Nature et valeur de la constante cosmologique

Analyse relativiste d'échelle et comparaison aux données d'observation

Laurent Nottale

LUTH, UMR 8102 CNRS, Observatoire de Paris-Meudon et Université Paris 7
5 place Janssen 92190 Meudon

laurent.nottale@obspm.fr

RÉSUMÉ. *On rappellera comment la valeur de la constante cosmologique a pu être estimée (Nottale, 1993), avant sa mesure observationnelle précise postérieure à 1998, dans un cadre relativiste d'échelle. On y considère que la densité d'énergie du vide et de ses fluctuations est explicitement dépendante de l'échelle, et que la constante cosmologique est la somme d'une constante géométrique, égale à l'inverse du carré d'une échelle de longueur cosmique (trouvée de l'ordre de 2.9 Gpc), et de la densité d'énergie gravitationnelle des fluctuations du vide. Cette approche permet de rendre compte de la relation des grands nombres de Dirac-Eddington de manière exacte et sans nécessité de variation des constantes et d'estimer, à l'aide d'un modèle du vide en terme de "mer" de Dirac de quarks, la valeur de la constante cosmologique à* $\Omega_\Lambda h^2 = 0.356 \pm 0.007$ *(où* $\Omega_\Lambda = 0.728 \pm 0.015$ *est la constante cosmologique réduite et* $H_0 = 100h = 70.4 \pm 1.3$ *km/s.Mpc est la constante de Hubble). On montrera que l'ajustement des données d'observation donne une valeur mesurée de plus en plus précise au cours du temps (aujourd'hui égale, d'après les résultats à huit ans du satellite WMAP, à* 0.361 ± 0.020*) qui reste en très bon accord avec cette estimation théorique.*

ABSTRACT. *We recall how the value of the cosmological constant has been estimated in a scale-relativistic framework (Nottale, 1993), before its precise observational measurement posterior to 1998. First the vacuum energy density and its fluctuations are considered to be explicitly scale dependent. Then the full cosmological constant is described as the sum of a purely geometric constant, which is the inverse of the square of a cosmic length (which we find equal to 2.9 Gpc) and of the scale-dependent gravitational self-energy density of vacuum fluctuations. This approach has allowed us to account for the Eddington-Dirac large number hypothesis in an exact way without need for a variation of constants and to estimate, in the framework of*

Premières Rencontres d'Avignon (2007-2009) autour de la Relativité d'Échelle
Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5, pages 31 à 39

32 *Premières Rencontres d'Avignon (2007-2009) autour de la Relativité d'Échelle*
Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

Dirac's see vacuum model, the value of the cosmological constant as $\Omega_\Lambda h^2 = 0.356 \pm 0.007$ *(where* $\Omega_\Lambda = 0.728 \pm 0.015$ *is the scaled cosmological constant and* $H_0 = 100h = 70.4 \pm 1.3$ *km/s.Mpc is the Hubble constant). We show that the fit of observational data yields a measured value which is increasingly precise with time (according to the eight years WMAP probe results, today it is* 0.361 ± 0.020*) which remains in very good agreement with the early (1993) theoretical estimate.*

MOTS-CLÉS : *relativité, échelles, cosmologie*

KEYWORDS: *relativity, scales, cosmology*

---

1. Introduction

En 1917, Einstein avait introduit dans ses équations une constante Λ, appelée constante cosmologique, afin d'expliquer l'origine de l'inertie. Cette constante joue un rôle géométrique : elle définit une courbure fondamentale de l'espace-temps et est ainsi égale à l'inverse du carré d'une longueur cosmique invariante $\mathbb{L}$, ce qui s'écrit $\Lambda = 1/\mathbb{L}^2$.

Elle a aussi la propriété de s'opposer, à grande échelle, à la force attractive de la gravité et, si elle est bien ajustée, d'autoriser des modèles d'Univers statiques (bien que de tels modèles aient par la suite été identifiés comme métastables).

Lorsque l'on découvrit que l'Univers n'est en fait pas statique, à la fin des années 20, certains physiciens voulurent se débarrasser de la constante cosmologique en lui attribuant une valeur nulle. Toutefois, Lemaître fit remarquer dès 1934, suivi plus tard par Zeldovich (1967), que l'effet d'une constante cosmologique était semblable à celui de la densité d'énergie du vide quantique. En fait, un tel vide, parce qu'il doit aussi être compatible avec la relativité du mouvement, est caractérisé par une pression négative qui est exactement l'inverse de sa densité d'énergie et la compense dans les équations d'Einstein. Seul y reste le terme de pression négative, qui se traduit par une force répulsive et par une accélération de l'expansion de l'Univers, aujourd'hui observée de manière certaine et précise.

Malheureusement, lorsqu'on tente de calculer l'effet de cette énergie du vide quantique, on obtient un résultat... infini. Même si on la calcule à l'échelle de longueur de Planck au lieu de prendre la limite de longueur nulle, elle reste environ 10^{120} fois plus grande que la valeur observée. Une constante cosmologique d'une telle magnitude n'aurait pas manqué d'avoir des conséquences catastrophiques sur l'Univers. Ceci explique peut être le fait que l'accélération de l'expansion, depuis son établissement indubitable en 1998, est en général attribuée à une mystérieuse “énergie noire", dont la constante cosmologique n'est qu'une des explications possibles (bien que tous les tests montrent que cette énergie noire agit exactement comme le ferait une constante cosmologique).

2. Solution du problème en relativité d'échelle

La solution proposée à ce problème, dans le cadre de la relativité d'échelle, part du constat que la densité d'énergie du vide quantique dépend en fait de l'échelle à laquelle on la considère, et qu'il n'y a aucune raison *a priori* d'attribuer à l'échelle cosmique la valeur qu'elle a à l'échelle zéro ou à celle de Planck. Mais comme cette densité d'énergie quantique varie en fonction de l'échelle r comme $1/r^4$, on trouve alors qu'elle devrait être maintenant en fait 10^{120} fois *plus petite* que la valeur observée.

Cependant, l'énergie elle-même intervient en général uniquement par ses différences : c'est le cas de l'énergie potentielle, dont seul le gradient est observable sous forme de champ. Ainsi on s'attend en fait à ce qu'une telle densité d'énergie constante

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

qui remplirait tout l'Univers ne soit pas observable (en tant qu'énergie du vide, donc état d'énergie minimale, elle servirait de point zéro) et puisse toujours être renormalisée et n'ait donc pas d'effet gravitationnel.

Par contre si l'on considère non pas directement l'énergie du vide elle-même, mais ses fluctuations, la situation est différente. Dans ce cas ce sont les différences d'énergie qui interviennent et non pas l'énergie. Comme on l'a vu, la moyenne de l'énergie $<E>$ peut toujours être renormalisée, ce qui signifie que $<E>=0$. Par conséquent les fluctuations d'énergie sont telles que $(\Delta E)^2 = <E^2>$. Or l'énergie gravitationnelle de ces fluctuations est précisément proportionnelle à $<E^2>$, quantité qui, elle, ne peut être annulée, du fait de la relation de Heisenberg de la mécanique quantique,

$$\Delta E . \Delta t \approx \hbar. \qquad [1]$$

En considérant un intervalle spatial $r = c\Delta t$, cette relation devient :

$$(\Delta E)^2 \approx \frac{(\hbar c)^2}{r^2}. \qquad [2]$$

La densité de self-énergie gravitationnelle des fluctuations est donc donnée par

$$\rho_g \approx \frac{1}{r^3} \frac{G}{c^4} \frac{<E^2>}{r}, \qquad [3]$$

et comme $<E^2>$ est proportionnel à $1/r^2$ d'après la relation d'Heisenberg, cette densité d'énergie varie finalement comme $1/r^6$:

$$\rho_g \approx \frac{G\hbar^2}{c^2} \frac{1}{r^6}. \qquad [4]$$

En introduisant la densité d'énergie de l'échelle de Planck, $\rho_{\mathbb{P}}$ et l'échelle de longueur de Planck, $r_{\mathbb{P}}$, cette relation s'écrit (maintenant de manière exacte car les mêmes constantes numériques interviennent à l'échelle de Planck et aux autres échelles) :

$$\rho_g(r) = \rho_{\mathbb{P}} \left(\frac{r_{\mathbb{P}}}{r}\right)^6. \qquad [5]$$

Mais, dans la solution proposée, ceci ne constitue qu'une seule des deux contributions à la constante cosmologique effective. On considère que celle-ci provient de deux sources : d'une part, la self-énergie gravitationnelle des fluctuations du vide quantique, explicitement dépendante de l'échelle r, que l'on vient de calculer (qui intervient dans le membre de droite des équations d'Einstein), et d'autre part, un terme constant de nature géométrique dont le sens profond est d'être l'inverse du carré d'une longueur cosmique invariante $\mathbb{L}$, de la nature d'un horizon (dont la contribution apparaît dans le membre de gauche des équations d'Einstein).

Il est remarquable que le résultat obtenu en faisant cette somme,

$$\Lambda_{\rm tot} = \Lambda_{\rm geom} + \Lambda_{\rm quant}(r) = \Lambda_{\rm geom} + \frac{8\pi G}{c^2}\, \rho_{\mathbb{P}} \left(\frac{r_{\mathbb{P}}}{r}\right)^6, \qquad [6]$$

peut être obtenu directement par les méthodes de la relativité d'échelle comme solution d'une équation différentielle d'échelle du premier ordre, du type

$$\frac{d\rho}{d\ln r} = a - b\rho. \qquad [7]$$

Cette solution s'écrit pour la variation de la densité d'énergie en fonction de l'échelle

$$\rho = \rho_c \left\{ 1 + \left(\frac{r_0}{r} \right)^b \right\}, \qquad [8]$$

où $b = 6$ redonne l'équation (6), $\rho_c = a/b$ et r_0 est une constante d'intégration.

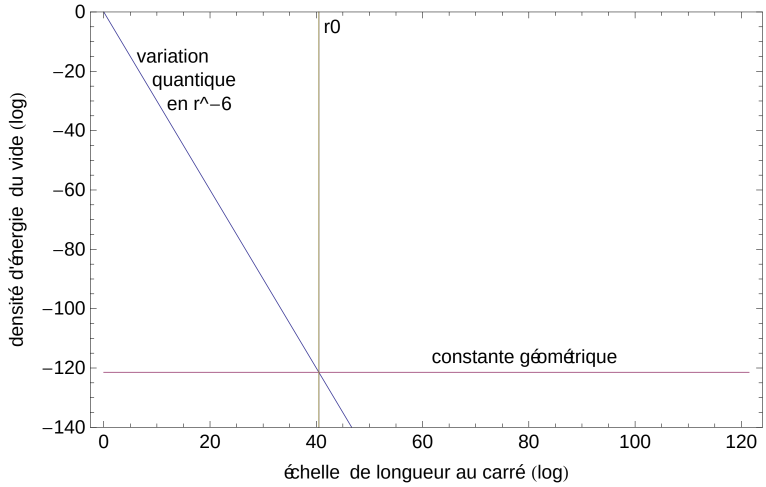

Figure 1. *Illustration du modèle relativiste d'échelle de constante cosmologique. On la décrit comme la somme d'une contribution géométrique constante et d'une contribution quantique variable, qui se croisent à une échelle de transition typique des particules élémentaires, dont la connaissance permet de déterminer la valeur de la constante cosmologique aux grandes échelles.*

La comparaison des deux expressions obtenues mène à la relation suivante pour la densité d'énergie équivalente à la constante cosmologique géométrique :

$$\rho_c = \rho_{\mathbb{P}} \left(\frac{r_{\mathbb{P}}}{r_0} \right)^6 . \qquad [9]$$

On constate que pour $r \gg r_0$, on obtient la solution cosmologique ρ_c, mais aussi que la contribution du vide quantique dépendante d'échelle atteint cette valeur précisément quand l'échelle r atteint l'échelle de transition r_0 entre les deux régimes. La question de la prédiction théorique de la valeur de la constante cosmologique a donc été déplacée vers celle de la valeur de cette échelle de transition.

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

Cette transition doit avoir eu lieu dans la phase de rayonnement de l'Univers primordial, car les données d'observations indiquent que la valeur actuelle de la constante cosmologique est établie depuis les premiers instants. L'échelle de transition r_0 doit donc être dans la gamme de la physique des particules.

Mais la densité d'énergie cosmique se ramène, comme on l'a vu, à l'inverse du carré d'une longueur cosmique $\mathbb{L}$, si bien que $\rho_{\mathbb{P}}/\rho_c = (\mathbb{L}/r_{\mathbb{P}})^2$, et l'on obtient finalement la relation fondamentale purement numérique (Nottale, 1993) :

$$\mathbb{K} = \frac{\mathbb{L}}{l_{\mathbb{P}}} = \left(\frac{r_0}{l_{\mathbb{P}}}\right)^3 \equiv \left(\frac{m_{\mathbb{P}}}{m_0}\right)^3, \qquad [10]$$

où $r_0 = \hbar/m_0 c$ est la longueur de Compton associée à l'échelle de masse m_0. On reconnait ici une des "relations des grands nombres" d'Eddington-Dirac, qui relie une échelle cosmique à l'échelle de Planck et à une échelle intermédiaire de physique des particules. Mais alors que la relation de Dirac était empirique, celle-ci est ici démontrée (en particulier la puissance 3).

De plus, alors que dans cette relation empirique, c'était l'échelle dépendant du temps c/H, où H est la constante de Hubble, qui avait été prise pour caractériser les très grandes échelles cosmologiques (suscitant ainsi des théories à variation des constantes, aujourd'hui invalidées, pour conserver malgré tout cette relation), c'est ici l'échelle invariante $\mathbb{L} = 1/\sqrt{\Lambda}$ donnée par la constante cosmologique qui joue ce rôle. Dans cette nouvelle forme de relation des grands nombres, toutes les échelles sont invariantes au cours du temps, et aucune variation des constantes n'est plus nécessaire.

Reste à connaître la valeur de l'échelle de transition r_0 pour en déduire celle de $\mathbb{L} = r_0^3/r_{\mathbb{P}}^2$ et donc de la constante cosmologique $\Lambda = 1/\mathbb{L}^2$. On s'attend déjà à ce que ce soit une échelle typique de particule élémentaire, mais seules des conjonctures peuvent être faites pour le moment sur sa valeur précise.

Une possibilité qui avait été proposée initialement (Nottale, 1993, Chap. 7.1), est que cette échelle de transition soit donnée par le "rayon classique" de l'électron r_e : l'aire $\sigma_e = \pi r_e^2$ est, en mécanique quantique, la section efficace de collision entre électrons ou entre électrons et positrons à la limite d'énergie cinétique nulle et, à un petit facteur numérique près lié à la polarisation, entre électrons et photons. Autrement dit, r_e définit le rayon d'un électron au repos tel qu'il est "vu" par une autre particule.

Or une des première descriptions du vide quantique est celle, proposée par Dirac, d'une "mer" d'électrons d'énergies négatives qui rempliraient tous les états possibles : de cette manière, tout saut d'énergie d'un de ces électrons vers des valeurs positives fait apparaître un "trou", la paire électron-trou étant alors interprété comme une paire électron-positron. On peut alors faire la conjecture que l'expansion cesse à cette échelle entre les électrons de la mer de Dirac, alors qu'elle se poursuit entre les électrons réels. La densité d'énergie du vide se figerait alors à l'échelle du rayon classique de l'électron (qui correspond à une énergie de 70.025 MeV), donnant naissance à la valeur actuelle de la constante cosmologique.

Une autre possibilité, sans doute plus réaliste, serait que la transition corresponde à la distance la plus grande possible entre deux quarks dans la mer de quarks de Dirac. Tant que les distances caractéristiques entre quarks sont inférieures à cette distance maximale, l'expansion joue entre les quarks eux-mêmes. Mais, au delà, le confinement des quarks empêche qu'ils s'écartent plus, et l'échelle correspondante apparaît donc comme une échelle statique qui n'est plus soumise à l'expansion. Plus précisément, dès que deux quarks sont séparés par une distance supérieure du fait de l'expansion, l'énergie est suffisante pour faire apparaître une nouvelle paire quark anti-quark à partir du potentiel de confinement (décrit habituellement comme un potentiel de corde à force constante, voir Bali et al., 2005). Autrement dit, le vide de quarks se remplit de lui-même au cours de l'expansion de manière à conserver une densité constante. C'est précisément une des propriétés attendues pour un vide invariant de Lorentz dans une expansion adiabatique (Carroll et al., 1989). Une telle explication a donc l'avantage de résoudre l'un des principaux problèmes concernant la densité d'énergie du vide quantique : seul le vide de quark, via le confinement, peut mettre en oeuvre en terme de particules élémentaires un tel comportement, les autres champs, qui auraient pu contribuer pour des valeurs supérieures, se trouvant naturellement exclus.

L'échelle d'écartement maximal est donnée par la masse effective des quarks dans le plus léger des hadrons, et est donc égale à la moitié de la masse du pion. On obtient 69.785 MeV pour les $\pi^{\pm}$, 67.488 Mev pour le π^0 et 69.019 MeV pour leur masse moyenne. Strictement, c'est l'échelle de masse minimale, celle du π^0, qui définit l'échelle de longueur maximale recherchée. Cependant, dans cette solution, la constante cosmologique serait une relique, au cours des premiers instants de l'univers, de la transition du plasma de quarks et de gluons vers les hadrons. Des calculs de QCD sur réseau ont permis d'établir que cette transition a lieu à une température $T_c = 154 \pm 8$ MeV (Schwarz, 2003). La masse effective des pions est légèrement augmentée à une telle température (Zschocke et Csernai, 2009). On trouve une masse corrigé $m_{q(\pi^0)}(T_c) = 69.06 \pm 0.21$ MeV, semblable à la masse moyenne du pion.

Nous obtenons alors, avec le choix $r_0 = r_e$, une expression de la constante cosmologique dont la valeur numérique est maintenant plus précise que dans les publications précédentes (Nottale, 1993-2008), $\Lambda_{\text{pred}} = r_{\mathbb{P}}^4/r_e^6 = (1.3628 \pm 0.0003) \times 10^{-56}$ cm^{-2} l'incertitude principale venant de l'erreur actuelle sur la mesure de G, qui a été récemment améliorée [$G = (6.6743 \pm 0.0007) \times 10^{-11}$m^3 kg^{-1} s^{-2} (PDG, 2008)]. Il lui correspond une échelle cosmique $\mathbb{L} = (2.7760 \pm 0.0003)$ Gpc, dont l'équivalent temporel est $\mathbb{T} = \mathbb{L}/c = 9.0544 \pm 0.0009$ milliards d'années et dont le rapport à l'échelle de Planck est le nombre pur $\mathbb{K} = (5.3000 \pm 0.0008) \times 10^{60}$.

Avec le choix $m_0 = (69.0 \pm 0.2)$ MeV, on obtient $\Lambda_{\text{pred}} = (1.25 \pm 0.02) \times 10^{-56}$ cm^{-2}, $\mathbb{L} = (2.89 \pm 0.03)$ Gpc et $\mathbb{K} = (5.52 \pm 0.05) \times 10^{60}$.

Ce grand nombre donne le rapport entre ce qu'on identifie en relativité d'échelle restreinte à des échelles maximale (l'échelle cosmique) et minimale (l'échelle de longueur de Planck), invariantes sous les dilatations, et indépassables (qui jouent le rôle auparavant dévolu respectivement à l'infini et au zéro). Son carré rend compte du facteur de l'ordre de 10^{120} qui caractérise le "problème" de la constante cosmologique.

Son logarithme définit une constante universelle sans dimension, $\mathbb{C} = \ln \mathbb{K} = 139.8$ (Nottale, 1993), qui joue dans les transformations d'échelle "log-lorentziennes" de la relativité d'échelle restreinte un rôle similaire à celui joué par la vitesse de la lumière c dans la transformation de Lorentz du mouvement.

3. Comparaison aux données observationnelles

La constante cosmologique (ou "énergie sombre"), pour laquelle on ne disposait que d'estimations grossières jusqu'en 1998, est mesurée depuis cette date avec une précision qui s'améliore d'année en année. On définit une constante cosmologique réduite, $\Omega_\Lambda = \Lambda c^2/3H_0^2$, où $H_0 = 100h$ est la constante de Hubble actuelle.

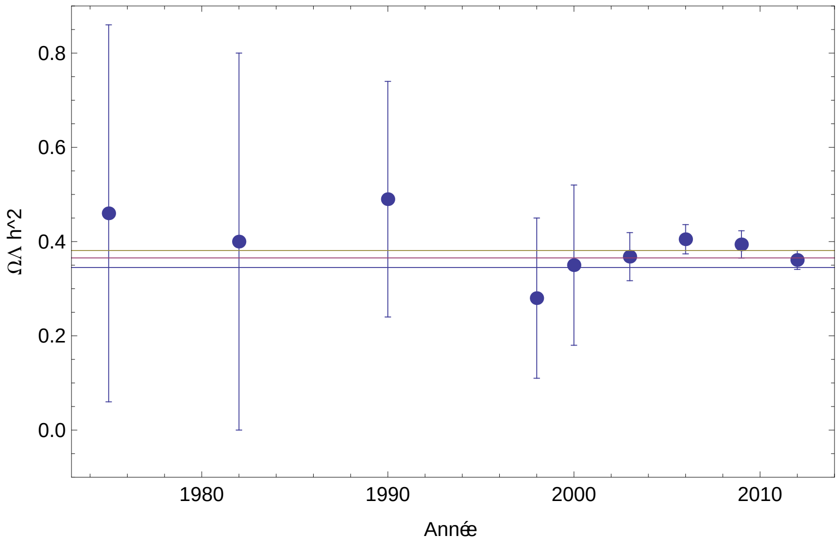

Figure 2. *Evolution au cours du temps des valeurs de la constante cosmologique, estimées à partir des observations (jusqu'en 1990), puis des mesures (à partir de 1998), comparée aux estimations théoriques (mer de Dirac de quarks, voir texte).*

Les résultats du satellite WMAP après cinq ans d'observation (2008), $\Omega_\Lambda h^2(\text{obs}) = 0.384 \pm 0.043$ (Hinshaw et al., 2009 ; Dunkley et al., 2009) et leur combinaison avec d'autres expériences – supernovae, lentilles gravitationnelles, etc. (Komatsu et al., 2009) –, ont donné $\Omega_\Lambda h^2(\text{obs}) = 0.394 \pm 0.031$ et $\Omega_\Lambda h^2(\text{obs}) = 0.368 \pm 0.024$. Les plus récentes déterminations après 8 ans d'observations de WMAP ont donné $\Omega_\Lambda = 0.728 \pm 0.015$ et $h = H_0/100 = 0.704 \pm 0.013$ km/s.Mpc (NASA, 2012). Avec ces deux valeurs on obtient un résultat à la précision accrue :

$$\Omega_\Lambda h^2(\text{obs}) = 0.361 \pm 0.020. \quad [11]$$

L'estimation théorique de $\Omega_\Lambda h^2$ à partir de r_e, $\Omega_\Lambda h^2(\text{pred}) = 0.389$, est maintenant à 1.5 σ de la valeur observée. On obtient respectivement 0.381 à partir du $\pi^\pm$ (Fig. 2) et 0.311 à partir du π^0 (sans correction de température). A partir de la masse effective des quarks dans le π^0 à T_c =154 MeV, $m_0 = 69.0 \pm 0.2$ MeV (ou d'une manière équivalente de la masse moyenne des pions) on obtient :

$$\Omega_\Lambda h^2(\text{pred}) = 0.356 \pm 0.007, \qquad [12]$$

en excellent accord avec la valeur observée (Fig. 2). On trouve 0.345 ± 0.007 à la température $T_{\pi^0} = 135$ MeV (Fig. 2). On notera l'extrême sensibilité de cette prédiction sur la valeur de r_0, venant du fait que cette échelle de transition intervient à la puissance 6 dans le résultat. Sa comparaison avec les mesures successives de plus en plus précises au cours du temps montre un accord constant avec cette valeur théorique, pourtant proposée plusieurs années avant ces mesures (Nottale, 1993).

De plus, la valeur attendue théoriquement restant plus précise que la valeur expérimentale actuelle, et cette précision pouvant s'améliorer par les progrès auxquels on peut s'attendre, en particulier sur la valeur de la constante de gravitation et sur la description du vide de quarks dans l'univers primordial en expansion, cette proposition pourra à nouveau être mise à l'épreuve dans le futur.

4. Bibliographie

Amsler C. *et al.* (Particle Data Group), 2008, *Physics Letters* **B667**, 1

Bali G. et al., 2005, *Phys. Rev.* D **71**, 114513.

Carroll S., Press W. & Turner E., 1992, *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **30**, 499.

Dunkley J. *et al.*, 2009, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 306 (arXiv :0803.0586).

Einstein A., 1917, *Sitzungsberichte der Preussichen Akad. d. Wissenschaften*, translated in The principle of relativity, Dover, p. 177.

Hinshaw G. *et al.*, 2009, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 225 (arXiv :0803.0732).

Komatsu E. *et al.*, 2009, *Astrophys. J. Suppl.* **180**, 330 (arXiv :0803.0547).

Lemaître G., 1934, *Proc. Nat. Acad. Sci.* **20**, 12.

NASA, 2012, http ://lambda.gsfc.nasa.gov/product/map/current/best_params.cfm

Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics*, World Scientific, Singapore.

Nottale, L., 1995, in *Clustering in the Universe*, 30th Rencontres de Moriond, S. Maurogordato, C. Balkowski, C. Tao & J. Tran Thanh Van (Eds.), Frontières, p. 523.

Nottale L., 1996, *Chaos, Solitons & Fractals* **7**, 877.

Nottale, L., 1998, *Ciel et Terre*, Bull. Soc. royale belge d'Astronomie, vol. **114**, 63.

Nottale L., 2003, *Chaos, Solitons & Fractals* **16**, 539.

Nottale L., 2008, *Foundations of Science*, **15**, 101 (arXiv : 0812.3857).

Schwarz D.J., 2003, *Ann. Phys.* **12**, 220.

Zeldovich Ya. B., 1967, *JETP Lett.* **6**, 316.

Zschocke S. & Csernai L., 2009, *Eur. J. Phys.* A **39**, 349.