \frac{du^\varphi}{d\tau} + \Gamma^\varphi_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = \frac{1}{c} \frac{du^\varphi}{d\tau} + 2\Gamma^\varphi_{r\varphi} u^r u^\varphi,$$

soit

$$a^\varphi = \frac{1}{c} \frac{du^\varphi}{d\tau} + \frac{2}{r} u^r u^\varphi.$$

5 En reportant l'expression (B.105) de $T_{\mu\nu}$ dans (B.117), il vient

$$f^\alpha = -\frac{\sigma}{c^2} (g^{\alpha\mu} + u^\alpha u^\mu) q k_\mu k_\nu u^\nu = -\frac{\sigma q}{c^2} k_\nu u^\nu (g^{\alpha\mu} + u^\alpha u^\mu) k_\mu = -\frac{\sigma q}{c^2} k_\nu u^\nu (k^\alpha + k_\mu u^\mu u^\alpha),$$

ce que l'on peut écrire comme

$$\vec{f} = -\frac{\sigma q}{c^2} (\vec{k} \cdot \vec{u}) \left[\vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{u}) \vec{u} \right].$$

Puisque $q = A/r^2 = L_0/(4\pi c r^2)$, on obtient la formule (B.118).

On a, puisque $k^\mu = (N^{-2}, 1, 0, 0)$,

$$(\vec{k} \cdot \vec{u}) = g_{\mu\nu} k^\mu u^\nu = (-N^2)k^0 u^0 + N^{-2}k^r u^r = -u^0 + \frac{u^r}{N^2}.$$

Le fait que $\vec{f} \cdot \vec{u} = 0$ découle immédiatement de

$$\vec{u} \cdot \left[\vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{u}) \vec{u} \right] = \vec{u} \cdot \vec{k} + (\vec{k} \cdot \vec{u}) \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{u})}_{-1} = 0.$$

6 Si $u^r = 0$, on a $\vec{k} \cdot \vec{u} = -u^0$ et les composantes r et φ de la 4-force se réduisent à (on utilise $k^r = 1$ et $k^\varphi = 0$)

$$\begin{aligned} f^r &= \frac{L_0}{4\pi c^3} \frac{\sigma}{r^2} u^0, \\ f^\varphi &= -\frac{L_0}{4\pi c^3} \frac{\sigma}{r^2} (u^0)^2 u^\varphi. \end{aligned}$$

Compte tenu des expressions de a^r et a^φ obtenues à la question 4 (où l'on fait $u^r = 0$), la relation $ma^\alpha = f^\alpha$ conduit à

$$\begin{aligned} \frac{1}{c} \frac{du^r}{d\tau} + \frac{GM}{c^2 r^2} + r(u^\varphi)^2 \left(\frac{3GM}{c^2 r} - 1 \right) &= \frac{L_0}{4\pi c^3} \frac{\sigma}{mr^2} u^0 \\ \frac{1}{c} \frac{du^\varphi}{d\tau} &= -\frac{L_0}{4\pi c^3} \frac{\sigma}{mr^2} (u^0)^2 u^\varphi. \end{aligned}$$

Or l'expression de u^0 obtenue à la question 4 s'écrit, avec $u^r = 0$,

$$u^0 = \frac{1}{N} \sqrt{1 + (ru^\varphi)^2} = \sqrt{\frac{1 + (ru^\varphi)^2}{1 - R_S/r}}$$

En reportant cette relation dans les équations ci-dessus, on obtient (B.119)-(B.120).

Pour une orbite exactement circulaire, u^φ est constant, de sorte que $du^\varphi/d\tau = 0$. En effet, les solutions d'orbites circulaires dans la métrique de Schwarzschild sont obtenues pour $L_0\sigma = 0$ (pas de pression de radiation). Elles vérifient $u^r = 0$ et $du^r/d\tau = 0$ puisque r est constant sur une telle orbite. L'Éq. (B.119) avec $L_0\sigma = 0$ donne alors

$$cu^\varphi = \sqrt{\frac{GM}{r^3}} \left(1 - \frac{3R_S}{2r} \right)^{-1/2},$$

ce qui montre bien que u^φ est constant. L'Éq. (B.120) avec $L_0\sigma = 0$ est alors identiquement satisfaite. Si $L_0\sigma \neq 0$, l'Éq. (B.120) implique qu'il ne peut exister d'orbites circulaires.

L'étude détaillée de l'effet Poynting-Robertson en relativité générale a été effectuée récemment par Bini, Jantzen et Stella (2009) [42].

7 Le corps est immobile par rapport à un observateur statique \mathcal{O} si, et seulement si, sa 4-vitesse est égale à celle de \mathcal{O} : $\vec{u} = \vec{u}_0$. Puisque $\vec{u}_0 = N^{-1} \vec{\partial}_0$, on en déduit que dans ce cas $u^r = u^\theta = u^\varphi = 0$. L'Éq. (B.120) se réduit alors à $0 = 0$ et l'Éq. (B.119) donne

$$0 = -\frac{GM}{r^2} + \frac{L_0}{4\pi c} \frac{\sigma}{mr^2} \frac{1}{\sqrt{1 - R_S/r}}, \quad (\text{C.75})$$

c'est-à-dire

$$\sqrt{1 - R_S/r} = \frac{L_0}{4\pi c GM} \frac{\sigma}{m}.$$

On en déduit qu'il existe une position d'équilibre statique pour

$$r = r_{\text{crit}} = \frac{R_S}{1 - \left(\frac{L_0}{4\pi c GM} \frac{\sigma}{m}\right)^2}.$$

En termes « newtoniens », on peut dire que sur la sphère $r = r_{\text{crit}}$, la force de pression de radiation compense exactement la force gravitationnelle. Cela n'est évidemment pas sans rappeler la fameuse luminosité d'Eddington :

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi c GM m_p}{\sigma_T}. \quad (\text{C.76})$$

La différence est que cette dernière est calculée dans un cadre newtonien et ne dépend pas du rayon. En effet, les termes en r^{-2} se simplifient dans l'Éq. (C.75) ci-dessus et le terme $\sqrt{1 - R_S/r}$ se réduit à 1 à la limite newtonienne, de sorte que (C.75) redonne bien (C.76), pourvu que $m = m_p$ (masse du proton) et $\sigma = \sigma_T$ (section efficace de diffusion Thomson). Dans le cadre relativiste, l'existence de r_{crit} a été montrée par Abramowicz, Ellis et Lanza en 1990 [36].

C.11 Coordonnées de Painlevé-Gullstrand sur l'espace-temps de Schwarzschild

1 D'après le théorème d'unicité de Carter-Hawking-Israel (cf. § 5.5.2 du cours), un trou noir stationnaire est décrit par la métrique de Kerr. S'il est sans rotation, il s'agit du cas particulier de la *métrique de Schwarzschild*.

2 Les composantes de la métrique de Schwarzschild dans les coordonnées de Schwarzschild (ct, r, θ, φ) sont données par l'équation (3.6) du cours :

$$g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) c^2 dt^2 + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2),$$

où le rayon de Schwarzschild R_S est relié à la masse M du trou noir par $R_S = 2GM/c^2$.

3 Puisque \mathcal{P} est une particule de masse $m \ll M$ soumise au seul champ gravitationnel, sa ligne d'univers est une *géodésique du genre temps* de $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$.

Comme la ligne d'univers de \mathcal{P} est une géodésique et que $\vec{\xi}_{(0)}$ est un vecteur de Killing, ε est constante le long de la ligne d'univers de \mathcal{P} (cf. § 3.4.1 du cours).

La quantité ε s'interprète comme l'énergie par unité de masse de la particule mesurée par un observateur statique en $r = +\infty$ (si la particule passe par cette région). En effet lorsque $r \rightarrow +\infty$, $\vec{\xi}_{(0)}$ tend vers la 4-vitesse d'un observateur statique, de sorte que l'énergie E de \mathcal{P} mesurée par cet observateur est $E = -\vec{\xi}_{(0)} \cdot \vec{p}c$, où $\vec{p} = mc\vec{u}$ est la 4-impulsion de \mathcal{P} . En comparant avec (B.121), on obtient bien $\varepsilon = E/m$.

4 Les composantes u^θ et u^φ de la 4-vitesse sont données par

$$u^\theta = \frac{1}{c} \frac{d\theta}{d\tau} \quad \text{t} \quad u^\varphi = \frac{1}{c} \frac{d\varphi}{d\tau},$$

où τ est le temps propre de \mathcal{P} . Puisque pour une trajectoire radiale, $\theta = \text{const}$ et $\varphi = \text{const}$, on obtient $u^\theta = 0$ et $u^\varphi = 0$, d'où (B.122).

Comme $\xi_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0)$, l'Éq. (B.121) donne

$$\varepsilon = -c^2 g_{\alpha\beta} \xi_{(0)}^\alpha u^\beta = -c^2 g_{00} u^0.$$

Puisque $g_{\alpha\beta}$ est diagonale, seul le terme $\beta = 0$ intervient dans la somme ci-dessus. En reportant $g_{00} = -(1 - R_S/r)$, il vient

$$\varepsilon = c^2 \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) u^0.$$

On en déduit immédiatement l'Éq. (B.123).

5 Pour calculer u^r utilisons la relation de normalisation de la 4-vitesse : $g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta = -1$. En explicitant les composantes $g_{\alpha\beta}$ (cf. question 2) et en reportant la valeur de u^0 obtenue ci-dessus, il vient

$$g_{00}(u^0)^2 + g_{rr}(u^r)^2 = - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-2} \frac{\varepsilon^2}{c^4} + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} (u^r)^2 = -1,$$

d'où

$$(u^r)^2 = -1 + \frac{R_S}{r} + \frac{\varepsilon^2}{c^4}.$$

On en déduit la relation (B.124).

Puisque $u^r = c^{-1} dr/d\tau$, le signe + correspond à une particule qui s'éloigne du trou noir et le signe - à une particule qui s'en approche.

6 Nous avons vu plus haut (question 3) que $\varepsilon = E/m$, où E est l'énergie de \mathcal{P} mesurée à l'infini par un observateur statique. Comme $E = \Gamma mc^2$, on en déduit la relation (B.125).

Si \mathcal{P} a une vitesse nulle à l'infini, alors $\Gamma = 1$, de sorte que (B.125) se réduit à

$$\varepsilon = c^2.$$

Les expressions (B.123) et (B.124) de u^0 et u^r se simplifient alors pour donner (B.126).

7 τ étant le temps propre de la particule \mathcal{P} , on a les relations

$$u^0 = \frac{1}{c} \frac{d(ct)}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau} \quad \text{et} \quad u^r = \frac{1}{c} \frac{dr}{d\tau},$$

d'où

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = cu^r \times \frac{1}{u^0}.$$

En reportant les valeurs (B.126) de u^r et u^0 , on obtient l'Éq. (B.127).

Pour obtenir la limite newtonienne, écrivons

$$c\sqrt{R_S} = c\sqrt{\frac{2GM}{c^2}} = \sqrt{2GM}.$$

En faisant de plus $1 - \frac{R_S}{r} \simeq 1$, on constate que la limite newtonienne de l'Éq. (B.127) est

$$\frac{dr}{dt} = -\sqrt{\frac{2GM}{r}}.$$

En élevant cette équation au carré et en multipliant par m , on obtient

$$\frac{1}{2}m \left(\frac{dr}{dt} \right)^2 - \frac{GMm}{r} = 0.$$

On reconnaît l'équation de conservation de l'énergie totale (somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle gravitationnelle) d'une particule en chute libre dans le champ de gravitation d'un corps central de masse M , avec une vitesse initiale nulle en $r = +\infty$.

8 Puisque la matrice $(g_{\alpha\beta})$ est diagonale, on a

$$\begin{aligned} u_0 &= g_{0\alpha}u^\alpha = g_{00}u^0 = -\left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \times \frac{1}{1 - \frac{R_S}{r}} = -1, \\ u_r &= g_{r\alpha}u^\alpha = g_{rr}u^r = \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} \times \left(-\sqrt{\frac{R_S}{r}}\right) = -\frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r}, \\ u_\theta &= g_{\theta\alpha}u^\alpha = g_{\theta\theta}u^\theta = r^2 \times 0 = 0, \\ u_\varphi &= g_{\varphi\alpha}u^\alpha = g_{\varphi\varphi}u^\varphi = r^2 \sin^2 \theta \times 0 = 0. \end{aligned}$$

On a donc bien (B.128). À titre de vérification, on note que $u_\alpha u^\alpha = -1$, comme il se doit.

9 Compte tenu de (B.128) et de $x^0 = ct$, la relation (B.129) est équivalente à

$$\begin{cases} \frac{\partial T}{\partial t} = 1 \\ \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{1}{c} \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \varphi} = 0. \end{cases}$$

La solution de ce système est

$$T = t + \frac{1}{c} \int_{r_0}^r \frac{\sqrt{R_S/r'}}{1 - R_S/r'} dr',$$

où r_0 est une valeur de r que l'on peut choisir librement. En effectuant le changement de variable $x = r'/R_S$, il vient

$$T = t + \frac{R_S}{c} \int_{r_0/R_S}^{r/R_S} \frac{\sqrt{1/x}}{1 - 1/x} dx = t + \frac{R_S}{c} \int_{r_0/R_S}^{r/R_S} \frac{\sqrt{x}}{x - 1} dx.$$

Compte tenu de la primitive donnée par (B.130), on obtient

$$T = t + \frac{R_S}{c} \left(2\sqrt{\frac{r}{R_S}} + \ln \left| \frac{\sqrt{r/R_S} - 1}{\sqrt{r/R_S} + 1} \right| \right) + \text{const},$$

où l'on a absorbé le terme en r_0 dans la constante.

10 On a $u^0 = c^{-1} dx^0/d\tau = c^{-1} d(ct)/d\tau = dt/d\tau$, d'où

$$d\tau = \frac{dt}{u^0} = \left(1 - \frac{R_S}{r} \right) dt = dt - \frac{R_S}{r} dt = dt - \frac{R_S}{r} \frac{dt}{dr} dr = dt - \frac{R_S}{r} \left(\frac{dr}{dt} \right)^{-1} dr.$$

En remplaçant dr/dt par l'expression (B.127), on obtient (B.131). Or, en différenciant l'expression de T obtenue à la question 9, il vient

$$dT = dt + \frac{1}{c} \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} dr.$$

Le membre de droite étant identique à celui de (B.131), on en déduit immédiatement que $\tau = T + \text{const}$.

11 Par définition, l'action d'un vecteur \vec{v} sur le champ scalaire T est (cf. § 2.2.3 du cours)

$$\vec{v}(T) = \left. \frac{dT}{d\lambda} \right|_{\mathcal{C}},$$

où \mathcal{C} est une courbe dont \vec{v} est un vecteur tangent, correspondant au paramètre λ . Si \vec{v} est tangent à l'hypersurface Σ_{T_0} , il en est de même pour la courbe \mathcal{C} . Puisque T est constant sur Σ_{T_0} , la variation de T le long de \mathcal{C} est nécessairement nulle : $dT = 0$, d'où

$$\vec{v}(T) = 0.$$

Or l'expression de $\vec{v}(T)$ en terme des composantes de \vec{v} par rapport aux coordonnées (x^α) est (cf. § 2.2.3 du cours)

$$\vec{v}(T) = v^\alpha \frac{\partial T}{\partial x^\alpha}.$$

On en déduit le résultat (B.133).

On a alors, pour tout vecteur \vec{v} tangent à Σ_{T_0} ,

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_\alpha v^\alpha = -c \frac{\partial T}{\partial x^\alpha} v^\alpha = 0,$$

où l'on a utilisé l'expression (B.129) de u_α . La 4-vitesse \vec{u} est donc orthogonale à tous les vecteurs tangents à Σ_{T_0} . Par conséquent, elle est orthogonale à Σ_{T_0} .

12 On déduit du résultat obtenu à la question (10) que

$$c dt = c dT - \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} dr,$$

d'où

$$c^2 dt^2 = c^2 dT^2 - 2 \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} c dT dr + \frac{R_S/r}{(1 - R_S/r)^2} dr^2.$$

En reportant cette relation dans l'expression de la métrique de Schwarzschild rappelée à la question 2, on obtient

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{\alpha\beta} d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta &= g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta \\ &= - \left(1 - \frac{R_S}{r}\right) \left[c^2 dT^2 - 2 \frac{\sqrt{R_S/r}}{1 - R_S/r} c dT dr + \frac{R_S/r}{(1 - R_S/r)^2} dr^2 \right] \\ &\quad + \left(1 - \frac{R_S}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \end{aligned}$$

Après simplification, on obtient l'expression (B.135).

Puisque $T = T_0$ sur Σ_{T_0} , on a $dT = 0$ pour tout déplacement élémentaire restreint à Σ_{T_0} . La métrique induite sur Σ_{T_0} s'obtient donc en faisant $dT = 0$ dans l'expression (B.135); il vient

$$ds^2 = dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

On constate qu'il s'agit de la métrique euclidienne de \mathbb{R}^3 exprimée en coordonnées sphériques. Son tenseur de courbure est bien évidemment nul. Les coordonnées de Painlevé-Gullstrand (cT, r, θ, φ) ont donc une propriété remarquable : les hypersurfaces $T = \text{const}$ sont des *espaces plats* (vis-à-vis de la métrique induite par g).

13 L'horizon des événements du trou noir de Schwarzschild est l'hypersurface $r = R_S$. On constate que les coefficients métriques donnés par (B.135) ont tous une valeur finie en $r = R_S$:

$$\tilde{g}_{00} = 0, \quad \tilde{g}_{0r} = 2, \quad \tilde{g}_{rr} = 1, \quad \tilde{g}_{\theta\theta} = R_S^2, \quad \tilde{g}_{\varphi\varphi} = R_S^2 \sin^2 \theta.$$

On en conclut que les coordonnées de Painlevé-Gullstrand sont régulières sur l'horizon des événements. Elles partagent cette propriété avec les coordonnées d'Eddington-Finkelstein (cf. § 3.3.2 du cours).

En $r = 0$ les coefficients métriques \tilde{g}_{00} et \tilde{g}_{0r} divergent. Cela n'est pas surprenant car on sait que $r = 0$ correspond à la singularité centrale de la métrique de Schwarzschild, qui

est une singularité du tenseur métrique \mathbf{g} et non une simple singularité de coordonnées (cf. § 5.2.2 du cours).

14 En développant (B.136), il est clair que l'on obtient (B.135). Utilisons (B.136) pour calculer les géodésiques lumière radiales en écrivant

$$\tilde{g}_{\alpha\beta}d\tilde{x}^\alpha d\tilde{x}^\beta = 0,$$

avec $d\tilde{x}^2 = d\theta = 0$ et $d\tilde{x}^3 = d\varphi = 0$ puisque l'on ne s'intéresse qu'aux géodésiques radiales. Il vient

$$-c^2 dT^2 + \left(dr + \sqrt{\frac{R_S}{r}} c dT \right)^2 = 0,$$

d'où

$$c dT = \pm \left(dr + \sqrt{\frac{R_S}{r}} c dT \right),$$

soit

$$c dT = \frac{dr}{1 - \sqrt{R_S/r}} \quad \text{ou} \quad c dT = -\frac{dr}{1 + \sqrt{R_S/r}}.$$

On a donc deux familles de géodésiques lumière radiales. Pour la seconde famille, on a toujours $dr < 0$ si $dT > 0$: il s'agit donc de géodésiques lumière entrantes. Par contre, pour la première famille, $dr > 0$ lorsque $dT > 0$ si, et seulement si, $r > R_S$. Autrement dit, les géodésiques de la première famille sont sortantes à l'extérieur de l'horizon des événements et entrantes à l'intérieur (cf. Fig. C.9). On retrouve le fait qu'aucune géodésique lumière ne sort d'un trou noir.

En utilisant les primitives (B.137)-(B.138), on obtient

$$cT = r + 2\sqrt{R_S r} + 2R_S \ln \left| 1 - \sqrt{\frac{r}{R_S}} \right| + \text{const}$$

pour la première famille et

$$cT = -r + 2\sqrt{R_S r} - 2R_S \ln \left(1 + \sqrt{\frac{r}{R_S}} \right) + \text{const}$$

pour la seconde. À partir de ces expressions, on a dessiné les géodésiques lumière radiales sur la Fig. C.9.

Les coordonnées de Painlevé-Gullstrand ont été introduites en 1921 par le mathématicien et homme politique français Paul Painlevé [32], ainsi que l'année suivante par le physicien et ophtalmologiste suédois Allvar Gullstrand (Prix Nobel de médecine 1911) [28]. Elles sont analysées en détail dans l'article [60].

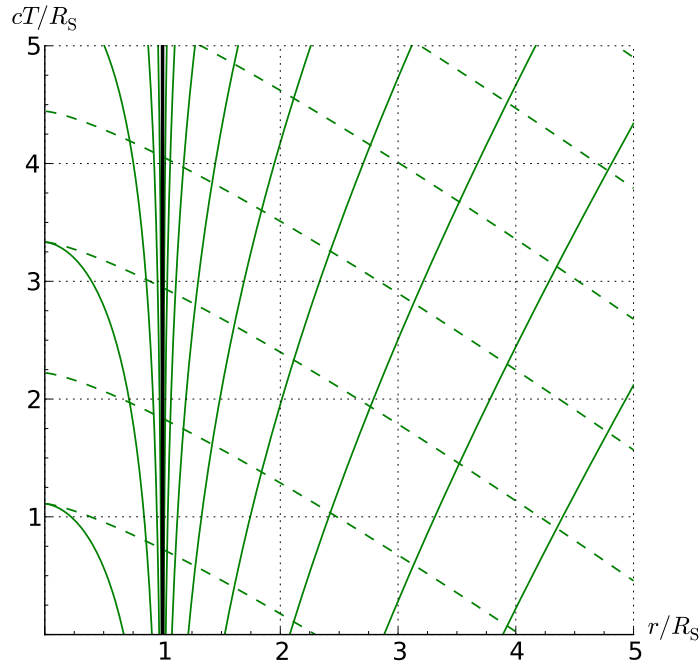


FIGURE C.9 – Diagramme de l'espace-temps de Schwarzschild basé sur les coordonnées de Painlevé-Gullstrand (ct, r) , les dimensions suivant θ et φ ayant été supprimées. Le trait vertical noir en $r/R_S = 1$ correspond à l'horizon des événements. Les courbes de couleur verte sont les géodésiques lumière radiales. Celles de la première famille (sortantes pour $r > R_S$, entrantes pour $r < R_S$) sont dessinées en traits pleins et celles de la seconde famille (toujours entrantes) en tirets.

C.12 Taille apparente des étoiles compactes et des trous noirs

1 D'après le théorème de Birkhoff (cf. le § 3.2.4 du cours), la métrique à l'extérieur de tout corps à symétrie sphérique est la métrique de Schwarzschild et l'Éq. (B.139) n'est autre que l'expression de cette métrique en coordonnées de Schwarzschild (ct, r, θ, φ) . R_S est le rayon de Schwarzschild défini par $R_S := 2GM/c^2$.

2 Les étapes conduisant à l'Éq. (B.141) sont les suivantes :

1. $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$ étant deux vecteurs de Killing de l'espace-temps de Schwarzschild, les quantités ε et ℓ sont conservées le long de toute géodésique, donc en particulier le long de la ligne d'univers du photon (cf. le § 3.4.1 du cours).
2. On a $\varepsilon = -cp_0$ et $\ell = p_\varphi$, d'où $p^0 = (1 - R_S/r)\varepsilon/c$ et $p^\varphi = \ell/(r \sin \theta)^2$.
3. L'espace-temps de Schwarzschild étant à symétrie sphérique, la trajectoire du photon est nécessairement plane ; il n'y a donc pas de perte de généralité à supposer que la trajectoire s'effectue dans le plan $\theta = \pi/2$. On a alors $p^\theta = 0$.
4. À ce stade, on connaît 3 des 4 composantes p^α de la 4-impulsion : p^0 , p^θ et p^φ . La quatrième composante, p^r , est obtenue à l'aide de la relation $g_{\mu\nu}p^\mu p^\nu = 0$ exprimant que \vec{p} est du genre lumière. En y remplaçant p^0 , p^θ et p^φ par les valeurs ci-dessus

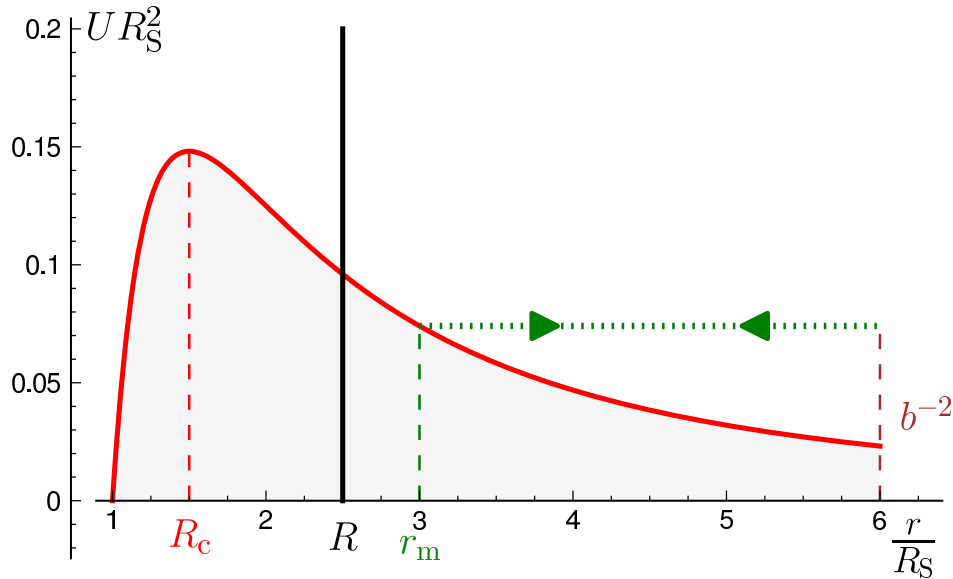


FIGURE C.10 – Potentiel effectif $U(r)$ régissant la partie radiale du mouvement d'un photon dans la métrique de Schwarzschild. Le segment de droite en pointillés représente un photon passant au voisinage de l'étoile : dans ce diagramme, il se déplace d'abord de droite à gauche, pour atteindre $r = r_m$, puis repart vers la droite.

et en remarquant que l'on peut choisir le paramètre affine λ tel que $p^r = \ell dr/d\lambda$, on obtient (B.141). Il ne s'agit pas d'autre chose que de l'Éq. (3.157) du cours.

b est le *paramètre d'impact* du photon. Pour le voir, il suffit de reprendre « à l'envers » le raisonnement du § 3.6.1 du cours, en considérant un photon qui part de l'infini \mathcal{O} pour aller vers le corps central.

3 Le graphe de $U(r)$ est donné par la Fig. 3.9 du cours, que l'on reproduit ici (cf. Fig. C.10). La fonction $U(r)$ atteint son maximum pour $r = R_c = 3R_S/2$. Sur la Fig. C.10, on a choisi $R = 5R_S/2$ pour le rayon aérotaire de l'étoile.

4 L'Éq. (B.141) est celle d'un mouvement unidimensionnel dans un « puits » de potentiel. L'ordonnée de la Fig. C.10 correspond à l'« énergie » de la particule. La trajectoire d'un photon peut alors être représentée comme un segment de droite horizontale d'« énergie totale » égale à b^{-2} (qui est constante). Comme $(dr/d\lambda)^2 \geq 0$, l'Éq. (B.141) implique que $b^{-2} \geq U(r)$. Ainsi la trajectoire du photon est nécessairement au dessus du graphe de $U(r)$. Sur la Fig. C.10, la zone grisée, située sous le graphe de $U(r)$, est donc la zone interdite pour les photons.

La valeur r_m étant un extremum de $r(\lambda)$, on a nécessairement $dr/d\lambda = 0$ lorsque $r = r_m$. L'Éq. (B.141) donne alors $U(r_m) = b^{-2}$. En remplaçant U par sa valeur, il vient

$$\frac{1}{r_m^2} \left(1 - \frac{R_S}{r_m}\right) = \frac{1}{b^2},$$

d'où, puisque $b > 0$,

$$b = r_m \left(1 - \frac{R_S}{r_m}\right)^{-1/2}.$$

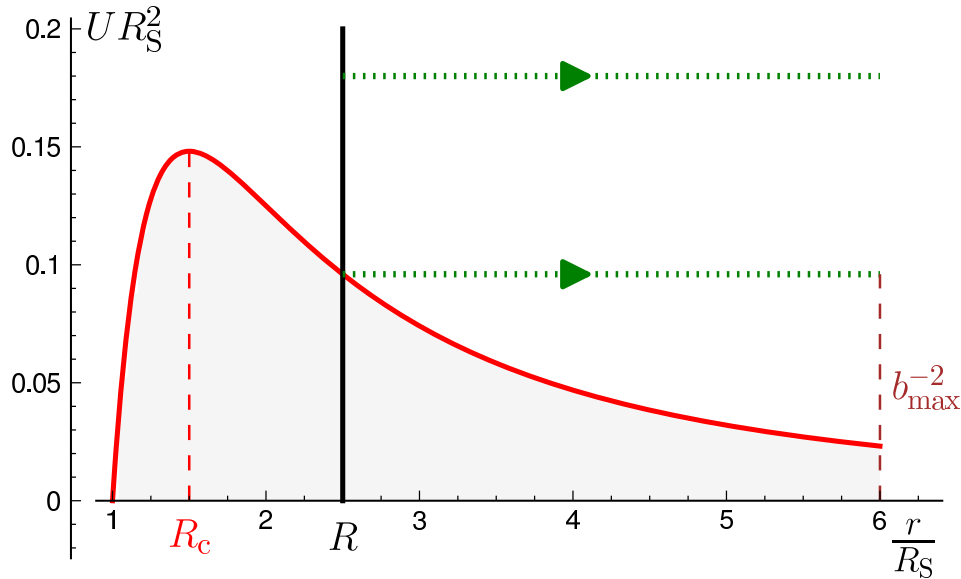


FIGURE C.11 – Photons émis depuis la surface de l'étoile.

5 On a représenté sur la Fig. C.11 la trace d'un photon émis depuis la surface de l'étoile. Pour l'observateur \mathcal{O} , qui est situé à l'infini, la taille de l'image de l'étoile est donnée par les photons qui ont le plus grand paramètre d'impact, que nous noterons b_{\max} . On a donc $R_a = b_{\max}$. Comme on suppose $R > R_c$, il est clair sur la Fig. C.11 que b_{\max}^{-2} est égal à $U(R)$. On a donc

$$R_a = b_{\max} = U(R)^{-1/2},$$

d'où

$$R_a = R \left(1 - \frac{2GM}{c^2 R} \right)^{-1/2}.$$

On constate que $R_a > R$: l'étoile apparaît plus grosse qu'elle n'est.

6 Définissons b_c comme la valeur du paramètre d'impact correspondant au maximum de la courbe $U(r)$:

$$b_c^{-2} = U(R_c) \implies b_c = R_c \left(1 - \frac{R_S}{R_c} \right)^{-1/2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} R_S.$$

(On retrouve la formule (3.168) du cours). Considérons des photons émis en arrière plan du trou noir (fond étoilé). De tels photons se propagent initialement de la droite vers la gauche sur la Fig. C.12 (ils arrivent de $r \rightarrow \infty$), puis repartent éventuellement vers la droite, en direction de l'observateur \mathcal{O} situé en $r \rightarrow +\infty$. Il est clair sur cette figure que des photons de paramètre d'impact $b \geq b_c$ (comme le photon 1 ou marginalement le photon 2) peuvent parvenir à l'observateur \mathcal{O} , alors que ceux de paramètre d'impact $b < b_c$ (comme le photon 3) sont piégés par le trou noir. Autrement dit, \mathcal{O} ne reçoit aucun photon de paramètre d'impact inférieur à b_c . Il observe donc sur le fond du ciel un disque

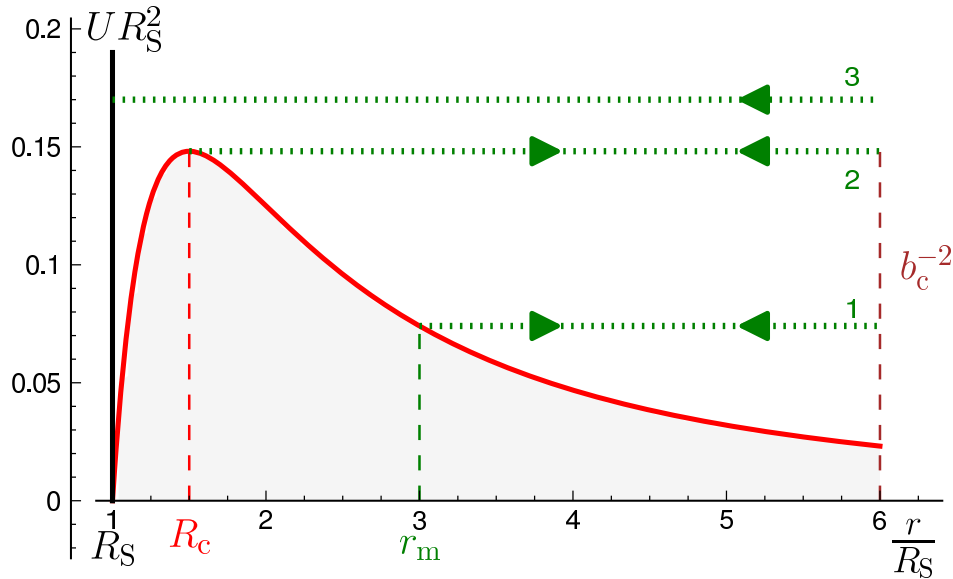


FIGURE C.12 – Photons émis en arrière plan du trou noir.

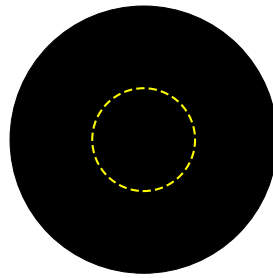


FIGURE C.13 – Image d’un trou noir, avec en tirets jaunes l’image d’une sphère de rayon R_S située à la même distance dans un espace-temps plat.

noir de rayon apparent $R_a = b_c$. En remplaçant R_S par $2GM/c^2$ dans la formule ci-dessus pour b_c , on obtient

$$R_a = 3\sqrt{3} \frac{GM}{c^2}.$$

On constate que $R_a = (3\sqrt{3}/2) R_S \simeq 2.60R_S$. On a donc $R_a > R_S$. Le trou noir apparaît plus de deux fois plus gros qu’il n’est. Ceci est illustré sur la Fig. C.13 où l’on a superposé à l’image du trou noir (le disque noir), l’image que donnerait, en espace-temps plat, une sphère qui aurait pour rayon le rayon de Schwarzschild.

7 L’application numérique donne

- Cyg X-1 : $R_a = 1.14 \times 10^5 \text{ m} \implies \alpha = 3.8 \times 10^{-15} \text{ rad} = 0.00080 \times 10^{-6} \text{ ''}$
- Sgr A* : $R_a = 3.28 \times 10^{10} \text{ m} = 0.22 \text{ UA} \implies \alpha = 2.55 \times 10^{-10} \text{ rad} = 53 \times 10^{-6} \text{ ''}$
- M87 : $R_a = 3.05 \times 10^{13} \text{ m} = 203 \text{ UA} \implies \alpha = 1.16 \times 10^{-10} \text{ rad} = 24 \times 10^{-6} \text{ ''}$

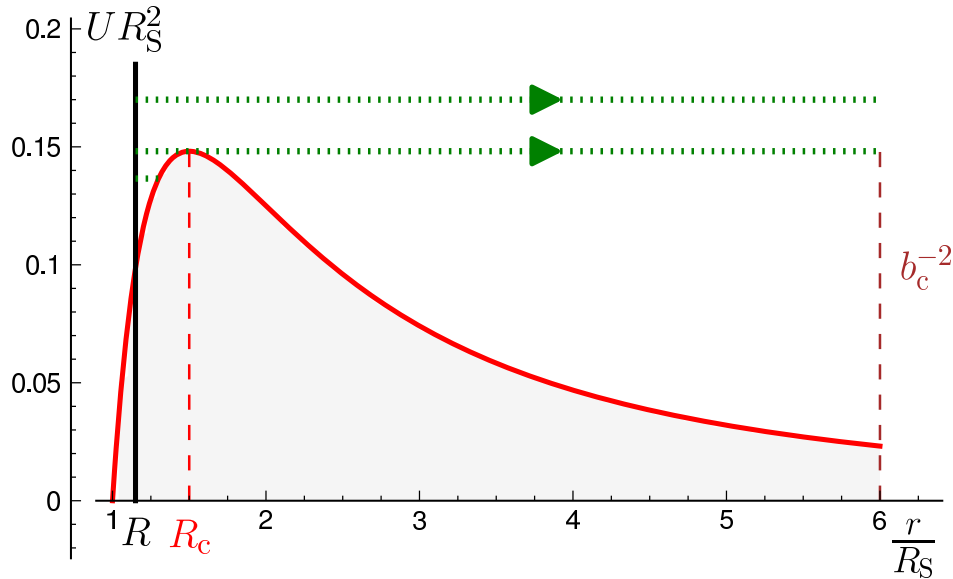


FIGURE C.14 – Photons émis depuis la surface d’une étoile ultracompacte.

On constate que le trou noir supermassif au cœur de notre galaxie, Sgr A*, a la plus grande taille apparente des trois, loin devant le trou noir stellaire Cyg X-1. Il s’agit en fait du plus gros trou noir sur le plan du ciel.

Remarque : Bien que 53 microsecondes d’arc semblent minuscules, elles vont devenir accessibles prochainement grâce à l’instrument GRAVITY [50], qui sera mis en place sur le VLTI en 2014 et dont l’une des cibles principales sera Sgr A*. Notons également, dans le domaine de la VLBI submillimétrique, le programme Event Horizon Telescope [51], qui doit permettre d’atteindre une résolution de l’ordre de la microseconde d’arc dans les années qui viennent.

8 On a placé la surface d’une étoile ultracompacte sur la Fig. C.14. Il est clair que les photons émis depuis la surface ne parviennent à l’observateur \mathcal{O} que si leur paramètre d’impact vérifie $b \leq b_c$. Le rayon apparent de l’étoile est donc $R_a = b_c$. En reportant la valeur de b_c obtenue à la question 6, on obtient donc la même expression de R_a que pour un trou noir :

$$R_a = 3\sqrt{3} \frac{GM}{c^2}.$$

La taille apparente de l’étoile est donc indépendante de son rayon aérolaire R , tant que ce dernier reste inférieur à R_c .

C.13 Tenseur de Killing et constante de Carter

1 La propriété 2 est équivalente à

$$\begin{cases} \nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = -\nabla_\alpha Y_{\gamma\beta} & \text{(a)} \\ \nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = -\nabla_\beta Y_{\alpha\gamma} & \text{(b)} \\ \nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = -\nabla_\gamma Y_{\beta\alpha} & \text{(c)} \end{cases}$$

Si l'on suppose que \mathbf{Y} est antisymétrique (propriété 1), l'identité (a) est clairement satisfaite. De plus, (a) implique

$$\begin{aligned} \text{(c)} &\iff \nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = -\nabla_\gamma Y_{\beta\alpha} \\ &\iff \nabla_\alpha Y_{\beta\gamma} = \nabla_\gamma Y_{\alpha\beta} \\ &\iff -\nabla_\alpha Y_{\gamma\beta} = \nabla_\gamma Y_{\alpha\beta} \\ &\iff \text{(b)} \end{aligned}$$

En admettant la propriété 1, la propriété 2 est donc équivalente à (b), qui n'est autre que l'identité (B.143) de l'énoncé.

2 Puisque ∇ est la connexion compatible avec \mathbf{g} , on a

$$\nabla_\alpha g_{\beta\gamma} = 0,$$

de sorte que \mathbf{g} vérifie trivialement l'identité (B.144). De plus, \mathbf{g} est une forme bilinéaire symétrique. On en conclut que le tenseur métrique \mathbf{g} est un tenseur de Killing.

Remarque : L'équation (B.144) généralise l'équation de Killing (B.18) (problème B.2) au cas d'un tenseur de valence 2, d'où le nom de tenseur de Killing donné à ses solutions. Par contre, contrairement aux vecteurs de Killing, les tenseurs de Killing ne sont pas directement liés à un groupe de symétrie de l'espace-temps.

3 Le tenseur \mathbf{K} défini par (B.145) est bien une forme bilinéaire. De plus, il est clairement symétrique :

$$K_{\beta\alpha} = g^{\mu\nu} Y_{\mu\beta} Y_{\nu\alpha} = g^{\nu\mu} Y_{\nu\alpha} Y_{\mu\beta} = K_{\alpha\beta}.$$

Il reste donc à vérifier l'identité (B.144). En appliquant la règle de Leibniz, il vient

$$\begin{aligned} \nabla_\alpha K_{\beta\gamma} &= \nabla_\alpha Y_{\beta\mu} Y^\mu_\gamma + Y_{\beta\mu} \nabla_\alpha Y^\mu_\gamma \\ \nabla_\beta K_{\gamma\alpha} &= \nabla_\beta Y_{\gamma\mu} Y^\mu_\alpha + Y_{\gamma\mu} \nabla_\beta Y^\mu_\alpha \\ \nabla_\gamma K_{\alpha\beta} &= \nabla_\gamma Y_{\alpha\mu} Y^\mu_\beta + Y_{\alpha\mu} \nabla_\gamma Y^\mu_\beta. \end{aligned}$$

Or

$$Y_{\gamma\mu} \nabla_\beta Y^\mu_\alpha = -Y_{\mu\gamma} \nabla_\beta Y^\mu_\alpha = -Y^\mu_\gamma \underbrace{\nabla_\beta Y_{\mu\alpha}}_{-\nabla_\alpha Y_{\mu\beta}} = Y^\mu_\gamma \nabla_\alpha \underbrace{Y_{\mu\beta}}_{-Y_{\beta\mu}} = -\nabla_\alpha Y_{\beta\mu} Y^\mu_\gamma.$$

Le premier terme de l'expression de $\nabla_\alpha K_{\beta\gamma}$ ci-dessus est donc l'opposé du second terme de l'expression de $\nabla_\beta K_{\gamma\alpha}$. On en déduit qu'en effectuant la somme $\nabla_\alpha K_{\beta\gamma} + \nabla_\beta K_{\gamma\alpha} + \nabla_\gamma K_{\alpha\beta}$,

les termes s'annulent deux par deux. L'identité (B.144) est donc satisfaite et on conclut que \mathbf{K} est un tenseur de Killing.

4 On a

$$\begin{aligned}\nabla_{\vec{p}} \mathcal{K} &= p^\mu \nabla_\mu \mathcal{K} = p^\mu \nabla_\mu (K_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta) \\ &= \nabla_\mu K_{\alpha\beta} p^\mu p^\alpha p^\beta + K_{\alpha\beta} \underbrace{p^\mu \nabla_\mu p^\alpha}_0 p^\beta + K_{\alpha\beta} p^\alpha \underbrace{p^\mu \nabla_\mu p^\beta}_0 \\ &= \nabla_\mu K_{\alpha\beta} p^\mu p^\alpha p^\beta,\end{aligned}$$

où l'on a utilisé la propriété (B.146), c'est-à-dire le fait que la courbe \mathcal{L} est une géodésique. Tous les indices étant muets, écrivons le membre de droite sous la forme

$$\begin{aligned}\nabla_\mu K_{\alpha\beta} p^\mu p^\alpha p^\beta &= \frac{1}{3} (\nabla_\mu K_{\alpha\beta} p^\mu p^\alpha p^\beta + \nabla_\alpha K_{\beta\mu} p^\alpha p^\beta p^\mu + \nabla_\beta K_{\mu\alpha} p^\beta p^\mu p^\alpha) \\ &= \frac{1}{3} (\nabla_\mu K_{\alpha\beta} + \nabla_\alpha K_{\beta\mu} + \nabla_\beta K_{\mu\alpha}) p^\mu p^\alpha p^\beta.\end{aligned}$$

La propriété (B.144) dans la définition d'un tenseur de Killing conduit immédiatement à $\nabla_\mu K_{\alpha\beta} p^\mu p^\alpha p^\beta = 0$, et donc à

$$\boxed{\nabla_{\vec{p}} \mathcal{K} = 0}.$$

Ceci montre que le scalaire \mathcal{K} est constant le long de \mathcal{L} .

Dans le cas particulier où $\mathbf{K} = \mathbf{g}$ (cf. question 2), $\mathcal{K} = \mathbf{g}(\vec{p}, \vec{p}) = -m^2 c^2$, où m est la masse de la particule (cf. Éq. (2.93) du cours); il s'agit bien d'une constante le long de \mathcal{L} .

5 D'après (B.150), les composantes de \vec{l} par rapport aux coordonnées de Boyer-Lindquist (ct, r, θ, φ) sont

$$l^\alpha = \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right).$$

Compte tenu des composantes de \mathbf{g} et de \vec{l} , il vient

$$\begin{aligned}\vec{l} \cdot \vec{l} &= g_{\alpha\beta} l^\alpha l^\beta = g_{00} (l^0)^2 + 2g_{0\varphi} l^0 l^\varphi + g_{rr} (l^r)^2 + g_{\varphi\varphi} (l^\varphi)^2 \\ &= \left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) \frac{(r^2 + a^2)^2}{\Delta^2} - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{a}{\Delta} + \frac{\rho^2}{\Delta} \\ &\quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \frac{a^2}{\Delta^2} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ - (r^2 + a^2)^2 + \rho^2 \Delta + a^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \right. \\ &\quad \left. + \frac{2mr}{\rho^2} [(r^2 + a^2)^2 - 2a^2 (r^2 + a^2) \sin^2 \theta + a^4 \sin^4 \theta] \right\} \\ &= \frac{1}{\Delta^2} \left\{ (r^2 + a^2) \underbrace{(-r^2 - a^2 + a^2 \sin^2 \theta)}_{-\rho^2} + \rho^2 (r^2 - 2mr + a^2) \right\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{2mr}{\rho^2} \left[r^4 + 2a^2r^2 + a^4 - 2a^2r^2 \sin^2 \theta - 2a^4 \sin^2 \theta + a^4 \sin^4 \theta \right] \Big\} \\
& = \frac{1}{\Delta^2} \left[-2mr\rho^2 + \frac{2mr}{\rho^2} \underbrace{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2}_{\rho^4} \right] \\
& = 0.
\end{aligned}$$

\vec{l} est donc un vecteur du genre lumière.

De même, d'après (B.151), les composantes de \vec{k} sont

$$k^\alpha = \left(\frac{r^2 + a^2}{2\rho^2}, -\frac{\Delta}{2\rho^2}, 0, \frac{a}{2\rho^2} \right),$$

d'où

$$\begin{aligned}
\vec{k} \cdot \vec{k} & = g_{\alpha\beta} k^\alpha k^\beta = g_{00}(k^0)^2 + 2g_{0\varphi} k^0 k^\varphi + g_{rr}(k^r)^2 + g_{\varphi\varphi}(k^\varphi)^2 \\
& = \left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) \frac{(r^2 + a^2)^2}{4\rho^4} - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} \frac{a}{2\rho^2} + \frac{\rho^2}{\Delta} \left(-\frac{\Delta}{2\rho^2} \right)^2 \\
& \quad + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \frac{a^2}{4\rho^4}.
\end{aligned}$$

En comparant avec la seconde ligne du calcul de $\vec{l} \cdot \vec{l}$, on constate que

$$\vec{k} \cdot \vec{k} = \frac{\Delta^2}{4\rho^4} \vec{l} \cdot \vec{l}.$$

On en déduit immédiatement que $\vec{k} \cdot \vec{k} = 0$. Le vecteur \vec{k} est donc également du genre lumière.

On a :

$$\begin{aligned}
\vec{l} \cdot \vec{k} & = g_{\alpha\beta} l^\alpha k^\beta = g_{00}l^0 k^0 + g_{0\varphi}l^0 k^\varphi + g_{\varphi 0}l^\varphi k^0 + g_{rr}l^r k^r + g_{\varphi\varphi}l^\varphi k^\varphi \\
& = \left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) \frac{r^2 + a^2}{\Delta} \frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} - \frac{2amr \sin^2 \theta}{\rho^2} \left[\frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} \frac{a}{2\rho^2} + \frac{a}{\Delta} \frac{a}{2\rho^2} \right] \\
& \quad + \frac{\rho^2}{\Delta} \left(-\frac{\Delta}{2\rho^2} \right) + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \frac{a}{\Delta} \frac{a}{2\rho^2} \\
& = \frac{1}{2\rho^2\Delta} \left\{ \left[\left(-1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) (r^2 + a^2)^2 - \frac{4a^2mr \sin^2 \theta}{\rho^2} (r^2 + a^2) \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + a^2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \right] - \rho^2\Delta \right\}.
\end{aligned}$$

Or d'après la seconde ligne du calcul de $\vec{l} \cdot \vec{l}$ et le fait que $\vec{l} \cdot \vec{l} = 0$, tout le terme entre crochets dans l'expression ci-dessus est égal à $-\rho^2\Delta$. On obtient donc $\vec{l} \cdot \vec{k} = -1$.

6 On a

$$\mathcal{K} = \mathbf{K}(\vec{p}, \vec{p}) = \rho^2 (\langle \vec{l}, \vec{p} \rangle \langle \vec{k}, \vec{p} \rangle + \langle \vec{k}, \vec{p} \rangle \langle \vec{l}, \vec{p} \rangle) + r^2 \mathbf{g}(\vec{p}, \vec{p}) = 2\rho^2 (\vec{l} \cdot \vec{p}) (\vec{k} \cdot \vec{p}) + r^2 \vec{p} \cdot \vec{p},$$

avec

$$\begin{aligned}\vec{l} \cdot \vec{p} &= l^\alpha p_\alpha = \frac{r^2 + a^2}{\Delta} p_0 + p_r + \frac{a}{\Delta} p_\varphi \\ \vec{k} \cdot \vec{p} &= k^\alpha p_\alpha = \frac{r^2 + a^2}{2\rho^2} p_0 - \frac{\Delta}{2\rho^2} p_r + \frac{a}{2\rho^2} p_\varphi \\ \vec{p} \cdot \vec{p} &= -\mu^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\mathcal{K} &= \rho^2 \left[\frac{(r^2 + a^2)^2}{\rho^2 \Delta} (p_0)^2 + \frac{2a(r^2 + a^2)}{\rho^2 \Delta} p_0 p_\varphi - \frac{\Delta}{\rho^2} (p_r)^2 + \frac{a^2}{\rho^2 \Delta} (p_\varphi)^2 \right] - \mu^2 r^2 \\ &= \rho^2 \left[\left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\rho^2} - g^{00} \right) (p_0)^2 + \frac{2a(r^2 + a^2)}{\rho^2 \Delta} p_0 p_\varphi - g^{rr} (p_r)^2 + \left(\frac{1}{\rho^2 \sin^2 \theta} - g^{\varphi\varphi} \right) (p_\varphi)^2 \right] \\ &\quad - \mu^2 r^2.\end{aligned}$$

Or, en remarquant que $g^{\alpha\beta} p_\alpha p_\beta = \vec{p} \cdot \vec{p} = -\mu^2$, on peut écrire

$$\begin{aligned}-g^{00} (p_0)^2 - g^{rr} (p_r)^2 - g^{\varphi\varphi} (p_\varphi)^2 &= \mu^2 + 2g^{0\varphi} p_0 p_\varphi + g^{\theta\theta} (p_\theta)^2 \\ &= \mu^2 - \frac{4amr}{\rho^2 \Delta} p_0 p_\varphi + \frac{1}{\rho^2} (p_\theta)^2,\end{aligned}$$

d'où

$$\mathcal{K} = (p_\theta)^2 + \mu^2 \underbrace{(\rho^2 - r^2)}_{a^2 \cos^2 \theta} + a^2 \sin^2 \theta (p_0)^2 + \frac{2a}{\Delta} \underbrace{(r^2 + a^2 - 2mr)}_{\Delta} p_0 p_\varphi + \frac{(p_\varphi)^2}{\sin^2 \theta}.$$

En écrivant $a^2 \sin^2 \theta (p_0)^2 = a^2 (1 - \cos^2 \theta) (p_0)^2$, on obtient au final

$$\mathcal{K} = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (\mu^2 - p_0^2) + \frac{p_\varphi^2}{\sin^2 \theta} \right] + (p_\varphi + ap_0)^2,$$

soit l'expression demandée.

Le paramètre μ représente la masse de la particule multipliée par c . Le cas $\mu = 0$ correspond donc à un photon (ou plus généralement à une particule de masse nulle).

8 Puisque $\vec{\partial}_0$ et $\vec{\partial}_\varphi$ sont deux vecteurs de Killing de la métrique de Kerr (générateurs respectifs de la stationnarité et de l'axisymétrie) et que \mathcal{L} est une géodésique, les quantités ε et ℓ sont des constantes du mouvement (cf. le § 3.4.1 du cours).

Elles s'écrivent

$$\varepsilon = -p_\alpha \underbrace{(\partial_0)^\alpha}_{\delta^\alpha_0} = -p_0 \quad \text{et} \quad \ell = p_\alpha \underbrace{(\partial_\varphi)^\alpha}_{\delta^\alpha_\varphi} = p_\varphi.$$

La quantité $p_\varphi + ap_0 = \ell - a\varepsilon$ est donc constante le long de \mathcal{L} . Au vu de (B.154) et (B.156), on en déduit que Q est une constante du mouvement.

C.14 Gravité de surface d'un trou noir

1 Un trou noir stationnaire en rotation est décrit par la *métrie de Kerr*, et ce en vertu du *théorème d'unicité* (cf. § 5.5.2 du cours).

2 Les paramètres m et a ont tous deux la dimension d'une longueur. Lorsque $a = 0$, $\rho^2 = r^2$ et les composantes du tenseur métrique se réduisent à

$$g_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 + \frac{2m}{r} & \frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ \frac{2m}{r} & 1 + \frac{2m}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

On reconnaît les *coordonnées d'Eddington-Finkelstein 3+1* (cf. Eq. (5.12) du cours).

En $r = r_H$, tous les coefficients métriques sont réguliers. En particulier

$$g_{rr} = 1 + \frac{2mr_H}{r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta}$$

ne diverge pas, contrairement au coefficient métrique g_{rr} des coordonnées de Boyer-Lindquist.

3 Le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$ correspond à l'invariance par translation dans le temps (stationnarité) et le vecteur de Killing $\vec{\xi}_{(z)}$ correspond à l'invariance par rotation autour d'un axe (axisymétrie).

Soit f un champ scalaire sur l'espace-temps $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$. L'action du vecteur $\vec{\partial}_{t'}$ sur f est, par définition même d'une base naturelle (cf. Eq. (2.14) du cours),

$$\vec{\partial}_{t'}(f) = \frac{\partial f}{\partial t'} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial t'}.$$

Or d'après (B.157), le passage des coordonnées de Boyer-Lindquist (x'^α) à celles de Kerr 3+1 (x^α) est de la forme

$$\begin{cases} t &= t' + F(r) \\ r &= r \\ \theta &= \theta \\ \varphi &= \varphi' + G(r), \end{cases}$$

si bien que $\partial x^\alpha / \partial t' = \delta^\alpha_0$ et

$$\vec{\partial}_{t'}(f) = \frac{\partial f}{\partial t} = \vec{\partial}_t(f).$$

Le champ scalaire f étant quelconque, on en conclut que les vecteurs $\vec{\partial}_{t'}$ et $\vec{\partial}_t$ sont égaux.

De même,

$$\vec{\partial}_{\varphi'}(f) = \frac{\partial f}{\partial \varphi'} = \frac{\partial f}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\alpha}{\partial \varphi'} = \frac{\partial f}{\partial \varphi} \times 1 = \vec{\partial}_\varphi(f),$$

si bien que $\vec{\partial}_{\varphi'} = \vec{\partial}_\varphi$. On a donc, au vu de (B.160),

$$\vec{\xi}_{(0)} = \vec{\partial}_0 = c^{-1}\vec{\partial}_t \quad \text{et} \quad \vec{\xi}_{(z)} = \vec{\partial}_\varphi.$$

Les composantes des deux vecteurs de Killing par rapport aux coordonnées de Kerr 3+1 sont alors triviales, puisque $\vec{\partial}_0$ et $\vec{\partial}_\varphi$ sont les vecteurs de la base naturelle correspondante :

$$\xi_{(0)}^\alpha = (1, 0, 0, 0) \quad \text{et} \quad \xi_{(z)}^\alpha = (0, 0, 0, 1).$$

On a, par définition même des composantes du tenseur métrique [cf. Eq. (2.47) du cours],

$$\begin{aligned} g_{00} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_0) = \mathbf{g}(\vec{\xi}_{(0)}, \vec{\xi}_{(0)}) = \mathbf{g}(\vec{\partial}_{0'}, \vec{\partial}_{0'}) = g_{0'0'} \\ g_{0\varphi} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_\varphi) = \mathbf{g}(\vec{\xi}_{(0)}, \vec{\xi}_{(z)}) = \mathbf{g}(\vec{\partial}_{0'}, \vec{\partial}_{\varphi'}) = g_{0'\varphi'} \\ g_{\varphi\varphi} &= \mathbf{g}(\vec{\partial}_\varphi, \vec{\partial}_\varphi) = \mathbf{g}(\vec{\xi}_{(z)}, \vec{\xi}_{(z)}) = \mathbf{g}(\vec{\partial}_{\varphi'}, \vec{\partial}_{\varphi'}) = g_{\varphi'\varphi'}. \end{aligned}$$

En particulier, les composantes g_{00} , $g_{0\varphi}$ et $g_{\varphi\varphi}$ ne sont autres que les produits scalaires des deux vecteurs de Killing $\vec{\xi}_{(0)}$ et $\vec{\xi}_{(z)}$ entre eux, les valeurs de ces produits scalaires étant indépendantes du système de coordonnées.

4 Faisons agir $\vec{\ell}$ sur un champ scalaire f :

$$\vec{\ell}(f) = \vec{\xi}_{(0)}(f) + \frac{\Omega}{c}\vec{\xi}_{(z)}(f) = \frac{1}{c}\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\Omega}{c}\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{1}{c}\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \Omega\frac{\partial f}{\partial \varphi}\right).$$

La coordonnée t ayant la dimension d'un temps et φ étant une coordonnée angulaire sans dimension, on en déduit que Ω doit avoir la dimension d'une vitesse angulaire (inverse d'un temps).

On a

$$\ell_\alpha = g_{\alpha\mu}\ell^\mu = g_{\alpha\mu}\xi_{(0)}^\mu + \frac{\Omega}{c}g_{\alpha\mu}\xi_{(z)}^\mu = \xi_{(0)\alpha} + \frac{\Omega}{c}\xi_{(z)\alpha},$$

d'où, puisque Ω est une constante :

$$\nabla_\alpha\ell_\beta + \nabla_\beta\ell_\alpha = \underbrace{\nabla_\alpha\xi_{(0)\beta} + \nabla_\beta\xi_{(0)\alpha}}_0 + \frac{\Omega}{c}\underbrace{\nabla_\alpha\xi_{(z)\beta} + \nabla_\beta\xi_{(z)\alpha}}_0 = 0.$$

$\vec{\ell}$ est donc un vecteur de Killing. Il correspond à la symétrie composée d'une translation temporelle et d'une rotation autour d'un axe. On peut l'appeler *symétrie hélicoïdale* car dans un diagramme d'espace-temps, les lignes de champ de $\vec{\ell}$ sont des hélices d'axe vertical. Bien entendu, cette symétrie n'est pas indépendante des deux symétries de l'espace-temps de Kerr que sont la stationnarité et l'axisymétrie.

5 En élevant (B.159) au carré, il vient

$$r_H^2 = m^2 + 2m\sqrt{m^2 - a^2} + m^2 - a^2 = 2m(m + \sqrt{m^2 - a^2}) - a^2 = 2mr_H - a^2,$$

d'où (B.165).

\mathcal{H} étant défini par $r = r_H$, on obtient

$$g_{00}|_{\mathcal{H}} = -1 + \frac{2mr_H}{\rho_H^2} = \rho_H^{-2}(-\rho_H^2 + 2mr_H) = \rho_H^{-2}(-r_H^2 - a^2 \cos^2 \theta + r_H^2 + a^2) = \rho_H^{-2} a^2 \sin^2 \theta,$$

$$g_{0\varphi}|_{\mathcal{H}} = -2amr_H \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} = -a(r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta \rho_H^{-2};$$

$$\begin{aligned} g_{\varphi\varphi}|_{\mathcal{H}} &= \left(r_H^2 + a^2 + 2a^2 mr_H \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right) \sin^2 \theta = (r_H^2 + a^2) \left(1 + a^2 \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} \right) \sin^2 \theta \\ &= \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) (r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta) \sin^2 \theta = \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta. \end{aligned}$$

6 Les composantes du vecteur $\vec{\ell}$ par rapport aux coordonnées de Kerr 3+1 sont

$$\ell^\alpha = \xi_{(0)}^\alpha + \frac{\Omega}{c} \xi_{(z)}^\alpha = \left(1, 0, 0, \frac{\Omega}{c} \right),$$

d'où le produit scalaire

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} = g_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu = g_{00} + 2g_{0\varphi} \frac{\Omega}{c} + g_{\varphi\varphi} \frac{\Omega^2}{c^2}.$$

Tenant compte des résultats de la question 5, le produit scalaire sur \mathcal{H} vaut donc

$$\begin{aligned} \vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \Big|_{\mathcal{H}} &= a^2 \rho_H^{-2} \sin^2 \theta - 2a \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} + \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \frac{\Omega^2}{c^2} \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} \left[a^2 - 2a(r_H^2 + a^2) \frac{\Omega}{c} + (r_H^2 + a^2)^2 \frac{\Omega^2}{c^2} \right] \\ &= \frac{\sin^2 \theta}{\rho_H^2} \left[a - (r_H^2 + a^2) \frac{\Omega}{c} \right]^2. \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{\ell}$ est du genre lumière sur l'horizon ssi $\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \Big|_{\mathcal{H}} = 0$. D'après l'expression ci-dessus, on en déduit la valeur que doit prendre Ω pour assurer cette propriété :

$$\boxed{\Omega = \frac{ca}{r_H^2 + a^2}}.$$

En utilisant (B.165), on peut écrire $\Omega = ca/(2mr_H)$. En remplaçant r_H par son expression (B.159), on obtient la formule

$$\Omega = \frac{ca}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}.$$

En combinant les Eqs. (5.31) et (5.29) du cours, on reconnaît la vitesse de rotation du trou noir, notée $\Omega_{\mathcal{H}}$ au Chap. 5.

Le trou noir de Schwarzschild est la limite $a = 0$ du trou noir de Kerr. On obtient donc $\Omega = 0$ pour un tel trou noir.

7 On a, étant données les composantes $(1, 0, 0, \Omega/c)$ de $\vec{\ell}$,

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_t = g_{\mu\nu} \ell^\mu \partial_t^\nu = c g_{\mu 0} \ell^\mu = c g_{00} + g_{0\varphi} \Omega.$$

Au vu des valeurs (B.166)-(B.168) des coefficients métriques sur l'horizon, on obtient, sur \mathcal{H} ,

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_t = c a^2 \rho_H^{-2} \sin^2 \theta - a \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta \Omega = a \rho_H^{-2} \sin^2 \theta \underbrace{(c a - (r_H^2 + a^2) \Omega)}_0 = 0.$$

Par ailleurs,

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_\theta = g_{\mu\nu} \ell^\mu \partial_\theta^\nu = g_{\mu\theta} \ell^\mu = g_{\theta\theta} \underbrace{\ell^\theta}_0 = 0$$

et

$$\vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_\varphi = g_{\mu\nu} \ell^\mu \partial_\varphi^\nu = g_{\mu\varphi} \ell^\mu = g_{0\varphi} + g_{\varphi\varphi} \frac{\Omega}{c},$$

soit, sur \mathcal{H} ,

$$\begin{aligned} \vec{\ell} \cdot \vec{\partial}_\varphi &= -a \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta + \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2)^2 \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} \\ &= \rho_H^{-2} (r_H^2 + a^2) \sin^2 \theta \left[\underbrace{(r_H^2 + a^2) \frac{\Omega}{c} - a}_0 \right] = 0. \end{aligned}$$

Le vecteur $\vec{\ell}$ est donc orthogonal aux trois vecteurs $\vec{\partial}_t$, $\vec{\partial}_\theta$ et $\vec{\partial}_\varphi$. Or, en chaque point, ces trois vecteurs engendrent l'espace tangent à \mathcal{H} , puisque ce dernier est l'hypersurface définie par $r = r_H = \text{const}$ (autrement dit, les coordonnées qui varient sur \mathcal{H} sont (t, θ, φ)). Il s'en suit que $\vec{\ell}$ est orthogonal à tout vecteur tangent à \mathcal{H} : $\vec{\ell}$ est donc normal à l'hypersurface \mathcal{H} .

En tant que vecteur du genre lumière, $\vec{\ell}$ est orthogonal à lui-même : $\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} = 0$. Or, comme $\vec{\ell}$ est normal à \mathcal{H} , la condition de tangence à \mathcal{H} n'est autre que l'orthogonalité à $\vec{\ell}$. On en conclut que $\vec{\ell}$ est tangent à \mathcal{H} . Une autre façon de le voir est de constater que $\vec{\ell}$ est une combinaison linéaire des vecteurs $\vec{\xi}_{(0)} = c^{-1} \vec{\partial}_t$ et $\vec{\xi}_{(z)} = \vec{\partial}_\varphi$, ces deux derniers étant tous deux tangents à \mathcal{H} .

Avoir une normale qui soit également tangente est caractéristique des *hypersurfaces du genre lumière*. Pour les autres types d'hypersurfaces, la normale est toujours transverse à l'hypersurface.

8 On a, pour tout vecteur \vec{v} ,

$$\begin{aligned} \vec{h} \cdot \vec{v} &= h_\mu v^\mu = \ell^\nu \nabla_\nu \ell_\mu v^\mu = -\ell^\nu \nabla_\mu \ell_\nu v^\mu = -\frac{1}{2} \nabla_\mu (\ell^\nu \ell_\nu) v^\mu = -\frac{1}{2} v^\mu \nabla_\mu (\ell^\nu \ell_\nu) \\ &= -\frac{1}{2} \nabla_{\vec{v}} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé l'équation de Killing pour $\vec{\ell}$ pour écrire la troisième égalité de la première ligne.

Si \vec{v} est tangent à \mathcal{H} , alors $\nabla_{\vec{v}}(\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) = 0$ puisque le scalaire $\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}$ est constant sur \mathcal{H} (il y vaut 0). On a donc, pour tout vecteur \vec{v} tangent à \mathcal{H} , $\vec{h} \cdot \vec{v} = 0$. Cela montre que le vecteur \vec{h} est normal à \mathcal{H} . Comme une hypersurface n'admet, en chaque point, qu'une seule direction normale, cela implique que \vec{h} est colinéaire à $\vec{\ell}$: $\vec{h} = \kappa \vec{\ell}$, d'où la relation (B.174).

9 Pour $\alpha = 0$, l'Eq. (B.175) donne $\ell^0 = dX^0/d\lambda$. Or $\ell^0 = 1$ (cf. question 6). D'où $X^0(\lambda) = \lambda + \text{const.}$ Puisque par définition, $X^0(\lambda) = ct$ le long de \mathcal{L} , on obtient bien

$$\lambda = ct + \text{const.}$$

Pour $\alpha \in \{0, 1, 2, 3\}$ fixé, considérons la composante ℓ^α comme un champ scalaire sur l'espace-temps. On reconnaît alors dans $\ell^\mu \partial \ell^\alpha / \partial x^\mu$ l'action du vecteur $\vec{\ell}$ sur ℓ^α (cf. Eqs. (2.17) et (2.14) du cours) :

$$\ell^\mu \frac{\partial \ell^\alpha}{\partial x^\mu} = \vec{\ell}(\ell^\alpha).$$

$\vec{\ell}$ étant le vecteur tangent à \mathcal{L} associé au paramètre λ , il vient (cf. Eq. (2.11) du cours)

$$\vec{\ell}(\ell^\alpha) = \frac{d\ell^\alpha}{d\lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{dX^\alpha}{d\lambda} \right) = \frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2}.$$

En combinant les deux équations ci-dessus, on obtient la formule (B.176) de l'énoncé.

Les quatre composantes de l'équation (B.174) s'écrivent successivement

$$\begin{aligned} \ell^\mu \nabla_\mu \ell^\alpha &= \kappa \ell^\alpha, \\ \ell^\mu \left(\frac{\partial \ell^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \ell^\nu \right) &= \kappa \ell^\alpha, \\ \ell^\mu \frac{\partial \ell^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu &= \kappa \ell^\alpha, \end{aligned}$$

où les $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ sont les symboles de Christoffel de la métrique \mathbf{g} par rapport aux coordonnées (x^α) . En utilisant les équations (B.175) et (B.176), on obtient

$$\frac{d^2 X^\alpha}{d\lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{dX^\mu}{d\lambda} \frac{dX^\nu}{d\lambda} = \kappa \frac{dX^\alpha}{d\lambda}.$$

On reconnaît l'équation des géodésiques, à savoir l'Eq. (2.138) du cours. Les lignes de champ de $\vec{\ell}$ sur \mathcal{H} sont donc des géodésiques lumière. On les appelle les *génératrices de l'horizon des événements*. La gravité de surface κ apparaît ainsi comme un "paramètre de non-affinité" : si $\kappa = 0$, le paramètre λ associé à $\vec{\ell}$ est un *paramètre affine* des génératrices.

10 Écrivons (B.174) sous la forme

$$\kappa \ell_\alpha = \ell^\mu \nabla_\mu \ell_\alpha.$$

Or l'équation de Killing pour $\vec{\ell}$ donne $\nabla_\mu \ell_\alpha = -\nabla_\alpha \ell_\mu$, d'où

$$\kappa \ell_\alpha = -\ell^\mu \nabla_\alpha \ell_\mu = -\frac{1}{2} \nabla_\alpha (\ell^\mu \ell_\mu).$$

On a donc établi l'Eq. (B.177) de l'énoncé.

Soit \vec{v} un vecteur quelconque tangent à \mathcal{H} . Comme $(\vec{\partial}_0, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi)$ engendrent les hyperplans tangents à \mathcal{H} , on a nécessairement $\vec{v} = v^0 \vec{\partial}_0 + v^\theta \vec{\partial}_\theta + v^\varphi \vec{\partial}_\varphi$. Autrement dit, les composantes de \vec{v} sont de la forme

$$v^\alpha = (v^0, 0, v^\theta, v^\varphi).$$

Puisque $\vec{\ell}$ est normal à \mathcal{H} , on a $\vec{\ell} \cdot \vec{v} = \ell_\mu v^\mu = 0$, soit d'après les composantes ci-dessus,

$$\ell_0 v^0 + \ell_\theta v^\theta + \ell_\varphi v^\varphi = 0.$$

Cette identité devant être vérifiée pour tout vecteur \vec{v} tangent à \mathcal{H} , c'est-à-dire pour tous les triplets $(v^0, v^\theta, v^\varphi)$, on en déduit que nécessairement $(\ell_0, \ell_\theta, \ell_\varphi) = (0, 0, 0)$, d'où la propriété (B.178).

11 $\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}$ étant un champ scalaire, les composantes de sa dérivée covariante se réduisent à des dérivées partielles, si bien que les composantes de l'Eq. (B.177) s'écrivent

$$\kappa \ell_\alpha = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}).$$

Pour $\alpha = 1$, on obtient l'Eq. (B.179).

On a

$$\begin{aligned} \ell_r &= g_{r\mu} \ell^\mu = g_{r0} + g_{r\varphi} \frac{\Omega}{c} = \frac{2mr}{\rho^2} - a \left(1 + \frac{2mr}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} \\ &= \frac{2mr}{\rho^2} \left(1 - a \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} \right) - a \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c}. \end{aligned}$$

En faisant $r = r_H$ et en remplaçant Ω par sa valeur obtenue à la question 6, il vient

$$\begin{aligned} \ell_r|_{\mathcal{H}} &= \frac{2mr_H}{\rho_H^2} \left(1 - a \sin^2 \theta \frac{a}{r_H^2 + a^2} \right) - a \sin^2 \theta \frac{a}{r_H^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{r_H^2 + a^2} \left[\frac{2mr_H}{\rho_H^2} \underbrace{(r_H^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta)}_{\rho_H^2} - a^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= \frac{1}{r_H^2 + a^2} \left[\underbrace{2mr_H}_{r_H^2 + a^2} - a^2 \sin^2 \theta \right] \\ &= \frac{r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta}{r_H^2 + a^2}, \end{aligned}$$

ce qui établit l'Eq. (B.180) de l'énoncé.

12 On a

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} &= g_{\mu\nu} \ell^\mu \ell^\nu = g_{00} + 2g_{0\varphi} \frac{\Omega}{c} + g_{\varphi\varphi} \frac{\Omega^2}{c^2} \\
&= -1 + \frac{2mr}{\rho^2} - 4am \frac{r \sin^2 \theta}{\rho^2} \frac{\Omega}{c} + \left(r^2 + a^2 + 2a^2 m \frac{r \sin^2 \theta}{\rho^2} \right) \sin^2 \theta \frac{\Omega^2}{c^2} \\
&= -1 + 2m \frac{r}{\rho^2} \left(1 - 2a \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} + a^2 \sin^4 \theta \frac{\Omega^2}{c^2} \right) + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{\Omega^2}{c^2} \\
&= -1 + 2m \frac{r}{\rho^2} \left(1 - a \sin^2 \theta \frac{\Omega}{c} \right)^2 + (r^2 + a^2) \sin^2 \theta \frac{\Omega^2}{c^2}.
\end{aligned}$$

En remplaçant Ω/c par $a/(r_H^2 + a^2)$, il vient

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} &= -1 + 2m \frac{r}{\rho^2} \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r_H^2 + a^2} \right)^2 + (r^2 + a^2) \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(r_H^2 + a^2)^2} \\
&= -1 + 2m \frac{r}{\rho^2} \left(\frac{r_H^2 + a^2 - a^2 \sin^2 \theta}{r_H^2 + a^2} \right)^2 + (r^2 + a^2) \frac{a^2 \sin^2 \theta}{(r_H^2 + a^2)^2} \\
&= -1 + \frac{1}{(r_H^2 + a^2)^2} \left[2m \rho_H^4 \frac{r}{\rho^2} + a^2 \sin^2 \theta (r^2 + a^2) \right],
\end{aligned}$$

ce qui établit l'Eq. (B.181) de l'énoncé.

À titre de vérification, faisons $r = r_H$ dans cette formule. Il vient

$$\begin{aligned}
\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \Big|_{\mathcal{H}} &= -1 + \frac{1}{(r_H^2 + a^2)^2} \left[\underbrace{2mr_H \rho_H^2}_{r_H^2 + a^2} + a^2 \sin^2 \theta (r_H^2 + a^2) \right] \\
&= -1 + \frac{1}{(r_H^2 + a^2)} \left[\underbrace{\rho_H^2 + a^2 \sin^2 \theta}_{r_H^2 + a^2} \right] = 0.
\end{aligned}$$

On retrouve donc le fait que $\vec{\ell}$ est du genre lumière sur \mathcal{H} .

On a

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{\rho^2} \right) = \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{r}{r^2 + a^2 \cos^2 \theta} \right) = \frac{r^2 + a^2 \cos^2 \theta - 2r^2}{(r^2 + a^2 \cos^2 \theta)^2} = \frac{a^2 \cos^2 \theta - r^2}{\rho^4}.$$

La dérivée par rapport à r de l'Eq. (B.181) est donc (rappelons que ρ_H est fonction de θ seulement)

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \right) = \frac{1}{(r_H^2 + a^2)^2} \left[2m \rho_H^4 \frac{a^2 \cos^2 \theta - r^2}{\rho^4} + 2a^2 r \sin^2 \theta \right].$$

La valeur sur \mathcal{H} est obtenue en faisant $r = r_H$ (et donc $\rho = \rho_H$) :

$$\left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\vec{\ell} \cdot \vec{\ell} \right) \right] \Big|_{\mathcal{H}} = \frac{1}{(r_H^2 + a^2)^2} \left[2m(a^2 \cos^2 \theta - r_H^2) + 2a^2 r_H \sin^2 \theta \right].$$

En écrivant $2m = (r_H^2 + a^2)/r_H$ [Eq. (B.165)], il vient

$$\begin{aligned}
\left[\frac{\partial}{\partial r} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) \right] \Big|_{\mathcal{H}} &= \frac{1}{r_H(r_H^2 + a^2)^2} [(r_H^2 + a^2)(a^2 \cos^2 \theta - r_H^2) + 2a^2 r_H^2 \sin^2 \theta] \\
&= \frac{1}{r_H(r_H^2 + a^2)^2} (a^2 r_H^2 \cos^2 \theta - r_H^4 + a^4 \cos^2 \theta \underbrace{- a^2 r_H^2 + 2a^2 r_H^2 \sin^2 \theta}_{-a^2 r_H^2 \cos^2 \theta + a^2 r_H^2 \sin^2 \theta}) \\
&= \frac{1}{r_H(r_H^2 + a^2)^2} (a^2 r_H^2 - r_H^4 + a^4 \cos^2 \theta - a^2 r_H^2 \cos^2 \theta) \\
&= \frac{1}{r_H(r_H^2 + a^2)^2} (a^2 - r_H^2)(r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta),
\end{aligned}$$

ce qui établit l'Eq. (B.182) de l'énoncé.

13 La valeur de κ se déduit des Eqs. (B.179), (B.180) et (B.182) :

$$\kappa = -\frac{1}{2} (\ell_r|_{\mathcal{H}})^{-1} \left[\frac{\partial}{\partial r} (\vec{\ell} \cdot \vec{\ell}) \right] \Big|_{\mathcal{H}} = -\frac{1}{2} \frac{r_H^2 + a^2}{r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta} \frac{(a^2 - r_H^2)(r_H^2 + a^2 \cos^2 \theta)}{r_H(r_H^2 + a^2)^2},$$

soit

$$\boxed{\kappa = \frac{r_H^2 - a^2}{2r_H(r_H^2 + a^2)}}.$$

On constate que κ ne dépend pas de θ : κ est donc constante sur \mathcal{H} .

En utilisant l'Eq. (B.165) sous la forme $a^2 = 2mr_H - r_H^2$, on peut écrire

$$\kappa = \frac{r_H^2 - 2mr_H + r_H^2}{2r_H(r_H^2 + 2mr_H - r_H^2)} = \frac{2r_H^2 - 2mr_H}{4mr_H^2},$$

soit

$$\boxed{\kappa = \frac{r_H - m}{2mr_H}}.$$

Enfin, en remplaçant r_H par l'expression (B.159), il vient

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}}.$$

Pour un trou noir de Schwarzschild, $a = 0$ et donc

$$\kappa = \frac{m}{2m \times 2m} = \frac{1}{4m},$$

soit, en fonction de la masse M du trou noir :

$$\kappa = \frac{c^2}{4GM}.$$

Pour un trou noir de Kerr extrême, $a = m$, si bien que $\kappa = 0$ dans ce cas.

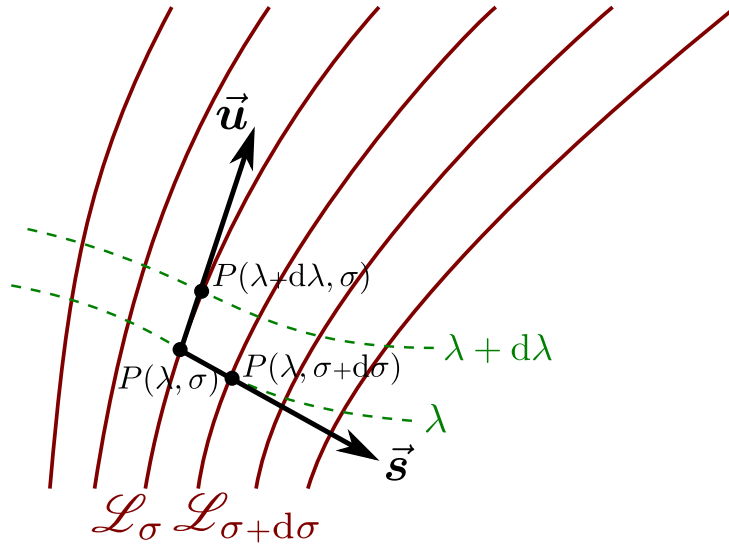


FIGURE C.15 – Famille $(\mathcal{L}_\sigma)_{\sigma \in I}$ de géodésiques, de vecteur tangent \vec{u} et de vecteur séparation \vec{s} .

C.15 Déviation géodésique

1 Le vecteur tangent associé au paramétrage de \mathcal{L}_σ par λ est défini par [cf. Eq. (2.33) du cours, ainsi que Fig. C.15]

$$\vec{u} = \left. \frac{d\vec{P}}{d\lambda} \right|_\sigma.$$

Les composantes dans $(\vec{\partial}_\alpha)$ du vecteur déplacement élémentaire $d\vec{P}$ le long de \mathcal{L}_σ étant [cf. Eq. (2.37) du cours]

$$dP^\alpha = dx^\alpha|_\sigma = dX^\alpha|_\sigma = \frac{\partial X^\alpha}{\partial \lambda} d\lambda,$$

on en déduit que $u^\alpha = \partial X^\alpha / \partial \lambda$, soit la formule (B.185) de l'énoncé.

2 $\Sigma = \bigcup_{\sigma \in I} \mathcal{L}_\sigma$ est une sous-variété de dimension 2 de \mathcal{E} . Les coordonnées naturelles sur Σ sont (λ, σ) . Ces coordonnées sont singulières en tout point P_0 où au moins deux géodésiques se croisent : la coordonnée σ de P_0 n'est en effet pas définie de manière univoque, puisque P_0 appartient à deux géodésiques distinctes.

3 Les coordonnées du point $P(\lambda, \sigma + d\sigma)$ étant $X^\alpha(\lambda, \sigma + d\sigma)$ et celle de $P(\lambda, \sigma)$ étant $X^\alpha(\lambda, \sigma)$, on a, par définition de \vec{s} (cf. aussi la Fig. C.15),

$$\begin{aligned} d\sigma s^\alpha &= X^\alpha(\lambda, \sigma + d\sigma) - X^\alpha(\lambda, \sigma) \\ &= \frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma} d\sigma, \end{aligned}$$

d'où $s^\alpha = \partial X^\alpha / \partial \sigma$, soit la formule (B.186) de l'énoncé.

4 **Exemple 1** : Les courbes \mathcal{L}_σ sont des *droites*, d'équation cartésienne $x = \sigma$. Elles sont donc parallèles à l'axe des ordonnées (cf. Fig. C.16). Il s'agit bien de géodésiques

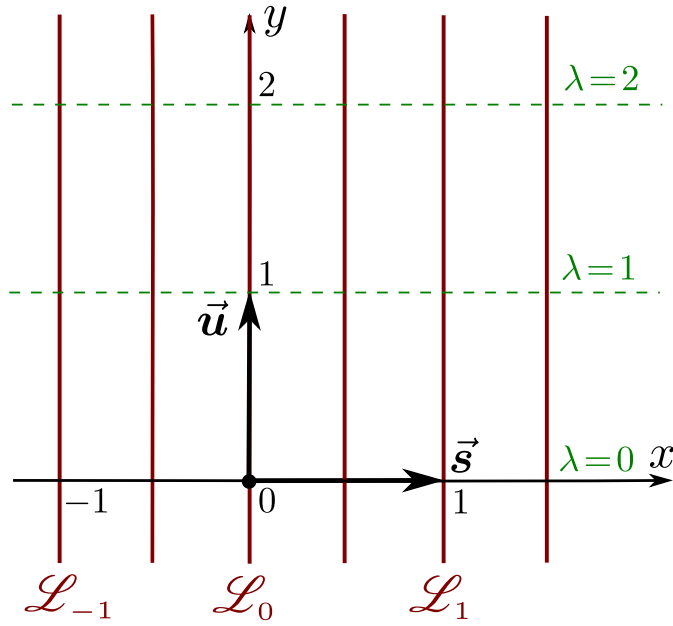


FIGURE C.16 – Géodésiques de l'exemple 1.

car les géodésiques du plan euclidien sont toutes les droites du plan. D'après (B.187), $X^x(\lambda, \sigma) = \sigma$ et $X^y(\lambda, \sigma) = \lambda$. On déduit alors de (B.185) et (B.186) que $u^\alpha = (0, 1)$ et $s^\alpha = (1, 0)$, c'est-à-dire

$$\vec{u} = \vec{\partial}_y \quad \text{et} \quad \vec{s} = \vec{\partial}_x.$$

Ces deux vecteurs sont représentés en $(\lambda, \sigma) = (0, 0)$ sur la Fig. C.16.

Exemple 2 : Les courbes \mathcal{L}_σ sont des droites, d'équation cartésienne $y = x/\tan \sigma$ pour $\sigma \neq 0$ et $x = 0$ pour $\sigma = 0$. Puisqu'il s'agit de droites, ce sont bien des géodésiques du plan euclidien, comme pour l'exemple 1. Les droites \mathcal{L}_σ se coupent à l'origine des coordonnées (x, y) (cf. Fig. C.17). En vertu de la discussion de la question 2, il s'agit d'un point singulier pour les coordonnées (λ, σ) de Σ ($\Sigma = \mathcal{E}$ dans le cas présent). D'après (B.188), $X^x(\lambda, \sigma) = (1 + \lambda) \sin \sigma$ et $X^y(\lambda, \sigma) = (1 + \lambda) \cos \sigma$. On déduit alors de (B.185) et (B.186) que

$$u^\alpha = (\sin \sigma, \cos \sigma) \quad \text{et} \quad s^\alpha = ((1 + \lambda) \cos \sigma, -(1 + \lambda) \sin \sigma),$$

soit

$$\vec{u} = \sin \sigma \vec{\partial}_x + \cos \sigma \vec{\partial}_y \quad \text{et} \quad \vec{s} = (1 + \lambda) (\cos \sigma \vec{\partial}_x - \sin \sigma \vec{\partial}_y).$$

Ces deux vecteurs sont représentés en $(\lambda, \sigma) = (0, 0)$, ainsi qu'en $(\lambda, \sigma) = (0, \pi/8)$ et $(\lambda, \sigma) = (1, \pi/4)$, sur la Fig. C.17.

Exemple 3 : les courbes \mathcal{L}_σ sont des courbes de longitude constante (égale à σ) sur la sphère : il s'agit donc de demi-cercles méridiens (cf. Fig. C.18). Comme tous les grands cercles de la sphère, ces derniers sont bien des géodésiques de $(\mathbb{S}^2, \mathbf{g})$. D'après (B.189), $X^\theta(\lambda, \sigma) = \pi/2 - \lambda$ et $X^\varphi(\lambda, \sigma) = \sigma$. On déduit alors de (B.185) et (B.186) que $u^\alpha = (-1, 0)$ et $s^\alpha = (0, 1)$, c'est-à-dire

$$\vec{u} = -\vec{\partial}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{s} = \vec{\partial}_\varphi.$$

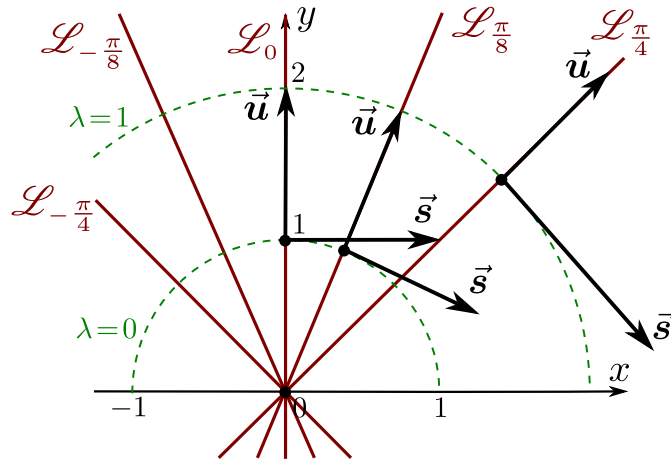


FIGURE C.17 – Géodésiques de l'exemple 2.

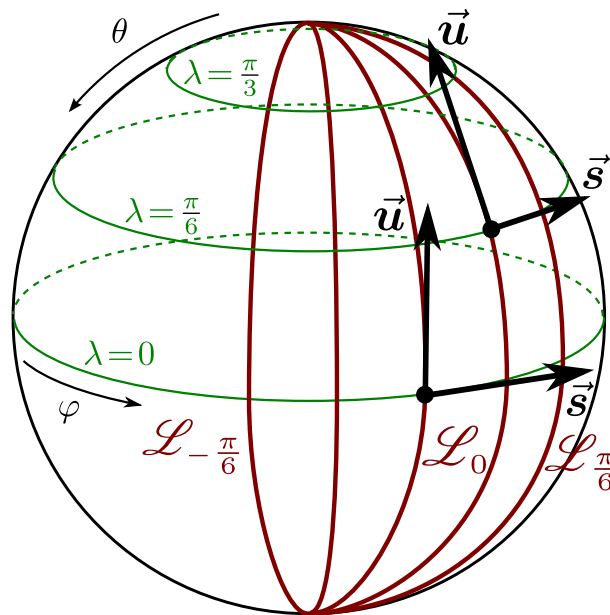


FIGURE C.18 – Géodésiques de l'exemple 3.

Ces deux vecteurs sont représentés en $(\lambda, \sigma) = (0, 0)$, ainsi qu'en $(\lambda, \sigma) = (\pi/6, \pi/12)$, sur la Fig. C.18.

5 D'après la loi de dérivation d'une fonction composée, il vient

$$\frac{\partial F}{\partial \lambda} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \lambda} \quad \text{et} \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \sigma}$$

Les relations (B.185) et (B.186) conduisent alors immédiatement à (B.192).

6 En exprimant la dérivée covariante à l'aide des symboles de Christoffel [Eqs. (4.32)

et (4.59) du cours], on obtient

$$u^\mu \nabla_\mu u_*^\alpha = u^\mu \left(\frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u_*^\nu \right)$$

Or sur Σ , $u_*^\nu = u^\nu$. Par ailleurs, en vertu de (B.192),

$$u^\mu \frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \lambda}.$$

On obtient ainsi la première des identités de (B.193). De même,

$$s^\mu \nabla_\mu u_*^\alpha = s^\mu \left(\frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u_*^\nu \right),$$

avec, d'après (B.192),

$$s^\mu \frac{\partial u_*^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma},$$

ce qui conduit à la deuxième des identités de (B.193). Enfin, la dernière identité découle de

$$u^\mu \nabla_\mu s_*^\alpha = u^\mu \left(\frac{\partial s_*^\alpha}{\partial x^\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} s_*^\nu \right)$$

avec, sur Σ , $s_*^\nu = s^\nu$ et

$$u^\mu \frac{\partial s_*^\alpha}{\partial x^\mu} = \frac{\partial s^\alpha}{\partial \lambda}.$$

Les membres de droite des identités (B.193) ne faisant intervenir ni \vec{u}_* , ni \vec{s}_* , mais seulement leurs valeurs \vec{u} et \vec{s} sur Σ , on conclut que les vecteurs $\nabla_{\vec{u}} \vec{u}_*$, $\nabla_{\vec{s}} \vec{u}_*$ et $\nabla_{\vec{u}} \vec{s}_*$, dont les composantes constituent les membres de gauche de (B.193), sont indépendants du choix des extensions \vec{u}_* et \vec{s}_* .

7 D'après les résultats de la question précédente, les composantes du vecteur $\nabla_{\vec{u}} \vec{u}$ dans la base naturelle $(\vec{\partial}_\alpha)$ sont

$$u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu.$$

En utilisant (B.185), il vient

$$u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial X^\nu}{\partial \lambda}.$$

Or, \mathcal{L}_σ étant une géodésique et λ un paramètre affine,

$$\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \lambda^2} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} \frac{\partial X^\mu}{\partial \lambda} \frac{\partial X^\nu}{\partial \lambda} = 0.$$

Cette relation n'est en effet pas autre chose que l'équation des géodésiques [Eq. (2.132) ou (2.139) du cours], avec les dérivées totales remplacées par des dérivées partielles car

il s'agit de prendre des dérivées le long d'une seule courbe \mathcal{L}_σ , donc à σ fixé. On a donc $u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = 0$, d'où le résultat (B.194).

Une conséquence immédiate est

$$\nabla_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = 2\vec{u} \cdot \nabla_{\vec{u}} \vec{u} = 0.$$

Puisque d'après (B.192),

$$\nabla_{\vec{u}}(\vec{u} \cdot \vec{u}) = \frac{\partial}{\partial \lambda}(\vec{u} \cdot \vec{u}),$$

on en déduit que $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est constant à σ fixé, c'est-à-dire le long d'une géodésique \mathcal{L}_σ . Les valeurs pour les exemples de la question 4 sont les suivantes :

- Exemple 1 : puisque $\vec{u} = \vec{\partial}_y$, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$.
- Exemple 2 : puisque $\vec{u} = \sin \sigma \vec{\partial}_x + \cos \sigma \vec{\partial}_y$, on a également $\vec{u} \cdot \vec{u} = 1$.
- Exemple 3 : puisque $\vec{u} = -\vec{\partial}_\theta$, on a $\vec{u} \cdot \vec{u} = g_{\theta\theta} = 1$, d'après l'expression (B.190) des coefficients métriques.

8 On a, en utilisant la dernière des identités (B.193), puis (B.186),

$$u^\mu \nabla_\mu s^\alpha = \frac{\partial s^\alpha}{\partial \lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu s^\nu = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \lambda \partial \sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu s^\nu.$$

De même, en utilisant la deuxième identité de (B.193), puis (B.185), il vient

$$s^\mu \nabla_\mu u^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial \sigma} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} s^\mu u^\nu = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \sigma \partial \lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} s^\mu u^\nu.$$

Or $\frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \lambda \partial \sigma} = \frac{\partial^2 X^\alpha}{\partial \sigma \partial \lambda}$ et, par symétrie des symboles de Christoffel sur leurs deux derniers indices, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu s^\nu = \Gamma^\alpha_{\nu\mu} s^\nu u^\mu = \Gamma^\alpha_{\mu\nu} s^\mu u^\nu$. On en déduit que $u^\mu \nabla_\mu s^\alpha = s^\mu \nabla_\mu u^\alpha$, soit le résultat (B.195) de l'énoncé.

Remarque : Il n'est pas très surprenant de trouver que les vecteurs \vec{u} et \vec{s} commutent car ce sont les vecteurs de la base naturelle associée aux coordonnées (λ, σ) de la surface Σ . En effet, leur action sur les champs scalaires de Σ se réduit à la dérivée partielle par rapport à λ (pour \vec{u}) ou par rapport à σ (pour \vec{s}), ainsi que le montrent les identités (B.192) établies à la question 5.

9 En terme du paramètre affine λ' , l'équation de la géodésique \mathcal{L}_σ s'écrit

$$x^\alpha = X'^\alpha(\lambda', \sigma) = X^\alpha(\lambda(\lambda', \sigma), \sigma) \quad 0 \leq \alpha \leq n-1, \quad (\text{C.77})$$

où les X'^α sont n fonctions $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a priori différentes des fonctions X^α . Dans la deuxième égalité ci-dessus, nous avons exprimé λ comme une fonction de λ' et σ en inversant la relation (B.196) :

$$\lambda(\lambda', \sigma) = \lambda' - b(\sigma).$$

Les composantes du vecteur \vec{s}' s'obtiennent à partir de (B.186) :

$$s'^\alpha = \frac{\partial X'^\alpha}{\partial \sigma} \Big|_{\lambda'} = \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial \lambda}}_{u^\alpha} \Big|_\sigma \underbrace{\frac{\partial \lambda}{\partial \sigma}}_{-db/d\sigma} \Big|_{\lambda'} + \underbrace{\frac{\partial X^\alpha}{\partial \sigma}}_{s^\alpha} \Big|_\lambda \underbrace{\frac{\partial \sigma}{\partial \sigma}}_1 \Big|_{\lambda'},$$

où la deuxième égalité découle de l'Eq. (C.77) ci-dessus et de la loi de dérivation des fonctions composées. On a donc

$$\vec{s}' = \vec{s} - \frac{db}{d\sigma} \vec{u}.$$

Par conséquent,

$$\vec{u} \cdot \vec{s}' = \vec{u} \cdot \vec{s} - \frac{db}{d\sigma} \vec{u} \cdot \vec{u}.$$

Si les géodésiques sont du genre espace ou temps, alors $\vec{u} \cdot \vec{u} \neq 0$ et il suffit de choisir la fonction $b(\sigma)$ telle que

$$\frac{db}{d\sigma} = \frac{\vec{u} \cdot \vec{s}}{\vec{u} \cdot \vec{u}}$$

pour assurer $\vec{u} \cdot \vec{s}' = 0$.

Remarque : Puisque dans (B.196) le coefficient devant λ est l'unité, le changement de paramètre $\lambda \mapsto \lambda'$ ne change pas le vecteur tangent : $\vec{u}' = \vec{u}$. Il s'agit en fait d'un simple changement de l'origine du paramètre affine sur chacune des géodésiques (translation de $b(\sigma)$). En ajustant la translation suivant l'équation ci-dessus, on peut rendre le vecteur séparation orthogonal à la géodésique.

10 Puisque $V^\alpha = u^\mu \nabla_\mu s^\alpha$, la dernière identité de (B.193) donne

$$V^\alpha = \frac{\partial s^\alpha}{\partial \lambda} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu s^\nu.$$

Nous allons utiliser cette relation pour calculer \vec{V} dans chacun des trois exemples de la question 4.

Exemple 1 : pour les coordonnées cartésiennes (x, y) et la métrique euclidienne, $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = 0$, si bien que la formule ci-dessus se réduit à $V^\alpha = \partial s^\alpha / \partial \lambda$. Comme $s^\alpha = (1, 0)$ est constant, on conclut que la vitesse de déviation, et a fortiori l'accélération de déviation, est partout nulle :

$$\boxed{\vec{V} = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{A} = 0}.$$

C'est évident graphiquement (cf. Fig. C.16) : la séparation entre les géodésiques est constante, ces dernières étant parallèles.

Exemple 2 : comme ci-dessus, $V^\alpha = \partial s^\alpha / \partial \lambda$. Puisque $s^\alpha = ((1 + \lambda) \cos \sigma, -(1 + \lambda) \sin \sigma)$, il vient

$$V^\alpha = (\cos \sigma, -\sin \sigma),$$

d'où

$$\boxed{\vec{V} = \frac{1}{1 + \lambda} \vec{s}}.$$

On en déduit

$$\vec{A} = \nabla_{\vec{u}} \vec{V} = -\frac{1}{(1 + \lambda)^2} (\nabla_{\vec{u}} \lambda) \vec{s} + \frac{1}{1 + \lambda} \nabla_{\vec{u}} \vec{s}.$$

Or $\nabla_{\vec{u}} \lambda = \frac{\partial \lambda}{\partial \lambda} = 1$ [cf. Eq. (B.192)] et $\nabla_{\vec{u}} \vec{s} = \vec{V} = (1 + \lambda)^{-1} \vec{s}$. On conclut que

$$\boxed{\vec{A} = 0}.$$

Exemple 3 : puisque $s^\alpha = (0, 1)$, $\partial s^\alpha / \partial \lambda = 0$ et la formule permettant le calcul de V^α se réduit à

$$V^\alpha = \Gamma_{\mu\nu}^\alpha u^\mu s^\nu = -\Gamma_{\theta\varphi}^\alpha,$$

où la deuxième égalité découle de $u^\mu = (-1, 0)$ et $s^\nu = (0, 1)$. Comme $\Gamma_{\theta\varphi}^\theta = 0$ et $\Gamma_{\theta\varphi}^\varphi = 1/\tan\theta$, on obtient

$$V^\alpha = \left(0, -\frac{1}{\tan\theta}\right),$$

c'est-à-dire

$$\vec{V} = -\frac{1}{\tan\theta} \vec{\partial}_\varphi = -\frac{1}{\tan\theta} \vec{s}.$$

On en déduit

$$\vec{A} = \nabla_{\vec{u}} \vec{V} = \frac{1}{\sin^2\theta} (\nabla_{\vec{u}}\theta) \vec{s} - \frac{1}{\tan\theta} \nabla_{\vec{u}} \vec{s}.$$

Or $\nabla_{\vec{u}}\theta = \nabla_{-\vec{\partial}_\theta}\theta = -\nabla_{\vec{\partial}_\theta}\theta = -1$ et $\nabla_{\vec{u}} \vec{s} = \vec{V} = -1/\tan\theta \vec{s}$. Puisque $-1/\sin^2\theta + 1/\tan^2\theta = -1$, on obtient

$$\vec{A} = -\vec{s} = -\vec{\partial}_\varphi.$$

11 On a, en utilisant la relation de commutation (B.195), puis la règle de Leibniz,

$$A^\alpha = u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \nabla_\nu s^\alpha) = u^\mu \nabla_\mu (s^\nu \nabla_\nu u^\alpha) = u^\mu s^\nu \nabla_\mu \nabla_\nu u^\alpha + u^\mu \nabla_\mu s^\nu \nabla_\nu u^\alpha.$$

L'identité de Ricci [cf. Eq. (4.99) du cours] permet d'écrire

$$\nabla_\mu \nabla_\nu u^\alpha = \nabla_\nu \nabla_\mu u^\alpha + R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho,$$

si bien que

$$A^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu + s^\nu u^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu u^\alpha + u^\mu \nabla_\mu s^\nu \nabla_\nu u^\alpha.$$

Or,

$$u^\mu \nabla_\nu \nabla_\mu u^\alpha = \nabla_\nu \underbrace{(u^\mu \nabla_\mu u^\alpha)}_0 - \nabla_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = -\nabla_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\alpha,$$

où le 0 traduit l'identité géodésique (B.194). Il vient donc

$$A^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu - s^\nu \nabla_\nu u^\mu \nabla_\mu u^\alpha + u^\mu \nabla_\mu s^\nu \nabla_\nu u^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu + \nabla_\mu u^\alpha \underbrace{(u^\nu \nabla_\nu s^\mu - s^\nu \nabla_\nu u^\mu)}_0,$$

où l'on a utilisé une nouvelle fois la relation de commutation (B.195). Au final, il ne reste que

$$A^\alpha = R^\alpha_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu.$$

Puisque $A^\alpha = u^\mu \nabla_\mu (u^\nu \nabla_\nu s^\alpha)$, on a bien établi l'équation de déviation géodésique (B.199).

Remarque : L'équation de déviation géodésique caractérise complètement le tenseur de courbure de Riemann et peut donc être utilisée pour définir ce dernier, plutôt que la non-commutativité du transport parallèle le long d'une courbe fermée utilisée en cours (§ 4.3).

Si l'espace $(\mathcal{E}, \mathbf{g})$ est plat, autrement dit si $\mathbf{Riem} = 0$, l'équation de déviation géodésique implique $\nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} \vec{s} = 0$, ou de manière équivalente,

$$\nabla_{\vec{u}} \vec{V} = 0.$$

Si les géodésiques sont parallèles pour $\lambda = 0$, c'est-à-dire si $\vec{V}|_{\lambda=0} = 0$, l'équation différentielle du premier ordre ci-dessus implique que \vec{V} va rester nul pour tous les λ ultérieurs. Plus précisément, cette équation différentielle s'écrit, en composantes,

$$\frac{\partial V^\alpha}{\partial \lambda} = -\Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu V^\nu.$$

Le long de chaque géodésique \mathcal{L}_σ , il s'agit d'une équation différentielle ordinaire en V^α , du premier ordre et homogène, de sorte que $V^\alpha|_{\lambda=0} = 0$ implique bien $V^\alpha = 0$ pour tout $\lambda \geq 0$. On en conclut que, dans un espace plat, des géodésiques initialement parallèles restent parallèles. Cela est bien vérifié par les géodésiques de l'exemple 1. Par contre, les géodésiques de l'exemple 3 sont parallèles pour $\lambda = 0$ (c'est évident sur la Fig. C.18 et on le vérifie sur l'expression de \vec{V} obtenue à la question 10 : $\vec{V} = -1/\tan \theta \vec{\partial}_\varphi$ avec $1/\tan \theta \rightarrow 0$ lorsque $\theta \rightarrow \pi/2$, c'est-à-dire $\lambda \rightarrow 0$), mais ne le sont plus pour $\lambda > 0$. Elles se rencontrent même toutes au pôle Nord pour $\lambda = \pi/2$. Cela traduit le fait que la sphère est un espace courbe : $\mathbf{Riem} \neq 0$.

12 Pour le plan euclidien $\mathbf{Riem} = 0$, si bien que l'équation de déviation géodésique implique $\vec{A} = 0$. C'est effectivement la valeur de \vec{A} trouvée dans les exemples 1 et 2.

Pour l'exemple 3, l'équation de déviation géodésique et les valeurs de \vec{u} et \vec{s} obtenues à la question 4 conduisent à

$$\mathbf{A} = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{u}, \vec{u}, \vec{s}) = \mathbf{Riem}(\cdot, -\vec{\partial}_\theta, -\vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi) = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\theta, \vec{\partial}_\varphi),$$

la dernière équation résultant de la multilinéarité du tenseur de Riemann. Par définition des composantes d'un tenseur, cette relation peut s'écrire

$$\mathbf{A} = R^\theta_{\theta\theta\varphi} \vec{\partial}_\theta + R^\varphi_{\theta\theta\varphi} \vec{\partial}_\varphi.$$

Puisque $R^\theta_{\theta\theta\varphi} = 0$ et $R^\varphi_{\theta\theta\varphi} = -1$, on retrouve bien la valeur obtenue à la question 10 : $\vec{A} = -\vec{\partial}_\varphi$.

13 Si les géodésiques \mathcal{L}_σ sont du genre temps, leurs vecteurs tangents sont nécessairement aussi du genre temps. On a donc $\vec{u} \cdot \vec{u} < 0$. Or nous avons vu à la question 7 que $\vec{u} \cdot \vec{u}$ est constant le long de \mathcal{L}_σ . La transformation

$$\lambda \mapsto \lambda' := \sqrt{-\vec{u} \cdot \vec{u}} \lambda$$

est donc un changement de paramètre affine. Le vecteur tangent correspondant est

$$\vec{u}' = \left. \frac{d\vec{P}}{d\lambda'} \right|_\sigma = \underbrace{\left. \frac{d\vec{P}}{d\lambda} \right|_\sigma}_{\vec{u}} \frac{d\lambda}{d\lambda'} = \frac{1}{\sqrt{-\vec{u} \cdot \vec{u}}} \vec{u}.$$

Il vérifie donc $\vec{u}' \cdot \vec{u}' = -1$.

Si l'on se ramène au cas $\vec{u} \cdot \vec{u} = -1$ par la procédure ci-dessus, alors on peut interpréter \vec{u} comme une 4-vitesse et chaque géodésique \mathcal{L}_σ comme la ligne d'univers d'un observateur. Le paramètre affine λ est alors égal, à un facteur c près, au temps propre τ de l'observateur [cf. l'Eq. (2.84) du cours] :

$$\lambda = c\tau.$$

La métrique g étant non dégénérée, l'espace orthogonal à un vecteur non nul donné est nécessairement de dimension $4 - 1 = 3$. C'est donc la dimension de $E_{\vec{u}}$. Ainsi que nous l'avons vu en cours (cf. § 2.5.2), $E_{\vec{u}}$ s'interprète comme l'espace local de repos de l'observateur de 4-vitesse \vec{u} .

14 D'après l'équation de déviation géodésique (B.199),

$$\vec{u} \cdot \vec{A} = g_{\alpha\beta} u^\alpha A^\beta = g_{\alpha\beta} u^\alpha R^\beta_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu s^\nu = R_{\alpha\rho\mu\nu} u^\alpha u^\rho u^\mu s^\nu.$$

Or la propriété d'antisymétrie $R_{\alpha\rho\mu\nu} = -R_{\rho\alpha\mu\nu}$ [Eq. (4.103) du cours] implique $R_{\alpha\rho\mu\nu} u^\alpha u^\rho = 0$. On en déduit donc que $\vec{u} \cdot \vec{A} = 0$. Par conséquent $\vec{A} \in E_{\vec{u}}$ et l'application \mathbf{K} définie par (B.201) est bien définie. Notons qu'elle s'applique à tout vecteur $\vec{s} \in E_{\vec{u}}$ (pas nécessairement un vecteur séparation d'une famille de géodésiques). Il s'agit d'une application linéaire en vertu de la multilinéarité du tenseur de Riemann.

On a, pour tout couple $(\vec{v}, \vec{w}) \in E_{\vec{u}} \times E_{\vec{u}}$,

$$\vec{v} \cdot \mathbf{K}(\vec{w}) = g_{\alpha\beta} v^\alpha K^\beta(\vec{w}) = g_{\alpha\beta} v^\alpha R^\beta_{\rho\mu\nu} u^\rho u^\mu w^\nu = R_{\alpha\rho\mu\nu} v^\alpha u^\rho u^\mu w^\nu.$$

Or en utilisant successivement les symétries (4.105), (4.102) et (4.103) du tenseur de Riemann vues en cours, on peut écrire

$$R_{\alpha\rho\mu\nu} = R_{\mu\nu\alpha\rho} = -R_{\mu\nu\rho\alpha} = R_{\nu\mu\rho\alpha},$$

si bien que

$$\vec{v} \cdot \mathbf{K}(\vec{w}) = R_{\alpha\rho\mu\nu} v^\alpha u^\rho u^\mu w^\nu = R_{\nu\mu\rho\alpha} w^\nu u^\rho u^\mu v^\alpha = \vec{w} \cdot \mathbf{K}(\vec{v}),$$

ce qui prouve la symétrie de l'opérateur \mathbf{K} .

Si (\vec{e}_α) est une base orthonormale de $\mathcal{T}_P(\mathcal{E})$ telle que $\vec{e}_0 = \vec{u}$ alors (\vec{e}_i) est une orthonormale de $E_{\vec{u}}$. On peut donc décomposer tout vecteur $\vec{v} \in E_{\vec{u}}$ comme $\vec{v} = v^i \vec{e}_i$ et écrire

$$\mathbf{K}(\vec{v}) = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{u}, \vec{u}, \vec{v}) = \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{e}_0, \vec{e}_0, v^j \vec{e}_j) = v^j \mathbf{Riem}(\cdot, \vec{e}_0, \vec{e}_0, \vec{e}_j),$$

où l'avant-dernière égalité découle de la multilinéarité du tenseur de Riemann. En désignant par $R^\alpha_{\beta\mu\nu}$ les composantes du tenseur de Riemann dans la base orthonormale (\vec{e}_α) et non plus dans la base naturelle associée aux coordonnées (x^α) , l'égalité ci-dessus peut se réécrire comme

$$\mathbf{K}(\vec{v}) = v^j R^i_{00j} \vec{e}_i = -R^i_{0j0} v^j \vec{e}_i,$$

la deuxième égalité résultant de l'antisymétrie des deux derniers indices du tenseur de Riemann. La matrice K^i_j de \mathbf{K} dans la base (\vec{e}_i) étant définie par

$$\mathbf{K}(\vec{v}) = K^i_j v^j \vec{e}_i,$$

on en déduit immédiatement

$$\boxed{K^i_j = -R^i_{0j0}}.$$

On a

$$\text{tr } \mathbf{K} = K^i_i = -R^i_{0i0} = -R^i_{0i0} - \underbrace{R^0_{000}}_0 = -R^\mu_{0\mu0}.$$

Au vu de la définition du tenseur de Ricci [Eq. (4.108) du cours], on constate que

$$\text{tr } \mathbf{K} = -R_{00}.$$

Or dans le vide, le tenseur de Ricci est identiquement nul, en vertu de l'équation d'Einstein. On y a donc $\text{tr } \mathbf{K} = 0$.

15 Dans un référentiel inertiel, l'équation du mouvement d'une particule sous l'effet du seul champ gravitationnel est

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x^i}.$$

Puisque $x^i = X^i(t, \sigma)$, cette équation conduit à l'Eq. (B.203) de l'énoncé.

La définition de s^i se traduit par

$$s^i = \frac{\partial X^i}{\partial \sigma}.$$

Prenons alors la dérivée partielle des équations du mouvement (B.203) par rapport à σ :

$$\frac{\partial^3 X^i}{\partial \sigma \partial t^2} = -\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right).$$

Dans le membre de gauche, on peut permuter les dérivées partielles et écrire

$$\frac{\partial^3 X^i}{\partial \sigma \partial t^2} = \frac{\partial^3 X^i}{\partial t^2 \partial \sigma} = \frac{\partial^2 s^i}{\partial t^2}.$$

Dans le membre de droite, en utilisant le fait que le champ gravitationnel est stationnaire, on a $\Phi = \Phi(x^j) = \Phi(X^i(t, \sigma))$, si bien que

$$\frac{\partial}{\partial \sigma} \left(\frac{\partial \Phi}{\partial x^i} \right) = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial X^j}{\partial \sigma} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} s^j.$$

En remplaçant les membres de gauche et de droite par les expressions ci-dessus, on obtient l'Eq. (B.204) de l'énoncé. Cette équation correspond au *phénomène de marée*. Considérons par l'exemple le référentiel lié à la particule \mathcal{P}_0 d'indice $\sigma = 0$. Ce référentiel n'est pas

pas inertiel (du point de vue newtonien) et $\frac{\partial^2 s^i}{\partial t^2}$ s'interprète comme l'accélération d'une particule proche de \mathcal{P}_0 sous l'effet de la force de marée (par unité de masse)

$$f^i = -\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} s^j.$$

16 Le mouvement de particules test dans un champ gravitationnel donné s'effectue le long de géodésiques. Le mouvement relatif de ces dernières (déviation) est donné par $\mathbf{A} = \mathbf{K}(\vec{s})$. En terme des composantes dans la base (\vec{e}_i) , cette équation s'écrit, au vu du résultat de la question 14,

$$A^i = -R^i{}_{0j0} s^j.$$

La propriété (B.206) montre qu'à la limite d'un champ gravitationnel non relativiste,

$$A^i \simeq -\frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^i \partial x^j} s^j.$$

Dans cette même limite, puisque les coordonnées (x^i) sont cartésiennes, on peut exprimer les dérivées covariantes le long de \vec{u} qui interviennent dans la définition de \vec{A} par des dérivées partielles par rapport à λ et obtenir ainsi

$$A^i \simeq \frac{\partial^2 s^i}{\partial \lambda^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s^i}{\partial \tau^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 s^i}{\partial t^2}.$$

En combinant avec l'expression ci-dessus de A^i en terme de Φ , on retrouve l'équation de marée newtonienne (B.204).

D'après (B.206), on a

$$R_{00} = R^\mu{}_{0\mu 0} = R^i{}_{0i0} = \frac{1}{c^2} \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 \Phi}{\partial (x^i)^2} = \frac{1}{c^2} \Delta \Phi.$$

En combinant avec le résultat $\text{tr } \mathbf{K} = -R_{00}$ obtenu à la question 14, il vient

$$\text{tr } \mathbf{K} = -\frac{1}{c^2} \Delta \Phi.$$

On en déduit qu'à la limite non relativiste, la condition de trace nulle de l'opérateur \mathbf{K} dans le vide se réduit à

$$\Delta \Phi = 0.$$

On retrouve ainsi que le fait que dans les régions vides de matière, le potentiel gravitationnel vérifie l'équation de Laplace.

Localement (en un point), on peut toujours effacer l'effet du champ gravitationnel en se plaçant dans un référentiel \mathcal{R}_0 en chute libre. L'origine du référentiel suit alors une géodésique de l'espace-temps. Par contre, dès qu'on s'écarte de l'origine, le champ gravitationnel se fait sentir par la déviation des géodésiques. Physiquement cela signifie que si l'on considère des particules en chute libre au voisinage de l'origine du référentiel

\mathcal{R}_0 , leur distance à l'origine varie dans le temps : certaines vont s'éloigner alors que d'autres vont se rapprocher (elles ne peuvent pas toutes s'éloigner ou toutes se rapprocher car l'opérateur de déviation \mathbf{K} est de trace nulle, ce qui signifie que ses valeurs propres ne peuvent pas avoir toutes le même signe). Il s'agit du phénomène de *marée* qui est l'empreinte fondamentale du champ gravitationnel et qui, mathématiquement, correspond à la *courbure* de l'espace-temps, via l'équation de déviation géodésique.

Annexe D

Codes Sage

version 2013-2014

Sommaire

D.1 Introduction	327
D.2 Tenseur de Riemann et équation d'Einstein	328

D.1 Introduction

Sage est un logiciel de mathématiques capable, entre autre, de réaliser des calculs formels. Il s'agit d'un logiciel libre, téléchargeable depuis l'URL

<http://sagemath.org/>

Cf. le livre récent [47].

Dans cette annexe, nous décrivons un code Sage pour calculer le tenseur de Riemann de différentes métriques et former l'équation d'Einstein. Le fichier Sage correspondant (feuille de calcul ou *worksheet*) peut être téléchargé depuis la page du cours :

<http://www.luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/fr/master/relat.html>

Par ailleurs, une extension de Sage vers la géométrie différentielle et le calcul tensoriel est en cours de développement ; il s'agit du projet SageManifolds :

<http://sagemanifolds.obspm.fr/>

On trouvera en particulier sur la page <http://sagemanifolds.obspm.fr/examples.html> des feuilles de calculs relatives à la métrique de Kerr et aux espaces de de Sitter et d'anti-de Sitter.

D.2 Tenseur de Riemann et équation d'Einstein

D.2.1 Définir les paramètres du calcul

Variété, coordonnées et tenseur métrique

Il s'agit dans un premier temps de choisir la dimension n de la variété, de fixer un système de coordonnées (x^α) et de définir le tenseur métrique par ses composantes $g_{\alpha\beta}$ dans ce système de coordonnées.

Voici quelques exemples :

Sphère \mathbb{S}^2 :

```
n = 2 ;
var('th', latex_name="\\theta"); var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [th, ph] ; # spherical coordinates (theta, phi)
var('r') ; # sphere radius
g = matrix( [[r^2,0], [0, (r*sin(th))^2]] )
```

Espace euclidien \mathbb{R}^3 :

```
n = 3 ;
var('r'); var('th', latex_name="\\theta"); var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [r, th, ph] ; # spherical coordinates (r, theta, phi)
g = matrix( [[1,0,0], [0,r^2,0], [0,0,(r*sin(th))^2]] )
```

Hypersphère \mathbb{S}^3 :

```
n = 3 ;
var('ch', latex_name="\\chi"); var('th', latex_name="\\theta");
var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [ch, th, ph] ; # coordinates (chi, theta, phi)
g = matrix( [[1,0,0], [0,(sin(ch))^2,0], [0,0,(sin(ch)*sin(th))^2]] )
```

Espace hyperbolique \mathbb{H}^3 :

```
n = 3 ;
var('ro', latex_name="\\rho"); var('th', latex_name="\\theta");
var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [ro, th, ph] ; # coordinates (rho, theta, phi)
var('b') ; # constant scale factor
g = matrix( [[b^2,0,0], [0,(b*sinh(ro))^2,0], [0,0,(b*sinh(ro)*sin(th))^2]] )
```

Espace-temps de Friedmann-Lemaître :

```
n = 4 ;
var('t, r') ; var('th', latex_name="\\theta"); var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [t, r, th, ph] ; # coordinates (t, r, theta, phi)
var('K') ; # curvature parameter of the t = const hypersurfaces
a = fonction('a', t) ; # scale factor a(t)
g = matrix( [[-1,0,0,0], [0,a^2/(1-K*r^2), 0, 0], [0, 0, (a*r)^2, 0], \
[0, 0, 0, (a*r*sin(th))^2]] )
```


Espace-temps de Schwarzschild :

```
n = 4 ;
var('t, r') ; var('th', latex_name="\\theta"); var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [t, r, th, ph] ; # Schwarzschild coordinates (t, r, theta, phi)
var('m') ; # mass parameter
g = matrix( [[-(1-2*m/r),0,0,0], [0,1/(1-2*m/r), 0, 0], [0, 0, r^2, 0], \
            [0, 0, 0, (r*sin(th))^2 ]] )
```

Espace-temps de Kerr :

```
n = 4 ;
var('t, r') ; var('th', latex_name="\\theta"); var('ph', latex_name="\\phi") ;
x = [t, r, th, ph] ; # Boyer-Lindquist coordinates (t, r, theta, phi)
var('m, a') ; # mass and angular momentum parameter
rho2 = r^2 + (a*cos(th))^2 ;
Delta = r^2 - 2*m*r + a^2 ;
g = matrix( [[-(1-2*m*r/rho2),0,0,-2*a*m*r*(sin(th))^2/rho2], [0,rho2/Delta, 0, 0], \
            [0, 0, rho2, 0], [-2*a*m*r*(sin(th))^2/rho2, 0, 0, \
            (r^2+a^2+2*m*r*(a*sin(th))^2/rho2)*(sin(th))^2 ]] )
```

Tenseur énergie-impulsion

Par exemple :

- Vide :

```
Tener = zero_matrix(ZZ, n)
```

- Fluide parfait pour un modèle cosmologique de Friedmann-Lemaître :

```
var('rho, p') ;
```

```
Tener = matrix( [[rho, 0, 0, 0], [0, p*a^2 / (1-K*r^2), 0, 0], \
                [0, 0, p*(a*r)^2, 0], [0, 0, 0, p*(a*r*sin(th))^2]] )
```

Constante cosmologique

Pour avoir $\Lambda \neq 0$ ou $\Lambda = 0$, on définit respectivement

```
with_lambda = True
```

ou bien

```
with_lambda = False
```

D.2.2 Calcul du tenseur de Riemann

On commence par caculer la métrique inverse et les symboles de Christoffel suivant la formule (2.130) :

```
ginv0 = g.inverse() ;
ginv = matrix( [[ginv0[i,j].simplify_full() for j in range(n)] for i in range(n)] )
```

```

Chr0 = [[[ sum( ginv[i][l]/2 * ( diff(g[l][k],x[j]) + diff(g[j][l],x[k]) \
- diff(g[j][k],x[l]) ) for l in range(n) ) for k in range(n) ] \
for j in range(n) ] for i in range(n) ] ;
Chr = [[[ Chr0[i][j][k].simplify_full() for k in range(n) ] for j in range(n) ] \
for i in range(n) ]

```

Le tenseur de Riemann s'obtient alors via la formule (4.98) :

```

Riem0 = [[[[ diff(Chr[i][j][l],x[k]) - diff(Chr[i][j][k],x[l]) \
+ sum( Chr[i][m][k] * Chr[m][j][l] - Chr[i][m][l] * Chr[m][j][k] for m in range(n) ) \
for l in range(n) ] for k in range(n) ] for j in range(n) ] for i in range(n) ]
Riem = [[[[ Riem0[i][j][k][l].simplify_full() for l in range(n) ] for k in range(n) ] \
for j in range(n) ] for i in range(n) ]

```

Le tenseur de Ricci est donné par la formule (4.108) :

```

Ric0 = [[ sum( Riem[k][i][k][j] for k in range(n) ) for j in range(n) ] \
for i in range(n) ]
Ric = matrix( [[ Ric0[i][j].simplify_full() for j in range(n) ] \
for i in range(n) ] )

```

À partir du tenseur de Ricci, on obtient le scalaire de courbure via (4.111) :

```

Rscal0 = sum( sum( ginv[i][j] * Ric[i][j] for j in range(n) ) for i in range(n) )
Rscal = Rscal0.simplify_full()

```

D.2.3 Équation d'Einstein

On peut à présent former l'équation d'Einstein :

```

var('Lamb', latex_name="\Lambda") ;
if with_lambda :
    Lambda = Lamb
else :
    Lambda = 0
var('G') ;
Einst0 = Ric + (Lambda - Rscal/2) * g - 8*pi*G * Tener ;
Einst = matrix( [[ Einst0[i][j].simplify_full() for j in range(n) ] \
for i in range(n) ] )

```

Bibliographie

Ouvrages d'introduction :

- [1] A. Barrau & J. Grain : *Relativité générale*, Dunod, Paris (2011).
- [2] M. Boratav & R. Kerner : *Relativité*, Ellipses – Édition Marketing, Paris (1991).
- [3] S.M. Carroll : *Spacetime and Geometry : An Introduction to General Relativity*, Addison Wesley (Pearson Education), San Fransisco (2004) ;
<http://preposterousuniverse.com/spacetimeandgeometry/>
- [4] E.ourgoulhon : *Relativité restreinte : des particules à l'astrophysique*, EDP Sciences / CNRS Éditions, Les Ulis (2010) ;
<http://relativite.obspm.fr/>
- [5] R. Hakim : *Gravitation relativiste*, InterEditions / CNRS Éditions, Paris (1994) ; réédité par EDP Sciences / CNRS Éditions, Les Ulis (1998).
- [6] J.B. Hartle : *Gravity : An Introduction to Einstein's General Relativity*, Addison Wesley (Pearson Education), San Fransisco (2003) ;
http://wps.aw.com/aw_hartle_gravity_1/
- [7] J. Heyvaerts : *Astrophysique : étoiles, univers et relativité*, Dunod, Paris (2006).
- [8] M. Hobson, G. Efstathiou & A. Lasenby : *Relativité générale*, De Boeck, Bruxelles (2010).
- [9] D. Langlois : *Relativité générale*, Vuibert, Paris (2013).
- [10] M. Ludvigsen : *La relativité générale : une approche géométrique*, Dunod, Paris (2000).
- [11] J. Perez : *Théorie des champs classiques*, ENSTA, Paris (2008).
- [12] P. Spagnou : *De la relativité au GPS*, Ellipses – Édition Marketing, Paris (2012).
- [13] P. Tourrenc : *Relativité et gravitation*, Armand Colin, Paris (1992).

Introduction à la géométrie différentielle dans le cadre newtonien :

- [14] N. Deruelle & J.-P. Uzan : *Mécanique et gravitation newtoniennes*, Vuibert, Paris (2006).

Livres de cosmologie avec introduction à la relativité :

- [15] F. Bernardeau : *Cosmologie : des fondements théoriques aux observations*, EDP Sciences / CNRS Éditions, Les Ulis (2007).

- [16] P. Peter & J.-P. Uzan : *Cosmologie primordiale*, Belin, Paris (2005).

Ouvrages avancés :

- [17] S.W. Hawking & G.F.R. Ellis : *The large scale structure of space-time*, Cambridge University Press, Cambridge (1973).
- [18] C.W. Misner, K.S. Thorne, & J.A. Wheeler : *Gravitation*, Freeman, New York (1973).
- [19] E. Poisson : *A Relativist's Toolkit, The Mathematics of Black-Hole Mechanics*, Cambridge University Press, Cambridge (2004) ;
<http://www.physics.uoguelph.ca/poisson/toolkit/>
- [20] N. Straumann : *General Relativity, with Applications to Astrophysics*, Springer, Berlin (2004).
- [21] R.M. Wald : *General relativity*, University of Chicago Press, Chicago (1984).

Références historiques citées dans le texte :

- [22] F. Arago : *Mémoire sur la vitesse de la lumière, lu à la première Classe de l'Institut, le 10 décembre 1810*, Comptes Rendus des Séances de l'Académie des Sciences **36**, 38 (1853) ; disponible en ligne sur
<http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k2993z>
- [23] F. Balibar (sous la direction de) : *Albert Einstein, œuvres choisies, volume 2 : Relativités I*, Éditions du Seuil / Éditions du CNRS, Paris (1993).
- [24] F. Balibar (sous la direction de) : *Albert Einstein, œuvres choisies, volume 3 : Relativités II*, Éditions du Seuil / Éditions du CNRS, Paris (1993).
- [25] A. Einstein : *Zur Elektrodynamik bewegter Körper*, Annalen der Physik **17**, 891 (1905) ; copie de l'édition originale (Allemand) disponible sur
http://de.wikibooks.org/wiki/A._Einstein:_Kommentare_und_Erl%C3%A4uterungen
traduction française dans [23], p. 31.
- [26] A. Einstein : *Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie*, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1915, p. 831 ; traduction française dans [23], p. 169.
- [27] A. Einstein : *Über Gravitationswellen*, Preussische Akademie der Wissenschaften, Sitzungsberichte, 1918, p. 154 ; traduction française dans [24], p. 18.
- [28] A. Gullstrand : *Allgemeine Lösung des statischen Einkörperproblems in der Einsteinschen Gravitationstheorie*, Arkiv. Mat. Astron. Fys. **16**, 1 (1922).

- [29] R. P. Kerr : *Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics*, Phys. Rev. Lett. **11** 237 (1963).
- [30] P. S. Laplace : *Exposition du système du monde*, Imprimerie du Cercle Social (Paris) (1796).
- [31] J. Michell : *On the Means of Discovering the Distance, Magnitude, & c. of the Fixed Stars, in Consequence of the Diminution of the Velocity of Their Light, in Case Such a Diminution Should be Found to Take Place in any of Them, and Such Other Data Should be Procured from Observations, as Would be Farther Necessary for That Purpose*, Philosophical Transactions of the Royal Society of London **74**, 35 (1784).
- [32] P. Painlevé : *La mécanique classique et la théorie de la relativité*, Comptes Rendus Acad. Sci. (Paris) **173**, 677 (1921).
- [33] H. Poincaré : *La mesure du temps*, Revue de Métaphysique et de Morale **6**, 1 (1898) ; ré-imprimé comme le Chapitre II de : H. Poincaré : *La valeur de la science* (1905), ré-édité chez Flammarion (1970).
- [34] K. Schwarzschild : *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik, p. 189 (1916).
- [35] K. Schwarzschild : *Über das Gravitationsfeld einer Kugel aus inkompressibler Flüssigkeit nach der Einsteinschen Theorie*, Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Klasse für Mathematik, Physik, und Technik, p. 424 (1916).

Autres références citées dans le texte :

- [36] M.A. Abramowicz, G.F.R. Ellis, & A. Lanza : *Relativistic effects in superluminal jets and neutron star winds*, Astrophys. J. **361**, 470 (1990).
- [37] N. Ashby : *Relativity in the Global Positioning System*, Living Rev. Relativity **6**, 1 (2003) ; article en ligne : <http://www.livingreviews.org/lrr-2003-1>
- [38] T. Barbot : *Domaines globalement hyperboliques de l'espace de Minkowski et de l'espace anti-de Sitter*, dans *Algèbre, dynamique et analyse pour la géométrie : aspects récents* par T. Barbot, H. Belbachir, S. Mehdi, D. Smai & R. Souam (coordinateurs), Ellipses, Paris (2010) ; disponible sur http://www.univ-avignon.fr/fileadmin/documents/Users/Fiches_X_P/Oran.pdf
- [39] J. M. Bardeen, B. Carter & S. W. Hawking : *The Four Laws of Black Hole Mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [40] I. Bengtsson : *Anti-de Sitter space*, notes de cours ; disponible sur <http://www.physto.se/~ingemar/>
- [41] B. Bertotti, L. Iess, & P. Tortora : *A test of general relativity using radio links with the Cassini spacecraft*, Nature **425**, 374 (2003).

- [42] D. Bini, R.T. Jantzen, & L. Stella : *The general relativistic Poynting-Robertson effect*, Class. Quantum Grav. **26**, 055009 (2009).
- [43] L. Blanchet, C. Salomon, P. Teysandier, & P. Wolf : *Relativistic theory for time and frequency transfer to order c^{-3}* , Astron. Astrophys. **370**, 320 (2001).
- [44] H. A. Buchdahl : *General Relativistic Fluid Spheres*, Phys. Rev. **116**, 1027 (1959).
- [45] A. Buonanno : *Gravitational waves*, dans *Particle Physics and Cosmology : The Fabric of Spacetime (École des Houches, 31 Jul - 25 Aug 2006)*, sous la direction de F. Bernadeau, C. Grojean & J. Dalibard, Elsevier (2007) ; preprint <http://arxiv.org/abs/0709.4682>
- [46] B. Carter : *Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields*, Phys. Rev. **174**, 1559 (1968).
- [47] A. Casamayou, N. Cohen, G. Connan, T. Dumont, L. Fousse, F. Maltey, M. Meulien, M. Mezzarobba, C. Pernet, N.M. Thiéry, & P. Zimmermann : *Calcul mathématique avec Sage*, livre publié sous licence libre Creative Commons (2013) : <http://sagebook.gforge.inria.fr/>
- [48] S. Collin-Zahn : *Des quasars aux trous noirs*, EDP Sciences (Les Ulis) (2009).
- [49] P. B. Demorest, T. Pennucci, S. M. Ransom, M. S. E. Roberts, & J. W. T. Hessels : *A two-solar-mass neutron star measured using Shapiro delay*, Nature **467**, 1081 (2010).
- [50] F. Eisenhauer et al. : *GRAVITY : Observing the Universe in Motion*, The Messenger **143**, 16 (2011).
- [51] Event Horizon Telescope : <http://eventhorizontelescope.org/>
- [52] C. W. F. Everitt et al. : *Gravity Probe B : Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity*, Phys. Rev. Lett. **106**, 221101 (2011).
- [53] J.L. Greenstein, J.B. Oke, & H. Shipman : *On the redshift of Sirius B*, Quart. J. Roy. Astron. Soc. **26**, 279 (1985).
- [54] E.ourgoulhon : *An introduction to the theory of rotating relativistic stars*, lecture at the Compstar 2010 School (Caen, 8-16 Feb 2010), <http://arxiv.org/abs/1003.5015>
- [55] P. Haensel, A.Y. Potekhin & D.G. Yakovlev : *Neutron stars 1 : Equation of state and structure*, Springer, New York (2007).
- [56] J.C. Hafele & R.E. Keating : *Around-the-World Atomic Clocks : Predicted Relativistic Time Gains*, Science **177**, 166 (1972).
- [57] J.C. Hafele & R.E. Keating : *Around-the-World Atomic Clocks : Observed Relativistic Time Gains*, Science **177**, 168 (1972).
- [58] J.D. Jackson & L.B. Okun : *Historical roots of gauge invariance*, Rev. Mod. Phys. **73**, 663 (2001).
- [59] J.-A. Marck : *Short-cut method of solution of geodesic equations for Schwarzschild black hole*, Class. Quantum Grav. **13**, 393 (1996).

- [60] K. Martel & E. Poisson : *Regular coordinate systems for Schwarzschild and other spherical spacetimes*, Amer. J. Phys. **69**, 476 (2001).
- [61] M. S. Morris & K. S. Thorne : *Wormholes in spacetime and their use for interstellar travel : A tool for teaching general relativity*, Amer. J. Phys. **56**, 395 (1988).
- [62] U. Moschella : *The de Sitter and anti-de Sitter Sightseeing Tour*, dans *Einstein, 1905 - 2005 (Poincaré Seminar 2005)*, sous la direction de T. Damour, O. Darrigol, B. Duplantier & V. Rivasseau, Birkhäuser Verlag, Basel (2006), p. 120 ; disponible sur <http://www.bourbaphy.fr/avril2005.html>
- [63] G. Petit & P. Wolf : *Relativistic theory for time comparisons : a review*, Metrologia **42**, S138 (2005).
- [64] R.V. Pound & G.A. Rebka : *Apparent Weight of Photons*, Phys. Rev. Lett. **4**, 337 (1960).
- [65] R.V. Pound & J.L. Snider : *Effect of Gravity on Gamma Radiation*, Phys. Rev. **140**, B788 (1965).
- [66] S.S. Shapiro, J.L. Davis, D.E. Lebach, & J.S. Gregory : *Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979-1999*, Phys. Rev. Lett. **92**, 121101 (2004).
- [67] L. Smolin : *Rien ne va plus en physique !*, Dunod, Paris (2007).
- [68] M. Soffel et al. : *The IAU 2000 resolutions for astrometry, celestial mechanics, and metrology in the relativistic framework : explanatory supplement*, Astron. J. **126**, 2687 (2003).
- [69] K.S. Thorne : *Trous noirs et distorsions du temps*, Flammarion (collection Champs), Paris (2001).
- [70] R.F.C Vessot et al. : *Test of Relativistic Gravitation with a Space-Borne Hydrogen Maser*, Phys. Rev. Lett. **45**, 2081 (1980).
- [71] M. Walker & R. Penrose : *On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {2,2} spacetimes*, Commun. Math. Phys. **18**, 265 (1970).
- [72] C.M. Will : *The confrontation between general relativity and experiment*, Living Rev. Relativity **9**, 3 (2006) ; article en ligne : <http://www.livingreviews.org/lrr-2006-3>

Index

- (GCRS), 206
- (TAI), 208
- (TT), 207
- énergie, 44
- équation d'Einstein, 115
- 4-accélération, 224
- 4-impulsion, 33, 37
- 4-vecteurs, 19
- 4-vitesse, 36

- AdS, 187
- AdS/CFT, 193
- anti-de Sitter, 187
- apoastre, 79
- Arago F., 124
- associé au paramétrage, 17
- asymptotiquement plat, 56
- atlas, 15
- autoadjoint
 - endomorphisme –, 247
- avance du périastre, 81

- base duale, 95
- base naturelle associée aux coordonnées, 18
- Beltrami E., 173
- big-bang, 201
- boule
 - de Poincaré, 172

- cône de lumière, 33
- cône isotrope, 31
- carte, 14
- Carter
 - constante de –, 135, 239
- champ tensoriel, 23
- changement de jauge, 150

- coefficients de la connexion, 98
- compatible avec la métrique, 104
- composantes, 18
- condition
 - d'énergie dominante, 113, 115
 - d'énergie faible, 113, 115, 200, 259
- conformément reliées, 59
- congruence, 193
 - d'observateurs, 194
- conjecture
 - de censure cosmique, 128
 - de Maldacena, 193
 - de Poincaré, 170
- connexion, 97
- connexion affine, 97
- connexion de Christoffel, 103
- connexion de Levi-Civita, 103
- connexion riemannienne, 103
- connexion sans torsion, 104
- constante
 - de Carter, 135, 239
- constante cosmologique, 115
- contraintes (tenseur des), 113
- convention
 - de sommation d'Einstein, 17
- coordonnées
 - de Rindler, 221
 - d'Eddington-Finkelstein 3+1, 125
 - d'Eddington-Finkelstein entrantes, 62
 - d'Eddington-Finkelstein sortantes, 62
 - de Boyer-Lindquist, 131
 - de Fermi, 157

- coordonnées de Schwarzschild, 55
- coordonnées isotropes, 59
- coordonnées
 - de Lemaître, 181, 201
 - de Painlevé-Gullstrand, 235
 - hyperboliques, 187
 - hypersphériques, 174
- correspondance AdS/CFT, 193
- cosmique
 - observateur, 194
 - temps, 194
- courbe, 16
- courbure
 - extrinseque, 184
- déplacement élémentaire, 22
- déplacement infinitésimal, 22
- dérivée
 - de Fermi-Walker, 225
- dérivée covariante, 97, 100
- dérivée covariante du champ vectoriel, 97
- dérivation covariante, 97
- de signature, 24
- de Sitter
 - espace-temps, 174, 200
- de type, 23
- décélération (paramètre de), 199
- dernière orbite circulaire stable, 78
- déviations
 - géodésique, 110, 246
- dilatation des temps, 43
- divergence, 105
- du genre espace, 28, 125
- du genre lumière, 28, 125
- du genre temps, 28
- effet
 - Doppler, 252, 253
 - Einstein, 252, 253
 - gravito-magnétique, 137
 - Lense-Thirring, 137
 - Shapiro, 90
- Einstein
 - univers d⁻, 200
- Einstein-de Sitter (espace-temps d⁻), 201
- endomorphisme
 - autoadjoint, 247
 - symétrique, 247
- entraînement
 - des référentiels inertiels, 137
- entrantes, 61
- équation
 - de déviation géodésique, 246
 - de Jacobi, 246
 - de Killing, 54, 216, 255
- équations
 - de Friedmann, 198
- ergorégion, 134
- ergosphère, 134
- espace
 - homogène, 168
 - homogène et isotrope, 168
 - hyperbolique, 170
 - isotrope en un point, 168
 - local de repos, 221
 - maximalement symétrique, 168
- espace dual, 23
- espace local de repos, 41
- espace vectoriel tangent, 18
- espace-temps, 25
 - anti-de Sitter, 187
 - d'Einstein-de Sitter, 201
 - de de Sitter, 174, 200
 - de Kerr, 131
 - extrême, 133
 - de Minkowski, 32
 - de dimension 5, 174
- est transporté parallèlement à lui-même, 97
- extrême (espace-temps de Kerr), 133
- facteur conforme, 59
- facteur de Lorentz, 42
- fermé
 - univers, 199
- fermée
 - variété, 170
- Fermi-Walker
 - dérivée de, 225
- feuilletage

- 3+1, 193
- spatial, 193
- FLRW
 - métrique, 195
- fluide parfait, 114
- flux
 - d'énergie, 113
- fois contravariant, 23
- fois covariant, 23
- force de Poynting-Robertson, 233
- forme bilinéaire, 23, 24
- forme linéaire, 22
- forme multilinéaire, 23
- formule du quadrupôle, 162, 163
- Friedmann
 - équations de, 198
- Friedmann-Lemaître (solution), 199
- générateur de symétrie, 54
- géoïde, 207
- géocentrique, 206
- géodésique, 46
- géodésique du genre temps, 46
- géodésiques
 - parallèles, 246
- géodésiques de longueur nulle, 46
- géodésiques du genre espace, 46
- géodésiques lumière, 46
- genre
 - lumière
 - hypersurface, 129
- géodésique
 - de longueur nulle, 49
 - déviaton –, 110, 246
 - lumière, 49
- globalement hyperbolique, 192
- gradient de f , 94
- gravité de surface, 242
- gravito-magnétique (effet), 137
- groupe
 - d'isométrie, 168
 - de Lorentz
 - orthochrone, 171
 - de Poincaré, 168
- homéomorphisme, 14
- homogène, 168
- horizon
 - de Rindler, 180, 220
 - des événements, 128
 - d'un observateur, 180
 - des particules, 179
- Hubble
 - paramètre, 199
- hyperbolique
 - espace, 170
- hypersphère, 169
- hypersurface, 54
 - du genre lumière, 129
 - spatiale, 193
- hypersurface de simultanéité, 40
- identité
 - de Ricci, 246
- identité de Bianchi, 110
- identité de Ricci, 109
- impulsion, 44
- infinitésimal, 148
- inflation, 167
- intégréable, 239
- ISCO, 78
- isométrie, 168
- isométrique
 - plongement, 177
- isotrope
 - en un point, 168
- Jacobi
 - équation de, 246
- jauge de Hilbert, 150
- jauge transverse et sans, 153
- jauge TT, 153
- Kerr
 - espace-temps, 131
 - métrique, 131
 - paramètre, 131
- Kerr R., 131
- Kerr-Newman
 - métrique, 133

- Killing
 équation de, 54, 216, 255, 302
 tenseur de –, 237, 302
 vecteur de, 54
- Killing-Yano
 tenseur de –, 237
- Kretschmann (scalaire de), 127
- la jauge de Lorenz, 150
- Laplace P. S., 124
- le long du vecteur, 97
- Lemaître
 coordonnées de, 181, 201
- Lense-Thirring
 effet, 137
- lentille gravitationnelle, 87
- ligne d'univers, 34
- luminosité d'Eddington, 291
- mécanisme de Blandford-Znajek, 141
- métrique de Schwarzschild, 55
- Maldacena (conjecture), 193
- marée, 323
- masse, 37, 55
- masse au repos, 37
- matrice de, 25
- matrice de Minkowski, 27
- matrice de passage, 25
- métrique, 25
 de Kerr, 131
 de Kerr-Newman, 133
 de Robertson-Walker, 195
 de Schwarzschild, 214
 FLRW, 195
 induite, 193
 pseudo-riemannienne, 188
 riemannienne, 170
- Michell J., 124
- Minkowski
 espace-temps, 32
- mirage gravitationnel, 87
- modes de polarisation de l'onde gravitationnelle, 154
- moment quadrupolaire de masse, 162
- Morris M. S., 217
- nappe du futur, 31
- nappe du passé, 31
- non dégénérée, 24
- objets compacts, 57
- observateur
 cosmique, 194
 statique, 214
- orientés vers le futur, 31
- orientés vers le passé, 31
- orthogonaux, 25
- orthonormale, 26
- ouvert
 univers, 199
- périastre, 79
- par rapport à cette base, 25
- par rapport à la base, 98
- paramétrage de la courbe, 16
- paramètre de compacité, 57
- paramètre de la, 16
- paramètre de relativité, 57
- paramètres affines, 50
- paramètre
 d'impact, 298
 de décélération, 199
 de densité, 199
 de Hubble, 199
 de Kerr, 131
- Perelman G., 170
- perturbation métrique à trace renversée, 147
- plat, 109
- univers, 199
- plongement, 177
 isométrique, 177
- Poincaré
 boule de, 172
 conjecture, 170
- Poincaré H., 173
- potentiel effectif, 74
- pour l'observateur, 39
- poussière, 198
- Poynting (vecteur de), 113
- problème
 de Cauchy, 192

- processus de Penrose, 141
- produit scalaire, 24
- produits tensoriels, 97
- pseudo-riemannienne, 188
- pseudo-riemannienne (variété), 168
- puissance, 113

- quadri-impulsion, 33, 37
- quadriaccélération, 218, 224
- quadrivecteurs, 19
- quadrivitesse, 36
- quantité de mouvement, 44

- réalisation, 208
- rayon aréolaire, 59
- rayon de Schwarzschild, 56
- rayon gravitationnel, 56
- repère mobile, 98, 221
- repos
 - espace local de, 221
- retard de la lumière, 90
- retard Shapiro, 90
- Ricci
 - identité de –, 246
- Riemann
 - tenseur de –, 246
- Rindler
 - coordonnées de, 221
 - horizon de, 180, 220
- Robertson-Walker
 - métrique, 195

- Sage, 327
- scalaire
 - de Kretschmann, 127
- scalaire de courbure, 111
- scalaire de Ricci, 111
- Shapiro
 - effet, 90
- simultané à, 39
- singularité
 - de coordonnées, 126, 187
 - du tenseur métrique, 127
 - nue, 128, 133
- solution
 - de Friedmann-Lemaître, 199
 - sortantes, 60
 - stationnaire, 54
 - statique, 54
 - symétrie sphérique, 54
 - symétrique, 24
 - symboles de Christoffel, 48
 - symétrique
 - endomorphisme –, 247
 - système de coordonnées, 14
 - système de référence céleste, 206
 - système de Tolman-Oppenheimer-Volkoff, 121

- tétrade, 98
- temps
 - cosmique, 194
- temps atomique international, 208
- temps propre, 35
- temps terrestre, 207
- temps-coordonnée géocentrique, 206
- tenseur, 23
 - de Killing, 237, 302
 - de Killing-Yano, 237
 - de Riemann, 246
 - des contraintes, 113
 - des contraintes
 - de Maxwell, 113
 - métrique, 25
- tenseur d'Einstein, 112
- tenseur d'Isaacson, 163
- tenseur de courbure, 109
- tenseur de Ricci, 111
- tenseur de Riemann, 109
- Thorne K. S., 217
- TOV, 121
- trace, 153
- transfert
 - à deux voies, 253
- trou de ver, 217
- trou noir, 128

- une flèche du temps, 31
- unitaire, 28
- univers
 - d'Einstein, 200

- valence, 23
- variété de classe C^p , 15
- variété de dimension 4, 14
- variété différentiable, 15
- variété
 - fermée, 170
 - pseudo-riemannienne, 168
- vecteur
 - de Killing, 54
 - de Poynting, 113
- vecteur tangent, 17
- vecteurs
 - qui commutent, 245
- vecteurs isotropes, 28
- vide
 - équation d'état, 198
- vitesse
 - de libération, 124
 - relative à un observateur, 42
- vitesse de rotation, 133