Nathalie Deruelle

COSMOLOGIE

Cosmologie newtonienne[*]

1. Le modèle de la sphère en expansion

Soit une distribution de matière, à symétrie sphérique par rapport à l'origine O d'un référentiel inertiel, n'interagissant que gravitationnellement. Si la gravité est décrite par la loi de Newton le théorème de Gauss implique que la couche sphérique de particules située à la distance $r_i(t)$ du centre subit la force qu'exercerait une masse M_i égale à celle incluse dans la sphère de rayon r_i et située à l'origine : $\ddot{r}_i = -GM_i(t)/r_i^2$. Supposons maintenant qu'aucune particule ne dépasse ni n'est dépassée par aucune autre ; alors M_i ne dépend pas du temps et l'intégrale première du mouvement est :

$$\dot{r}_i^2 = -v_i^2 + \frac{2GM_i}{r_i} \tag{1}$$

où v_i^2 est une constante d'intégration ayant la dimension d'une vitesse au carré caractérisant la couche (i) considérée.

Dans le cas $v_i^2 > 0$, la solution de (1) s'écrit sous forme paramétrique :

$$r_i = \frac{r_{mi}}{2}(1-\cos\eta) \quad , \quad t - t_{0i} = \frac{r_{mi}}{2v_i}(\eta - \sin\eta) \tag{2}$$

où t_{0i} est une seconde constante d'intégration et où $r_{mi} \equiv 2GM_i/v_i^2$.[1]

Le mouvement sera auto-similaire, c.-à-d. que les particules atteindront toutes en même temps leur distance maximale d'éloignement et retomberont au même moment à l'origine, si t_{0i} et r_{mi}/v_i ne dépendent pas de i. Posant alors $t_{0i} \equiv t_0$ et $\frac{r_{mi}}{2v_i} \equiv \frac{a_0}{c}$ (où c est une constante ayant la dimension d'une vitesse introduite par commodité), les équations (2) se réécrivent

$$r_i = \frac{v_i}{c}a(t) \qquad \text{avec} \qquad a(\eta) = a_0(1-\cos\eta) \quad \text{et} \quad t - t_0 = \frac{a_0}{c}(\eta - \sin\eta)\,. \tag{3}$$

Quant à l'équation (1) elle devient

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = \frac{2GM_i}{r_i^3} \equiv \frac{8\pi G}{3}\varrho \qquad \Longrightarrow \qquad \varrho = \frac{3c^2 a_0}{4\pi G a^3(t)} \tag{4}$$

en utilisant (3). L'exigence d'auto-similarité impose donc que le nuage soit homogène : $M_i = \frac{4}{3}\pi\varrho(t)r_i^3$.

Si l'on assimile les galaxies aux particules d'un nuage homogène et à symétrie sphérique par rapport à l'origine d'un repère inertiel, le modèle (3-4) ainsi construit décrit un univers qui se dilate pour s'effondrer ensuite sur lui-même. Newton, qui tenait la Création pour éternelle (nonobstant la contradiction des termes), en concluait qu'un tel nuage, instable, ne pouvait représenter l'univers dans sa totalité.

L'objection de Newton peut être écartée en conférant au nuage un mouvement global de rotation. Le problème est alors bien plus complexe[2] mais on conçoit que la force centrifuge puisse contrebalancer la

[*] Cette section est extraite du livre "*Mécanique et Gravitation Newtoniennes*" par N.D. et J.P. Uzan, Vuibert, 2006

[1] Dans le cas où $v_i = 0$ la solution de (1) est : $r_i = C_i(t - t_{0i})^{\frac{2}{3}}$ avec $C_i^3 = \frac{9}{2}GM_i$. Le nuage est en expansion indéfinie, ainsi que pour $v_i^2 < 0$.

[2] Voir par exemple *"Galactic Dynamics"* par J. Binney et S. Tremaine, Princeton University Press,1994

gravitation et qu'une configuration stable puisse en résulter. C'est ainsi que Kant et Laplace furent amenés à élaborer leurs modèles du système solaire (qui, au 18ème siècle, *était* l'univers).

Si l'on admet que l'univers peut ne pas être statique, l'argument de Newton tombe également. L'univers a alors une histoire, un début et éventuellement une fin. Ainsi que le firent remarquer Milne et MacCrea en 1934 ce modèle newtonien est mathématiquement équivalent aux modèles relativistes de Friedmann-Lemaître issus de la théorie d'Einstein de la gravitation, la fonction $a(t)$ prenant alors le nom de *facteur d'échelle* de l'univers.

On remarque que la distribution des vitesses est isotrope par rapport à *toutes* les particules du nuage. En effet, puisque le mouvement est auto-similaire, le vecteur position de la particule P_i est $OP_i = \frac{v_i}{c}a(t)$ où v_i est un vecteur, de carré v_i^2 constant ; on a donc $P_iP_j = \frac{v_j - v_i}{c}a(t)$ de sorte que le vecteur vitesse $v_{ij} = \frac{d(P_iP_j)}{dt}$ de la particule j par rapport à la particule i est :

$$v_{ij} = H(t)\,P_iP_j \tag{5}$$

où $H(t)$ est le "paramètre de Hubble" :

$$H(t) \equiv \frac{1}{a}\frac{da}{dt}\,. \tag{6}$$

Pour une durée t courte devant le temps d'évolution caractéristique de l'univers (*i.e.* $t \ll a_0/c$) $H(t)$ est à peu près constant et la vitesse de récession de la "galaxie" j par rapport à i est linéaire dans la distance : c'est la "loi de Hubble".

L'isotropie du champ de vitesse n'implique cependant pas que toutes les particules sont équivalentes. D'une part en effet l'observation du bord extérieur du nuage permet en principe à un observateur de se situer par rapport au centre. Par ailleurs le système de référence de cet observateur, en *co-mouvement* avec la particule à laquelle il est lié, n'est pas inertiel : il est en chute libre.

2. Les pièges de l'univers newtonien infini

Le rayon extérieur du nuage étudié ci-dessus n'est pas distingué. On peut donc le faire tendre vers l'infini, sans rien changer aux conclusions atteintes.[3] Il serait cependant erroné d'en déduire que dans une telle configuration d'extension infinie, il n'y a plus de centre —du moins dans le cadre originel de la théorie où la gravitation est décrite par une force : $F = -m\nabla U$, $U = -\int \frac{\varrho(R',t)}{|R-R'|}dV$. Il faut en effet s'assurer que le théorème de Gauss (utilisé pour bâtir le modèle) reste vrai dans ce passage à la limite. Cela impose que la densité de matière décroisse suffisamment vite à l'infini (plus vite que $1/r^2$). La densité doit donc dépendre de r, et le caractère privilégié de l'origine demeure.

Pour obtenir un modèle cosmologique sans centre dans le cadre originel de la théorie, il faut donc considérer, ainsi que le fit Newton, un nuage emplissant uniformément tout l'univers (*i.e.* de densité constante dans l'espace, en moyenne en tous cas). *Chaque* galaxie (ou groupe de galaxie) devient alors un centre. Comme les forces d'attraction qu'elle subit de la part de galaxies diamétralement opposées s'annulent deux à deux on serait tenté d'en déduire qu'elle est en mouvement libre et que la gravité, paradoxalement, est effacée. Mais en fait l'intégrale des forces ne converge pas (les sommations sur les angles et la distance ne commutent pas, avatar du fait que le théorème de Gauss ne s'applique pas). Un univers infini et sans centre ne peut donc être modélisé en théorie newtonienne stricte : l'univers doit avoir un centre, soit parce qu'il est d'extension finie, soit parce que sa densité est fonction de la distance.

Ces modèles d'univers-île, dont l'histoire peut ne pas être éternelle alors que le temps, lui, coule depuis toujours et à jamais, et qui s'organisent autour d'un centre dont on ne peut savoir s'il est au repos ou en translation uniforme dans le reférentiel absolu, sont un aspect plutôt décevant du superbe édifice bâti par Newton... Ainsi la théorie newtonienne de la gravitation ne permet pas de réaliser le rêve de Giordano

[3] Le premier à avoir fait éclater le monde sphérique grec pour passer "du monde clos à l'univers infini" (Koyré) semble avoir été Thomas Digges in *Perfect description of the celestial spheres*, Londres, 1576.

Bruno :[4] l'univers de Newton, qu'il soit fini ou non, doit avoir un centre. *Stricto sensu*, c'est le seul point libre de l'univers, en translation uniforme par rapport au repère absolu. Absurde ![5]

3. L'équation de "Friedmann"

Pour bâtir des modèles cosmologiques newtoniens satisfaisants, il faut élargir la théorie, d'abord en décrivant la gravitation comme une théorie de champ locale (sous la forme de la loi de Poisson qui ne fait intervenir que l'accélération de gravitation $g \equiv f/\varrho$ de sorte que le problème de la convergence du potentiel (tel que $\nabla U = -g$) ne se pose pas), puis en élargissant le groupe de Galilée à celui de Milne. Curieusement, cette cosmologie newtonienne ne fut développée qu'après l'avénement de la Relativité Générale, dans les années 1930, par Milne et Mac Crea.

Rassemblons les équations qui gouvernent, en repère inertiel, le "fluide cosmologique" newtonien, équations de Poisson, d'Euler et de continuité :

$$\Delta U = 4\pi G\varrho \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial t} + (v.\nabla)v = -\frac{1}{\varrho}\nabla p - \nabla U \quad , \quad \frac{\partial \varrho}{\partial t} + \nabla.(\varrho v) = 0 \tag{1}$$

auxquelles il faut ajouter une équation d'état, $p = p(\varrho)$.

On cherche une solution de la forme : $\varrho = \varrho(t)$, $p = p(t)$ (qui traduit l'homogénéité supposée de la matière dans tout l'univers), et $v = H(t)R$, où R est le rayon vecteur (de module r) de l'origine à la "galaxie" considérée, qui traduit l'isotropie (par rapport à *tous* les points) de la distribution. Pour $H > 0$ la distribution de matière est en expansion, les galaxies s'éloignant toutes les unes des autres avec une vitesse proportionnelle à leur distance.

On connaît alors la solution de l'équation de Poisson : $U = \frac{2}{3}\pi G\varrho(t)\, r^2$. L'équation de continuité donne, elle, en posant $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$, $a(t)$ étant le *facteur d'échelle* :

$$\varrho(t) = \frac{\varrho_0}{a^3} \tag{2}$$

où ϱ_0 est une constante d'intégration. Enfin l'équation d'Euler donne l'équation de "Friedmann" (entre guillements car elle fut découverte en 1922 par Friedmann dans le contexte très différent de la Relativité Générale où l'on considère que c'est l'espace lui-même qui est en expansion) :

$$H^2 + \frac{Kc^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3}\varrho \tag{3}$$

où Kc^2 est une constante d'intégration. Ces équations sont les mêmes que celles obtenues en & 1 et on remarque que la pression n'intervient pas dans la solution. Si $K = 0$ les équations s'intègrent très simplement

$$a \propto t^{2/3} \quad , \quad H = \frac{2}{3t} \quad , \quad \varrho \propto \frac{1}{t^2}\,. \tag{4}$$

Dans le cadre de la relativité générale cette solution prendra le nom d'"Einstein-de Sitter".

[4] "Il y a un seul espace universel, une seule et vaste immensité que nous pouvons librement appeler le vide ; en icelui sont d'innombrables globes pareils à celui sur lequel nous vivons et croissons (...) Il y a dans cet espace des corps innombrables comme notre Terre, et d'autres terres, notre Soleil et d'autres soleils qui, dans cet espace infini, exécutent tous des révolutions de dimensions déterminées et finies autour de leurs propres centres" ; cette perspective ne ravissait guère Kepler, qui écrivait en 1610 à Galilée :"Cette pensée porte avec elle je ne sais quelle horreur secrète ; en effet on se trouve errant dans cette immensité à laquelle sont déniés toute limite, tout centre, et par la-même tout lieu déterminé". (Citations de G. Bruno et J. Kepler, *in* "*Du monde clos à l'univers infini*" par A. Koyré, Gallimard, 1973.)

[5] Comme disait Leibniz : "Ces Messieurs soutiennent donc que l'Espace est un être réel absolu ; mais cela les mène à de grandes difficultéz (...) La fiction d'un Univers matériel fini, qui se promène tout entier dans un Espace vide infini, ne sauroit être admise. Elle est tout-à-fait déraisonnable et impraticable. Car outre qu'il n'y a point d'Espace réel hors de l'univers matériel, une telle action seroit sans but ; ce seroit travailler sans rien faire, agendo nihil agere. Il ne se produiroit aucun changement observable pour qui que ce soit. Ce sont les imaginations des *Philosophes à idées incomplettes* qui se font de l'espace une réalité absolue". (Cité par A. Koyré, *in* "*Du monde clos à l'univers infini*", Gallimard, 1973.)

Dans le modèle cosmologique obtenu ci-dessus, toutes les particules (galaxies) sont accélérées les unes par rapport aux autres. Comment donc matérialiser le repère inertiel où les équations sont censées être valables ?

On peut suivre Leibniz et dire que seuls les mouvements relatifs importent. Alors chaque point-galaxie définit un repère local "en chute libre" dans lequel les équations sont postulées être valables. Cette équivalence dynamique entre repères en chute libre et repères inertiels signifie que l'on peut localement effacer la gravitation. Le fait que cela soit possible provient de l'égalité entre masse grave et masse inerte et de l'invariance des équations du mouvement ($\Delta U = 4\pi G\rho$, $a = -\nabla U$) dans le groupe de Milne : $x \to x' = x - d(t)$, à condition de transformer concomitamment le potentiel selon $U \to U' = U - x.\ddot{d}$. On remarque que dans ces transformations du groupe de Milne, le potentiel gravitationnel n'est plus une grandeur scalaire, indépendante du repère.

4. Evolution des perturbations

Les réserves précédentes étant faites, la mécanique newtonienne permet néanmoins d'étudier l'évolution des perturbations d'un nuage homogène et isotrope, et de poser ainsi le problème de la croissance des grandes structures dans l'univers, galaxies, amas, etc.

Partant des équations de conservation, d'Euler et de Poisson, on suppose que densité, pression, champs de vitesse et de gravitation sont la somme de la solution de fond homogène et isotrope décrite dans la section précédente, et d'une perturbation $(\varrho_1, p_1, v_1, g_1)$. C'est un exercice facile de linéariser les équations du mouvement autour de la solution de fond et d'obtenir les équations pour les perturbations :[6]

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \varrho_1}{\partial t} + 3H\varrho_1 + HR\cdot\nabla\varrho_1 + \varrho\nabla\cdot v_1 = 0 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + Hv_1 + H(R\cdot\nabla)v_1 = g_1 - \dfrac{1}{\varrho}\nabla p_1 \\ \nabla\wedge g_1 = 0 \qquad , \qquad \nabla\cdot g_1 = -4\pi G\varrho_1 \\ p_1 = v_s^2\varrho_1 \end{cases} \tag{1}$$

où dans la dernière équation $v_s = \sqrt{dp/d\varrho}$ est la "vitesse du son". Pour résoudre ces équations on décompose les perturbations en ondes planes. Chaque onde est caractérisée par sa longueur d'onde λ ou son vecteur d'onde dirigé selon R et de module $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. On appelle longueur d'onde ou vecteur d'onde en *co-mouvement* les grandeurs $\lambda_{cm} = \lambda/a(t)$ ou $q = ka(t)$ qui rapportent la taille de la perturbation au facteur d'échelle. Ainsi donc on écrit, génériquement :

$$f_1(R,t) = f_q(t)\exp\Big(\mathrm{i}\frac{R\cdot q}{a(t)}\Big) \tag{2}$$

et les équations (1) deviennent, après réarrangement :

$$\begin{cases} \dot{\delta} = \dfrac{q^2\epsilon}{a} \\ \dot{v}_q^{\perp} + Hv_q^{\perp} = 0 \quad , \quad \dot{\epsilon} + H\epsilon = \Big(-\dfrac{v_s^2}{a} + \dfrac{4\pi G\varrho a}{q^2}\Big)\delta \\ q\wedge g_q = 0 \quad , \quad \mathrm{i}\,q\cdot g_q = -4\pi G a\varrho_q \end{cases} \tag{3}$$

où on a introduit le *contraste de densité* $\delta \equiv \varrho_q/\varrho$ et décomposé v_q selon $v_q = v_q^{\perp} + \mathrm{i}q\epsilon$ avec $v_q^{\perp}\cdot q = 0$. En éliminant ϵ on obtient l'équation d'évolution du contraste de densité :

$$\ddot{\delta} + 2H\dot{\delta} + \Big(\frac{v_s^2 q^2}{a^2} - 4\pi G\varrho\Big)\delta = 0. \tag{4}$$

[6] Voir par exemple "*Gravitation*" par S. Weinberg, John Wiley, 1972, et "*Cosmologie primordiale*" par P. Peter et J.P. Uzan, Belin, 2005.

Connaissant la solution de (4) on déduit la perturbation de la pression : $p_q = v_s^2 \varrho\delta$, et l'expression des *modes de compression* $\epsilon = a\dot{\delta}/q^2$. Quant aux *modes rotationnels* $\vec{v}_q^{\perp}$ ils décroissent comme $1/a$, *cf* (3). Enfin la perturbation de l'accélération gravitationnelle s'obtient par résolution directe de (3) : $g_q = 4i\pi G\varrho a\delta q/q^2$.

Supposons maintenant pour simplifier que $K = 0$, de sorte que $a(t)$ est donné par (3.4). Si de plus le terme de pression est négligeable, $v_s \approx 0$, la solution de (4) est la somme d'un mode décroissant $\propto t^{-1}$ et d'un mode croissant $\propto t^{\frac{2}{3}} \propto a$. Si en revanche le fluide satisfait à l'équation d'état $p \propto \frac{1}{3}\varrho$ (pertinente dans l'univers primordial dominé par un fluide de radiation), on a $v_s \propto t^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow v_s^2/a^2 \propto t^{-2}$ et (4) donne alors : $\delta \propto t^\alpha$ avec $\alpha = -\frac{1}{6} \pm \sqrt{\frac{25}{36} - C}$ où C est la constante $C \equiv \frac{v_s^2 q^2}{a^2}(6\pi G\varrho)^{-1}$. On voit ainsi que le contraste de densité ne peut augmenter que si le *critère de Jeans* est satisfait :

$$\frac{v_s^2 q^2}{a^2} < 4\pi G\varrho. \tag{5}$$

Au nombre d'onde en co-mouvement q correspond une taille caractéristique $\lambda = 2\pi a/q$; le critère de Jeans dit donc que seules des perturbations plus grandes que $\sqrt{\pi v_s^2/G\varrho} \propto a$ peuvent croître et éventuellement donner naissance aux grandes structures observées.

5. Le paradoxe de Olbers.

Considérons un univers statique, homogène et infini où la densité d'objets lumineux, tous semblables et de même luminosité absolue L_0, est n. Dans une pellicule sphérique mince de rayon r et épaisseur dr on compte donc $4\pi n r^2 dr$ "étoiles" dont la luminosité apparente au centre est $4\pi n L_0 dr$, étant donné que la luminosité décroît en $1/r^2$. Ainsi la luminosité totale au centre, $4\pi n L_0 \int dr$, tend-elle vers l'infini. Or la nuit est noire... (ou presque, car la Terre est en fait baignée dans un rayonnement micro-onde de corps noir à 3 degrés Kelvin).

Ce paradoxe fut popularisé par Olbers (1826) mais c'est Thomas Digges qui semble-t-il le formula le premier (1576) (l'argument présenté est dû à Chézeaux, 1744).

Résoudre le paradoxe de Olbers.

Pour résoudre le paradoxe de Olbers il faut abandonner une des hypothèses qui y conduit.

On peut arguer que l'univers n'est pas infini (Kepler, 1610) ; que la densité est "fractale" (d'Albe) ; que les étoiles ont une durée de vie limitée et que la lumière met du temps à nous parvenir (Kelvin 1901) ; que l'univers a une durée de vie infinie mais n'est pas statique, ce qui induit un effet Doppler (modèle de l'"état stationnaire", Bondi, 1957) ; que l'univers est en expansion lente et d'âge fini (modèle du "Big-Bang"). Notons finalement que l'échappatoire de Chézeaux qui consiste à dire que la lumière est absorbée par les étoiles intermédiaires ne résout rien pour des raisons d'équilibre thermodynamique (Herschel 1831).[7]

Espaces-temps de Robertson-Walker

En Relativité Générale géométrie et matière se déterminent l'une l'autre et toute solution des équations d'Einstein représente un univers possible... Ceci étant, par une combinaison d'observations et de principes simplificateurs qui conduisent à ignorer les irrégularités dans la distribution de matière qui nous entoure et à postuler que cette isotropie n'est pas spécifique à notre point d'observation, on est amené à représenter la géométrie spatiale de l'Univers par une variété riemanienne homogène et isotrope, c.-à-d. à "symétrie maximale".

6. Crochet et dérivée de Lie

Le commutateur, ou crochet de Lie, $[v, w]$ de deux champs de vecteurs v et w est la composition antisymétrisée de v et w, vus non comme des éléments d'un espace vectoriel ni comme des tenseurs une fois contravariants mais comme des

[7] Pour en savoir plus, voir par exemple "*Darkness at night*" par E. Harrison, Harvard University Press, 1987.

opérateurs de dérivation : si v^i et w^i sont leurs composantes dans la base naturelle $\partial_i \equiv \frac{\partial}{\partial x^i}$ associée à des coordonnées x^i, on a

$$[v, w] = (v^i \partial_i w^j - w^i \partial_i v^j)\partial_j \,.$$

Crochet de Lie et dérivation covariante sont les pierres angulaires des définitions des tenseurs de torsion et de Riemann.[8]

Introduisons maintenant la *dérivée de Lie* et relions-la au crochet de Lie.

Soit un champ de vecteurs X; soit $p(\lambda)$ les points de sa courbe integrale issue du point $p(0) \equiv p$ (i.e : si $x^i(\lambda)$ sont les coordonnées des points $p(\lambda)$ alors les composantes de X sont $X^i = \frac{dx^i}{d\lambda}$ dans la base $\frac{\partial}{\partial x^i}$). Soit T un champ de tenseurs de valeur $T|_{p(\lambda)}$ au point $p(\lambda)$ (et $T|_{p(0)} \equiv T$ au point p). On appelle "pull-back" de $T|_{p(\lambda)}$ le tenseur $\phi_{\lambda^*}T$, défini en p, et égal à $T|_{p(\lambda)}$ (ainsi les deux tenseurs $T|_{p(\lambda)}$ et $\phi_{\lambda^*}T$ sont les mêmes, mais définis en des points différents). La dérivée de Lie de T par rapport à X est alors définie par

$$\mathcal{L}_X T = \lim_{\lambda \to 0} \frac{1}{\lambda}(\phi_{\lambda^*}T - T)$$

Si $T \equiv Y$ est un champ de vecteurs, sa dérivée de Lie par rapport au vecteur X se décompose sur une base $\frac{\partial}{\partial x^i}$ selon

$$\mathcal{L}_X Y = (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)\partial_i$$

En effet le champ de vecteurs $Y|_{p(\lambda)}$ se décompose, au point $p(\lambda)$ de coordonnées $x'^j = x^j + X^j d\lambda$ selon $Y|_{p(\lambda)} = Y^j(x'^j)\frac{\partial}{\partial x'^j} = (Y^j + \partial_i Y^j \, X^i d\lambda)\frac{\partial}{\partial x'^j}$. Son "pull-back" $\phi_{\lambda^*}Y$ se décompose, en p, selon $\phi_{\lambda^*}Y = (\phi_{\lambda^*}Y)^j \frac{\partial}{\partial x^j}$. Faisons agir ces deux vecteurs, qui sont égaux, sur la fonction x^i ; comme $\frac{\partial x^i}{\partial x'^j} = \delta^i_j - \partial_j X^i d\lambda$, on a bien

$$(\phi_{\lambda^*}Y)^i = Y^i + (X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i)d\lambda$$

Ainsi donc, crochet et dérivée de Lie sont équivalents :

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y]$$

l'opérateur $\mathcal{L}_X$ donnant le crochet $[X, Y]$ en agissant sur Y. Ainsi l'identité de Jacobi s'écrit indifféremment selon

$$[X, [Y, Z]] + [Y[Z, X]] + [Z, [X, Y]] = 0 \qquad , \qquad \mathcal{L}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y]$$

Si l'on définit la dérivée de Lie par rapport au vecteur X d'une fonction scalaire f par $\mathcal{L}_X f = X^i \partial_i f$, on obtient facilement les composantes de la dérivée de Lie par rapport au vecteur X d'une forme ω :

$$\mathcal{L}_X \omega = (X^i \partial_i \omega_j + \omega_i \partial_j X^i)\mathrm{d}x^j$$

ainsi que celles de tout tenseur. Par exemple, la dérivée de Lie par rapport au vecteur X d'un tenseur deux fois covariant, g, se décompose selon

$$\mathcal{L}_X g = (X^i \partial_i g_{jk} + g_{ij}\partial_k X^i + g_{ik}\partial_j X^i)\mathrm{d}x^j \otimes \mathrm{d}x^k \,.$$

[8] Addendum: Crochet de Lie et fermeture de chemins. Considérons un point p de coordonnées x^iet la courbe issue de p tangente au vecteur X. Progressons de $d\lambda_1$ le long de cette courbe pour arriver au point $p + d_1 p$ de coordonnées $x^i + X^i d\lambda_1$. En ce point les composantes du champ de vecteurs Y sont $Y^i(x^j) + (\partial_j Y^j)X^i d\lambda_1$. En progressant ensuite de $d\lambda_2$ le long de la courbe tangente à Y et issue de $p + d_1 p$ on atteint le point $p + d_{12}p$ de coordonnées $x^i + X^i d\lambda_1 + [Y^i(x^j) + (\partial_j Y^j)X^i d\lambda_1]d\lambda_2$. Si maintenant on inverse les opérations, passant de p à $p + d_2 p$ le long du champ Y, puis à $p + d_{21}p$ le long de X, on arrive au point de coordonnées $x^i + Y^i d\lambda_2 + [X^i(x^j) + (\partial_j X^j)Y^i d\lambda_2]d\lambda_1$. Les deux points $p + d_{12}p$ et $p + d_{21}p$ sont les mêmes si $X^j \partial_j Y^i - Y^j \partial_j X^i = 0$, c.-à-d. si le crochet de Lie des vecteurs X et Y est nul.

7. Isométries et vecteurs de Killing

En mécanique newtonienne un champ (e.g. de gravitation) est dit *homogène* s'il est le même en tous points (ses composantes cartésiennes sont alors des constantes, dépendant éventuellement du temps); il est *isotrope* autour d'un point P si ses composantes en coordonnées sphériques sont les mêmes sur chaque sphère centrée sur P. En ce sens la métrique euclidienne elle-même est homogène et isotrope.

De manière analogue une métrique riemanienne $g_{ij}(x^k)$ possède une *symétrie* si elle est invariante dans une transformation $P \to \tilde{P}$ le long d'un certain trajet. Considérons donc le trajet infinitésimal $P \to \tilde{P}$ défini par : $\tilde{x}^k = x^k + \xi^k$. On a alors : $\delta g_{ij} \equiv g_{ij}(\tilde{x}^k) - g_{ij}(x^k) = \xi^k \partial_k g_{ij}$ et $\delta(dx^k) = (\partial_i \xi^k) dx^i$. La métrique $ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$ est invariante ($\delta(ds^2) = 0$) si :

$$\partial_m g_{ij} \xi^m + g_{mi} \partial_j \xi^m + g_{im} \partial_i \xi^m = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_j \xi_i + D_i \xi_j = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{L}_\xi g_{ij} = 0. \tag{1}$$

La dernière égalité exprime que la dérivée de Lie (cf & précédent) de la métrique le long du vecteur ξ^i est nulle. Le vecteur ξ^i le long duquel la métrique est invariante est un *vecteur de Killing* et l'équation (1) contraint à la fois ξ^i et la métrique. Une autre façon (passive plutôt qu'active) d'exprimer les conditions d'existence de symétries d'un espace est de faire un changement de coordonnées infinitésimal $x^k \to \tilde{x}^k = x^k + \xi^k$. Les composantes $g_{ij}(x^k)$ de la métrique dans le système $\{x^k\}$ au point P de coordonnées x^k sont reliées à ses composantes $\tilde{g}_{ij}(\tilde{x}^k)$ en P dans le sytème $\{\tilde{x}^k\}$ par :

$$g_{ij}(x^k) = \frac{\partial \tilde{x}^k}{\partial x^i} \frac{\partial \tilde{x}^l}{\partial x^j} \tilde{g}_{kl}(\tilde{x}^p) = (\delta_i^k + \partial_i \xi^k)(\delta_j^l + \partial_j \xi^l) \tilde{g}_{kl}(\tilde{x}^p). \tag{2}$$

En écrivant maintenant : $\tilde{g}_{kl}(\tilde{x}^p) = \tilde{g}_{kl}(x^p) + \xi^m \partial_m g_{kl}$, i.e. en introduisant la métrique au point $\tilde{P}$ qui, dans le système $\{\tilde{x}^k\}$, a les mêmes coordonnées que le point P dans le sytème $\{x^k\}$, on obtient :

$$g_{ij}(x^k) = \tilde{g}_{ij}(x^k) + D_j \xi_i + D_i \xi_j. \tag{3}$$

Si $g_{ij}(x^k) = \tilde{g}_{ij}(x^k)$, l'espace possède une symétrie, et on retrouve l'équation de Killing (1).

Isométries et vecteurs de Killing de la métrique euclidienne

Soient $e_{\alpha\beta}(P)$ les valeurs des coefficients de la métrique euclidienne en un point P de coordonnées x^γ, dans un système de coordonnées curvilignes quelconques. En un point voisin Q de coordonnées $x^\gamma + \xi^\gamma$, ces coefficients valent, au premier ordre en ξ : $e_{\alpha\beta}(P) + \xi^\gamma \partial_\gamma e_{\alpha\beta}$. Effectuons maintenant le changement de coordonnées $x^\gamma = x'^\gamma + \xi^\gamma$, de sorte que dans le nouveau système Q a les mêmes coordonnées que P dans l'ancien. Dans les nouvelles coordonnées les coefficients de la métrique seront, en Q :

$$\begin{aligned} e'_{\mu\nu}(Q) &= \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} e_{\alpha\beta}(Q) = (\delta_\mu^\alpha + \partial_\mu \xi^\alpha)(\delta_\nu^\beta + \partial_\nu \xi^\beta)(e_{\alpha\beta}(P) + \xi^\gamma \partial_\gamma e_{\alpha\beta}) \\ &= e_{\mu\nu}(P) + e_{\mu\gamma} \partial_\nu \xi^\gamma + e_{\nu\gamma} \partial_\mu \xi^\gamma + \xi^\gamma \partial_\gamma e_{\mu\nu} \,. \end{aligned}$$

Le déplacement est une *isométrie* et le vecteur ξ^α un *vecteur de Killing* si $e'_{\mu\nu}(Q) = e_{\mu\nu}(P)$ (le changement $\xi^\gamma \partial_\gamma e_{\alpha\beta}$ dû au déplacement est alors trompeur car il peut être compensé par un changement de coordonnées). Pour que cela soit possible il faut que ξ^α satisfasse aux *équations de Killing* (1).

Le plus simple bien sûr pour trouver les vecteurs de Killing de la métrique euclidienne est d'utiliser des coordonnées cartésiennes, de sorte que les équations de Killing se réduisent à $\partial_\alpha \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\alpha = 0$ dont la solution générale est

$$\xi^\alpha = d^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta X^\beta \qquad \text{avec} \qquad \omega_{\alpha\beta} = -\omega_{\beta\alpha}$$

où d^α est un vecteur constant et $\omega_{\alpha\beta} \equiv \delta_{\alpha\gamma} \omega^\gamma{}_\beta$ une matrice à coefficients constants antisymétrique. La métrique euclidienne à trois dimensions possède donc 6 vecteurs de Killing, trois de translation, proportionnels à $\xi^\alpha = (1,0,0)$, $\xi^\alpha = (0,1,0)$ et $\xi^\alpha = (0,0,1)$, et trois de rotation, proportionnels à $\xi^\alpha = (-Y, X, 0)$, $\xi^\alpha = (0, Z, -Y)$, $\xi^\alpha = (Z, 0, -X)$.

Le fait que la métrique euclidienne possède 3 vecteurs de Killing de translation traduit l'*homogénéité* de l'espace euclidien; le fait qu'elle en possède trois de rotation traduit son *isotropie*.

Des équations de Killing on déduit que $\tilde{D}_\alpha \tilde{D}^\alpha \xi^\beta = 0$ (car les dérivées covariantes euclidiennes commutent). Pour déterminer un champ de Killing partout il suffit par conséquent de connaître sa valeur ainsi que ses dérivées premières en un point, ce qui correspond à 6 conditions initiales (puisque les 9 dérivées premières sont soumises aux 6 équations de Killing). Par conséquent le nombre maximal de vecteurs de Killing qu'une métrique peut posséder est 6 (et, plus généralement, $n(n+1)/2$ à n dimensions.) L'espace euclidien est donc *maximalement symétrique.*

En espace courbe l'équation de Killing est très restrictive car on montre aisément (cf, e.g., Stephani p. 198) que :

$$D_i D_j \xi_k = -R^l_{ijk}\xi_l \tag{4}$$

et par conséquent les valeurs de ξ^i et de ses dérivées en un point déterminent toutes ses dérivées supérieures en ce point et donc sa valeur en tous points. Ainsi, puisque, dans une variété à N dimensions, le vecteur ξ^i possède N composantes indépendantes et sa dérivée $N(N-1)/2$ (en vertu de (1)), on voit qu'une variété de dimension N possède au plus $N(N+1)/2$ vecteurs de Killing indépendants. Ceci étant un espace-temps peut, bien sûr, ne pas posséder le nombre maximal de vecteurs de Killing possibles. On peut en effet montrer en particulier (cf e.g S. Weinberg ou H. Stephani p. 199) que les ξ^i et leurs dérivées doivent satisfaire :

$$(D_i R^m{}_{jkl} - D_j R^m{}_{ikl})\xi_m + (\delta^n_i R^m{}_{jkl} - \delta^n_j R^m{}_{ikl} + \delta^n_l R^m{}_{kji} - \delta^n_k R^m{}_{lji})D_n\xi_m = 0. \tag{5}$$

8. Espaces à symétrie maximale

Considérons les vecteurs de base de l'espace tangent en P. La variété est isotrope autour de P s'il existe des isométries qui les échangent; il y a $N(N-1)/2$ telles opérations. Elle est homogène s'il existe des isométries qui transportent un point en un autre; il y en a N. Ainsi donc un espace homogène et isotrope possède le nombre maximal de vecteurs de Killing. L'équation (5) ne doit pas alors restreindre ξ^k et l'on en déduit (cf H. Stephani p. 199 ou S. Weinberg p. 382) que le tenseur de Riemann d'un tel espace à *symétrie maximale* doit être de la forme :

$$R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc}) \tag{1}$$

où K est une constante. L'espace est à *courbure constante* ; en effet :

$$R_{ab} = K(N-1)g_{ab} \quad ; \quad R = KN(N-1). \tag{2}$$

On peut montrer (Eisenhart, 1949) que les espaces à symétrie maximale, donc à courbure constante, sont déterminés de façon unique par les données de la dimension de l'espace, N, de la signature de la métrique, et de la valeur de K. (Plus précisément, s'il existe deux métriques de mêmes signature et dimension $g_{ab}(x^c)$ et $g'_{ab}(x'^c)$ telles que $R_{abcd} = K(g_{ac}g_{bd} - g_{ad}g_{bc})$ et $R'_{abcd} = K(g'_{ac}g'_{bd} - g'_{ad}g'_{bc})$, alors il existe un changement de coordonnées qui transforme g en g' ; cf e.g. S. Weinberg p. 385.

Puisque les espaces à courbure constante sont pour l'essentiel uniques, la méthode pour obtenir leur métrique g_{ab} est indifférente. Soit donc l'espace (pseudo)-euclidien de dimension $N+1$ de métrique en coordonnées cartésiennes :

$$dS^2 = K^{-1}dz^2 + f_{ab}dx^a dx^b \tag{3}$$

où la métrique $f_{ab}, a, b = 1, 2, ...N$ a même signature que g_{ab} (e.g. $f_{ab} = \delta_{ab}$ si l'espace est riemannien, $f_{ab} = \eta_{ab}$ s'il est pseudo-riemannien). Considérons dans cet espace l'hyper-"sphère" d'équation :

$$z^2 + Kf_{ab}x^a x^b = 1. \tag{4}$$

Sur cette surface : $dz^2 = K^2(f_{ab}x^a dx^b)^2/(1 - Kf_{ab}x^a x^b)$ et la métrique induite y est :

$$d\sigma^2 = g_{ab}dx^a dx^b \quad \text{avec} \quad g_{ab} = f_{ab} + K\frac{f_{ac}f_{bd}x^c x^d}{1 - Kf_{cd}x^c x^d}. \tag{5}$$

C'est alors un calcul facile (qui utilise le fait que $\Gamma^a_{bc} = Kx^a g_{bc}$) de voir que le tenseur de Riemann est de la forme (1). Ainsi donc (5) est la métrique cherchée.

En prenant $N = 2, f_{ab} = \delta_{ab}, K > 0$ et en posant $x^1 = K^{-1/2}\sin\theta\cos\phi$ et $x^2 = K^{-1/2}\sin\theta\sin\phi$, on voit aisément que la métrique (10) s'écrit alors : $d\sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. L'espace est une sphère.

En prenant $N=3, f_{ab}=\delta_{ab}$ et en posant :

$$\begin{cases} x^1 = K^{-1/2}\sin\chi\cos\theta; \quad x^2 = K^{-1/2}\sin\chi\sin\theta\cos\phi; \quad x^3 = K^{-1/2}\sin\chi\sin\theta\sin\phi, \quad \text{si} \quad K>0 \\ x^1 = \chi\cos\theta, \quad x^2 = \chi\sin\theta\cos\phi, \quad x^3 = \chi\sin\theta\sin\phi, \quad \text{si} \quad K=0 \\ x^1 = |K|^{-1/2}\mathrm{sh}\chi\cos\theta, \quad x^2 = |K|^{-1/2}\mathrm{sh}\chi\sin\theta\cos\phi, \quad x^3 = |K|^{-1/2}\mathrm{sh}\chi\sin\theta\sin\phi, \quad \text{si} \quad K<0 \end{cases} \tag{6}$$

on trouve que la métrique (5) s'écrit sous la forme :

$$d\sigma_3^2 = a^2[d\chi^2 + f_K^2(\chi)(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)] \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_0(\chi) = \chi \quad \text{si} \quad V_3 = \mathcal{E}_3 \\ f_{+1}(\chi) = \sin\chi \quad \text{si} \quad V_3 = S_3 \\ f_{-1}(\chi) = \sinh\chi \quad \text{si} \quad V_3 = H_3 \end{cases} \tag{7}$$

où a (qui a la dimension d'une longueur) ne dépend pas de (χ,θ,ϕ). L'espace est une 3-sphère, un 3-plan euclidien ou un 3-hyperboloïde. En posant $r = f_K(\chi)$ (7) s'écrit aussi

$$d\sigma_3^2 = a^2\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right]. \tag{8}$$

Enfin, si $\bar r = \frac{2r}{1+\sqrt{1-Kr^2}}$ on a

$$d\sigma_3^2 = \frac{a^2}{1+K\bar r^2/4}\,[d\bar r^2 + \bar r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)]. \tag{9}$$

N.B. : le volume de S_3 est fini : $\int d^3V = \int\sqrt{g}\,d\chi d\theta d\phi = a^3\int\sin^2\chi\sin\theta\,d\chi d\theta d\phi = 2\pi^2a^3$. Le volume de $\mathcal{E}_3$ et de H_3 est infini, sauf si on les munit de topologies non-triviales (celle du tore par exemple).

9. Espace-temps à sections homogènes et isotropes

Soit V_4 un espace pseudo-riemannien à quatre dimensions. Supposons qu'il existe un champ de vecteurs du genre temps (que l'on peut considérer comme tangents à des lignes d'univers) tel que toutes les sections spatiales de V_4 orthogonales à ce champ soient maximalement symétriques. Une variété ainsi feuilletée est un espace de *Robertson-Walker* et son élément de longueur peut s'écrire sous la forme :

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{1}$$

(un terme en $dt\,dx^\alpha$ briserait l'isotropie et le coefficient de dt^2 peut toujours être normalisé à $c^2=1$).

Dans un cadre cosmologique t est le *temps cosmique*, $a(t)$ le *facteur d'échelle* et $H \equiv \frac{\dot a}{a}$ le *paramètre de Hubble*. On utilise souvent aussi le *temps conforme*, η, défini par $dt = a(\eta)\,d\eta$ (ainsi que les coordonnées spatiales (7) ou (9) de la section précédente).

Par construction les lignes de coordonnées (r,θ,ϕ constants) sont des géodésiques.

On peut voir cela directement : l'équation d'une géodésique étant $\frac{d^2x^i}{d\tau^2} + \Gamma^i_{jk}\frac{dx^j}{d\tau}\frac{dx^k}{d\tau} = 0$, si $\frac{dx^\alpha}{d\tau}|_{(\tau=0)} = 0$ alors $\frac{d^2x^\alpha}{d\tau^2}|_{(\tau=0)} = 0$ car $\Gamma^\alpha_{00} = 0$.

Ces lignes de coordonnées représentent donc les trajectoires de particules test (des "galaxies") en chute libre et le système de coordonnées (t,r,θ,ϕ) est dit comobile.

Les tenseurs de courbure, de Ricci, la courbure scalaire et le tenseur d'Einstein de la métrique (1) se calculent à partir des définitions, simplifiées grâce à (8.1). On obtient

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \left(\frac{K}{a^2}+H^2\right)(g_{\alpha\gamma}g_{\beta\delta} - g_{\alpha\delta}g_{\beta\gamma}) \quad , \quad R_{0\beta0\delta} = -\frac{\ddot a}{a}g_{\beta\delta} \tag{2}$$

$$G^0_0 = -3\left(\frac{K}{a^2}+H^2\right) \quad , \quad G^\alpha_\beta = -\left(\frac{2\ddot a}{a} + \frac{K}{a^2} + H^2\right)\delta^\alpha_\beta. \tag{3}$$

10. Espaces-temps maximalement symétriques

Pour qu'un espace-temps de Robertson-Walker soit non seulement, par construction, à sections spatiales homogènes et isotropes, mais aussi maximalement symétrique (i.e. possède quatre isométries supplémentaires), il faut et il suffit que son tenseur de Riemann puisse se mettre sous la forme (8.1), i.e. que

$$\frac{\ddot{a}}{a} = \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{K}{a^2} = K_4 \,. \tag{1}$$

Si $K_4 = 0$, l'espace-temps, plat, n'est autre que celui de Minkowski. Si l'on choisit de plus un feuilletage par des sections spatiales euclidiennes, $K = 0$, alors les conditions (1) donnent l'élément de longueur sous une forme familière (après absorption de la constante dimensionnée a dans la coordonnée r) :

$$ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \,. \tag{2}$$

Si l'on choisit $K = -1$, alors $a = \bar{t}$, et l'élément de longueur prend la forme dite de *Milne*

$$ds^2 = -d\bar{t}^2 + \bar{t}^2[d\chi^2 + \sinh^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \,. \tag{3}$$

L'espace-temps de Minkowski peut donc être vu comme un espace-temps de Robertson-Walker à sections spatiales hyperboliques et facteur d'échelle proportionnel à $\bar{t}$. Un observateur comobile n'est autre qu'un observateur inertiel issu de l'origine. Par le changement de coordonnées $t = \bar{t}\cosh\chi, r = \bar{t}\sinh\chi$, on ramène (3) à la forme précédente, ce qui montre explicitement que $\bar{t} = 0$ n'est pas un point singulier de l'espace-temps (et on constate au passage que les coordonnées de Milne ne couvrent pas tout M_4).

Si $K_4 = H^2$, l'espace-temps est dit de *de Sitter*. Plusieurs feuilletages spatiaux sont possibles :

$$\begin{cases} K = 0 \quad \Longrightarrow \quad ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2) \\ K = +1 \quad \Longrightarrow \quad ds^2 = -d\bar{t}^2 + \dfrac{\cosh^2 H\bar{t}}{H^2}[d\chi^2 + \sin^2\chi(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \\ K = -1 \quad \Longrightarrow \quad ds^2 = -d\tilde{t}^2 + \dfrac{\sinh^2 H\tilde{t}}{H^2}[d\tilde{\chi}^2 + \sinh^2\tilde{\chi}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)] \end{cases} \tag{4}$$

(On laisse en exercice le soin de trouver les transformations de coordonnées qui font passer d'un feuilletage à l'autre.)

L'espace-temps de de Sitter étant maximalement symétrique, il a la géométrie d'un 4-hyperboloïde (il est non plat et non fermé) et on peut le plonger dans un espace (pseudo-euclidien) à cinq dimensions. On le visualise en supprimant deux dimensions d'espace. Les intersections du 2-hyperboloïde obtenu et de plans (paraboles, cercles ou hyperboles) représentent les sections spatiales des trois systèmes de coordonnées ci-dessus. Il est alors facile de constater que seul le feuilletage $K = +1$ couvre tout l'hyperboloïde, i.e. tout l'espace-temps de de Sitter.

Il existe enfin un autre système de coordonnées fréquemment utilisé dans lequel l'élément de longueur de de Sitter s'écrit

$$ds^2 = -(1 - \rho^2 H^2)dT^2 + \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2 H^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \,. \tag{5}$$

Ce système, dans lequel les composantes de la métrique ne dépendent pas du temps T, est *statique*.

L'espace-temps de de Sitter est souvent utilisé comme modèle simplifié d'univers, par exemple dans le cadre des théories d'inflation. C'est aussi un exemple idéal pour montrer que des éléments de longueur compliqués peuvent cacher des géométries simples et que des coefficients de métrique singuliers en certains points (e.g. (5) en $\rho = 1/H$ ou (4) en $\tilde{t} = 0$) signalent parfois une simple pathologie du système de coordonnées et non une singularité du tenseur de courbure et donc de l'espace-temps lui-même.

Si $K_4 = -H^2$ l'espace-temps est dit *anti-de Sitter*. Sa structure géométrique est plus complexe (il contient des lignes de genre temps fermées) mais il est actuellement populaire dans le cadre de la correspondance "CFT/AdS" en théorie des cordes.

Dynamique des espaces-temps de Friedmann-Lemaître

Décider de représenter l'univers par un espace-temps de Robertson-Walker s'appelle le "principe cosmologique" : aucun point de l'espace ne doit être privilégié et par conséquent ses sections spatiales doivent être maximalement symétriques.

Dans les systèmes de coordonnées considérés dans les sections précédentes, où la métrique s'écrit par exemple

$$ds^2 = -dt^2 + a^2(t)\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)\right] \tag{0}$$

les lignes de coordonnées sont des géodésiques. Le "postulat de Weyl" stipule que les galaxies formant le "fluide cosmologique" suivent (du moins en première approximation) de telles géodésiques.

11. Le redshift des galaxies

Soit une galaxie en $r = r_g$ (et, e.g., $\theta = \pi/2, \phi = 0$) émettant des ondes lumineuses. Considérons la lumière arrivant à l'observateur en $r = 0$. Deux crêtes successives de l'onde arrivent en t_0 et $t_0 + \Delta t_0$, où Δt_0, intervalle de temps cosmique, est aussi l'intervalle de temps propre à la montre de l'observateur. La lumière a été émise par la galaxie en r_g à t_e et $t_e + \Delta t_e$. Elle a suivi une géodésique radiale nulle : $ds^2 = 0 = -dt^2 + a^2dr^2/(1-Kr^2)$. On a donc que $dt/a(= -dr/\sqrt{1-Kr^2})$ est indépendant du temps et par conséquent : $\Delta t_e/a_e = \Delta t_0/a_0$, soit encore, en introduisant la fréquence de la lumière $\nu = \frac{1}{\Delta t}$:

$$z_e \equiv \frac{\nu_e}{\nu_o} - 1 = \frac{a_0}{a_e} - 1 \tag{1}$$

où z_e est le décalage spectral de la galaxie. Si z_e est systématiquement positif ("redshift") alors $a_e < a_0$.

Si l'on développe le facteur d'échelle $a(t)$ en série de Taylor on a

$$z_e \simeq H_0(t_0 - t_e)\left[1 + \left(1 + \frac{1}{2}q_0\right)H_0(t_0 - t_e)\right] + ... \quad \text{avec} \quad H_0 \equiv \frac{\dot{a}_0}{a_0}\ ,\ q_0 \equiv -\frac{\ddot{a}_0 a_0}{\dot{a}_0^2} \tag{2}$$

H_0 est la *constante de Hubble* et q_0 le *paramètre de décélération*. Ainsi (2) relie une grandeur mesurable, le redshift, à une grandeur coordonnée, $(t_0 - t_e)$, non mesurable et qu'il s'agit de relier à une distance mesurable.

12. Distances en cosmologie

La galaxie G est repérée par ses coordonnées comobiles $r = r_g$ (et, e.g., $\theta = \pi/2, \phi = 0$). Cette distance coordonnée est un intermédiaire de calcul (tout comme une coordonnée temporelle x^0), bien adapté à l'intégration des équations géodésiques car comobile, mais n'est pas mesurable.

On peut définir la *distance propre* D_p de la galaxie G à l'origine (où est l'observateur) à l'instant t par $ds|_t \equiv dl = a(t)\frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}}$, soit

$$D_p = a(t)\int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1-Kr^2}} = a(t) \times \begin{cases} \text{arcsin}\, r_g & \text{si} \quad K = +1 \\ r_g \quad \text{si} \quad K = 0 \\ \text{argsinh}\, r_g & \text{si} \quad K = -1 \end{cases} \tag{1}$$

Cette distance serait mesurable si l'on disposait d'une règle rigide reliant la Terre à la galaxie, ce qui n'est pas le cas... On constate néanmoins que si $a(t)$ est une fonction croissante du temps, ce qui est le cas si les galaxies sont systématiquement redshiftées, alors la distance propre entre deux objets augmente avec le temps. L'univers (ou, plus justement, ses sections spatiales) est alors en expansion.

Une grandeur en revanche mesurable est la *distance luminosité* définie par D_L telle que

$$l = \frac{L}{4\pi D_L^2} \tag{2}$$

où l est la luminosité apparente, mesurée, de la galaxie, et L sa luminosité absolue (supposée connue...). Cette distance luminosité peut être reliée à la distance coordonnée r_g par les considérations suivantes : la luminosité absolue est donnée par $L = N\frac{h\nu_e}{\Delta t_e} = Nh\nu_e^2$ où N est le nombre de photons émis pendant une période Δt_e et $h\nu_e$ leur énergie ; la luminosité apparente est donnée par $l = N\frac{h\nu_o}{\Delta t_o}\frac{1}{S}$ où $S = 4\pi a_0^2 r_g^2$ est la surface de la sphère atteinte par ces photons à $t = 0$ (moment où on les observe), et donc $D_L \equiv \sqrt{\frac{L}{4\pi l}} = a_0 r_g \frac{\nu_e}{\nu_0}$, soit encore, en utilisant (11.1)

$$D_L = a_0 r_g (1 + z_e)\,. \tag{3}$$

13. La loi de Hubble

Elle relie deux grandeurs mesurables, à savoir le redshift et la distance luminosité d'une galaxie. Pour ce faire on utilise (11.1), (12.3) ainsi que l'équation de la trajectoire des photons radiaux, soit

$$\int_0^{r_g} \frac{dr}{\sqrt{1 - Kr^2}} = \int_{t_e}^{t_0} \frac{dt}{a(t)} \quad , \quad z_e = \frac{a_0}{a_e} - 1 \quad , \quad D_L = a_0 r_g (1 + z_e)\,. \tag{1}$$

Si le contenu matériel de l'univers est connu, alors, comme nous le verrons plus bas, les équations d'Einstein déterminent la fonction $a(t)$. Dans ce cas la première équation ci-dessus donne $a_0 r_g$ en fonction de t_0 et t_e, la seconde donne $a_0 r_g$ en fonction de z_e et la troisième prédit la relation entre D_L et z_e. La confrontation de cette prédiction aux observations indique alors si la description du contenu matériel de l'univers était correcte ou non.

On peut aussi, à l'inverse, effectuer un développement de Taylor du facteur d'échelle : on connaît z_e en fonction de $(t_0 - t_e)$ (cf 11.2) ; on connaît D_L en fonction de r_g (cf 12.3) ; il faut donc relier r_g et $(t_0 - t_e)$. On utilise l'équation de la trajectoire des photons radiaux qui donne, en développant $a(t)$ et en inversant : $(t_0 - t_e) = a_0 r_g \left(1 - \frac{H_0}{2} a_0 r_g\right) + ...$ On reporte cette expression de $(t_0 - t_e)$ dans celle de z_e et on obtient : $z_e = H_0 a_0 r_g \left[1 + \frac{H_0 a_0 r_g}{2}(1 + q_0)\right] + ...$ Enfin la relation (12.3) donne par inversion : $r_g = \frac{D_L}{a_0}(1 - H_0 D_L) + ...$, ce qui, reporté dans l'expression de z_e conduit finalement à

$$z_e = H_0 D_L \left[1 + \frac{H_0 D_L}{2}(q_0 - 1)\right] + ... \tag{2}$$

L'ajustement de cette relation aux observations donne en principe (H_0, q_0, ...), i.e. les dérivées temporelles successives du facteur d'échelle, et permet ainsi de construire la fonction $a(t)$. Les équations d'Einstein, comme nous le verrons plus bas, fournissent alors des contraintes sur le contenu matériel de l'univers.

A l'ordre le plus bas le redshift est proportionnel à la distance luminosité : c'est la *loi de Hubble*, établie observationnellement par Hubble dans les années 30 ; ceci étant la valeur numérique de la constante de Hubble H_0 est difficile à obtenir, la définition de "chandelles standard" donnant la luminosité absolue des galaxies étant l'une des tâches les plus ardues en cosmologie observationnelle. La valeur sur laquelle les astronomes s'accordent actuellement est

$$H_0 = 100h\ km/sec/Mpc \qquad \text{avec} \qquad h \approx 0.7 \tag{3}$$

(où $1pc = 3.26$ années-lumière). Les déviations à la linéarité donnent q_0, etc, mais on se doute que de telles mesures sont extrêmement délicates. Les observations récentes de supernovae distantes indiquent que $q_0 < 0$, soit $\ddot{a}_0 > 0$: l'expansion de l'univers serait donc actuellement accélérée.

14. Les tenseurs énergie-impulsion représentant le contenu matériel de l'Univers

Si l'espace-temps est à symétrie maximale ou possède une famille de sous-espaces à symétrie maximale de dimension N, coordonnées x^a et métrique g_{ab}, les tenseurs décrivant la matière doivent posséder les mêmes symétries. Leurs dérivées de Lie par rapport aux vecteurs de Killing doivent donc être nulles. On voit ainsi facilement que les scalaires ne doivent pas dépendre des x^a, que les vecteurs doivent avoir des composantes nulles dans V_N et que les composantes T_{ab} des tenseurs symétriques de type 2 doivent être proportionnelles au tenseur métrique g_{ab}.

Ainsi, à cause de la symétrie de Robertson-Walker imposée aux modèles d'univers par le principe cosmologique, le tenseur énergie-impulsion représentant l'ensemble des constituants matériels de l'univers ne peut être que du type fluide parfait :

$$T_{ij} = (\rho + p)u_i u_j + p g_{ij}$$

où ρ et p sont des fonctions du temps, où g_{ij} est la métrique de Roberston-Walker dans les coordonnées introduites dans la partie précédente (cf eg (0)) et où u^i est un quadri-vecteur normalisé à -1 (et représente donc, à c près, le champ de vitesse des lignes de coordonnées-géodésiques).

Les galaxies n'interagissent que gravitationnellement et sont immobiles dans le repère comobile (0) (postulat de Weyl). Elles constituent ainsi un fluide sans pression. On considère qu'il en est de même de toute matière ordinaire ("baryonique"), gaz intergalactique etc. Ainsi le tenseur énergie-impulsion de cette composante baryonique est $T_{ij}^b = (\rho(t)u_i u_j)^b$ avec $u_b^i = (1,0,0,0)$ (de sorte que $T_0^{0b} = -\rho_b(t)$ et $T_{\alpha\beta}^b = T_{0\alpha} = 0$).

A ce fluide baryonique il faut semble-t-il (nous verrons plus bas pourquoi) ajouter une (large) fraction de matière non-baryonique (neutrinos massifs ? gravitinos ? axions ?...), froide, c.-à-d. non relativiste, soit encore de pression quasi-nulle, appelée *matière noire froide* ("cold dark matter") : $T_{ij}^{cdm} = (\rho(t)u_i u_j)^{cdm}$ avec $u_{cdm}^i = (1,0,0,0)$. On posera $\rho_m(t) = \rho_b(t) + \rho_{cdm}(t)$.

Il existe par ailleurs dans l'univers un fluide de radiation, dominé par le rayonnement micro-onde de fond à 2.7 degrés K découvert par Penzias et Wilson en 1965, auquel on ajoute parfois un hypothétique fluide de *matière noire chaude* ("hot dark matter"). Son équation d'état est $p_{rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad}$ de sorte que $T_0^{0rad} = -\rho_{rad}(t)$ et $T_\beta^{\alpha rad} = \frac{1}{3}\rho_{rad}(t)\delta_\beta^\alpha$.

Des champs scalaires homogènes $\phi = \phi(t)$ ont enfin peut-être dominé l'évolution de l'univers à ses débuts (cf plus bas les scénarios d'inflation) et actuellement (scénarios dits de "quintessence"). Le tenseur énergie-impulsion d'un champ scalaire est

$$-T_0^{0\Phi} \equiv \rho_\Phi = \frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) \quad , \quad T_\beta^{\alpha\Phi} \equiv p_\Phi \delta_\beta^\alpha = \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 - V(\Phi)\right)\delta_\beta^\alpha \,. \tag{1}$$

Un champ scalaire ou fluide très particulier est la *"constante" cosmologique* dont le tenseur énergie-impulsion est

$$T_j^{i\Lambda} = -\rho_\Lambda \delta_j^i \,. \tag{2}$$

15. Les équations de Friedmann-Lemaître

Les équations d'Einstein sont $G_{ij} = 8\pi G T_{ij}^{tot}$. On a vu que pour un espace-temps de Robertson-Walker de métrique (0) les composantes du tenseur d'Einstein sont données par (9.3). Par ailleurs $T_0^0 = -\rho^{tot}$ et $T_\beta^\alpha = p^{tot}\delta_\beta^\alpha$. Les équations d'Einstein s'écrivent donc (Friedmann 1922)

$$H^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho_{tot} - \frac{K}{a^2} \qquad , \qquad \frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3}(\rho_{tot} + 3p_{tot}) \tag{1}$$

où, rappelons-le, $H \equiv \frac{\dot{a}}{a}$ et $K = \{0, +1, -1\}$ selon que les sections spatiales sont euclidiennes, sphériques ou hyperboliques.

Les équations d'Einstein, on l'a vu, contiennent les équations du mouvement de la matière en vertu de l'identité de Bianchi $D_i G^{ij} \equiv 0$. La seconde équation (1) peut donc être remplacée par $D_i T^{i0} = \partial_i T^{i0} + \Gamma_{ik}^i T^{k0} + \Gamma_{ik}^0 T^{ik} = 0$ soit, en explicitant les symboles de Christoffel :

$$\dot{\rho}_{tot} + 3H(\rho_{tot} + p_{tot}) = 0 \,. \tag{2}$$

On remarque que ces équations ressemblent fort aux équations (3.3-4) régissant les modèles cosmologiques newtoniens. La seule différence est qu'en relativité la pression intervient dans les équations car elle "pèse".

Si les différents constituants de l'univers n'interagissent que gravitationnellement leurs tenseurs énergie-impulsion sont séparément conservés. Ainsi on a pour la matière (baryons plus "CDM"), la radiation et la constante cosmologique (qui mérite donc bien son nom de "constante") :

$$\rho_m = \rho_0^m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 \quad , \quad \rho_{rad} = \rho_0^r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 \quad , \quad \rho_\Lambda = \rho_0^\Lambda \tag{3}$$

où les indices 0 indiquent la valeur actuelle des densités et du facteur d'échelle.

La dilution en $1/a^3$ de la densité de matière froide s'explique par un simple effet d'expansion volumique. La décroissance en $1/a^4$ de la densité de rayonnement provient de l'effet combiné de l'expansion et du fait que l'énergie d'un photon est proportionnelle à sa fréquence, qui décroît comme $1/a$ en raison du redshift cosmologique Le rayonnement de fond étant celui d'un corps noir, la loi de Stefan stipule que sa densité d'énergie est proportionnelle à la puissance quatrième de sa température, et par conséquent

$$T \propto \frac{1}{a}\,. \tag{4}$$

Ainsi, comme le remarqua Gamow dans les années 40, tout univers en expansion contenant un fluide de radiation a été plus chaud dans le passé.

Il est devenu habituel d'introduire les *paramètres de densité* $\Omega_0^{(i)} \equiv \frac{8\pi G\rho_0^{(i)}}{3H_0^2}$ qui permettent de réécrire la première équation de Friedmann sous la forme (à condition que $H_0 \neq 0$)

$$\left(\frac{H}{H_0}\right)^2 = \Omega_0^m \left(\frac{a_0}{a}\right)^3 + \Omega_0^r \left(\frac{a_0}{a}\right)^4 + \Omega_0^\Lambda + \Omega_0^K \left(\frac{a_0}{a}\right)^2 \tag{5}$$

en ayant posé $\Omega_0^K \equiv -\frac{K}{H_0^2 a_0^2}$.

N.B. : Nous étudierons plus bas le rôle d'un champ scalaire primordial (d'inflation) et ignorerons celui d'un champ de "quintessence", version dynamique d'une constante cosmologique, actuellement populaire.

Modèles d'univers : de 1917 à 1982

16. Le modèle statique d'Einstein (1917)

En 1917 les galaxies et leur mouvement systématique de récession étaient inconnus (le "grand débat" sur la distance et la nature des "nébuleuses" ainsi que la loi de Hubble datent des années 30). Par ailleurs le préjugé d'un univers statique était bien ancré (les modèles cosmologiques newtoniens en expansion datent eux aussi des années 30). Enfin les problèmes de représentation d'un univers homogène et isotrope d'extension infinie en physique newtonienne étaient connus.

C'est pour de telles raisons qu'Einstein chercha une solution de ses équations, statique, homogène, isotrope et de sections spatiales sphériques (et donc de volume fini) où la matière se résume à un fluide sans pression (rappelons que le rayonnement de fond à 3 degrés Kelvin ne fut découvert que dans les années 60).

Les équations (15.1-2) se réduisent alors à

$$0 = \frac{8\pi G}{3}(\rho_0^m + \rho_0^\Lambda) - \frac{1}{a_0^2} \quad , \quad \rho_0^m - 3\rho_0^\Lambda = 0 \tag{1}$$

On voit que la présence d'une constante cosmologique est nécessaire pour que le système ait une solution.

L'introduction de cette nouvelle constante fondamentale fut vite considérée par Einstein comme une ≪grossière erreur≫ et il l'abandonna définitivement dès que Hubble découvrit la récession des galaxies, une loi qui milite en faveur d'un univers en expansion. (Ce modèle statique fut cependant défendu jusqu'aux années 70 par les partisans de la théorie de la "lumière fatiguée" censée expliquer le redshift des galaxies par une interaction des photons et du milieu intergalactique. Mais, d'une part une telle interaction n'est pas prédite par les lois de l'électromagnétisme standard et impliquerait d'autre part une dispersion, non observée, de la lumière.)

17. Les modèles de de Sitter (1917) et de l'"état stationnaire" (1948)

De Sitter, lui, chercha à représenter l'univers par un espace-temps maximalement symétrique. Nous avons vu plus haut que les symétries supplémentaires imposées alors aux modèles de Robertson-Walker impliquaient les relations (10.1). Les équations de Friedmann (15.1) deviennent ainsi : $K_4 = \frac{8\pi G}{3}\rho^{tot}$ et $K_4 = -\frac{4\pi G}{3}(\rho^{tot} + 3p^{tot})$ et imposent que la matière se résume à une constante cosmologique : $\rho^{tot} = -p^{tot} \equiv \rho_0^\Lambda$. Ainsi donc l'univers de de Sitter est vide de matière ordinaire, courbé par la seule constante cosmologique.

Dans un tel univers les galaxies doivent être vues comme des particules test suivant des géodésiques. La question est : lesquelles ?

Dans un système de coordonnées adaptées, l'élément de longueur de l'espace-temps de de Sitter peut être mis sous la forme statique (10.5). Remarquons d'abord que la lumière émise par une particule ("galaxie") immobile dans ce repère en $\rho = \rho_g$ sera observée en $\rho = 0$ avec un redshift donné par $z_e \equiv \frac{\nu_e}{\nu_r} - 1 = \sqrt{\frac{1}{1-\rho_g^2 H^2}} - 1$. Un raisonnement calqué sur celui conduisant à (13.2) relie la distance luminosité à ρ_g par $D_L = \rho_g(1 + z_e)$, de sorte que la "loi de Hubble" pour de telles "galaxies" est : $z_e = \sqrt{1 + D_L^2 H^2} - 1$. Elle n'est pas linéaire pour les petites distances et les "galaxies" ne suivent pas des géodésiques de l'espace-temps ; il semble pourtant que c'est ainsi que Hubble lui-même comprit sa loi dans le contexte de la relativité générale (voir son livre "The realm of nebulae"), preuve s'il en est besoin que l'interprétation d'une observation de nature cosmologique est délicate... En revanche, si les galaxies sont en chute libre radiale, on trouve, après un calcul facile de géodésique : $z_e = HD_L$; dans ce cas la loi de Hubble est strictement linéaire. Dans les deux cas le redshift des galaxies n'est pas interprété en terme d'expansion de l'univers mais de redshift gravitationnel combiné, dans le second cas, à un effet Doppler.

En 1948, Bondi, Hoyle, Gold et Narlikar postulent que les galaxies suivent les géodésiques $x^\alpha = Const.$ de l'espace-temps de de Sitter décrit dans le repère où les sections spatiales sont euclidiennes et où l'élément de longueur prend la forme $ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht}(dx^2 + dy^2 + dz^2)$, cf & 10. Le facteur d'échelle est $a(t) = e^{Ht}$ et le redshift observé des galaxies est interprété comme une expansion des sections spatiales. On prédit alors la relation redshift-luminosité suivante

$$z_e = \frac{1}{2}\left(\sqrt{1 + 4HD_L} - 1\right) . \tag{1}$$

La comparaison à (13.2) identifie la constante H à celle de Hubble et le paramètre de décélération est prédit valoir $q_0 = -1$.

Dans un tel modèle les galaxies, a priori, se dispersent. De façon à décrire un Univers dans un état stationnaire, c.-à-d. globalement identique à lui-même au cours du temps t, Bondi et al. proposèrent un phénomène de création continue de matière, chargée de compenser la dispersion du flot géodésique de galaxies—une idée a priori pas plus choquante que celle de création de toute la matière lors d'un "Big-Bang", ex nihilo elle aussi, imposée par le modèle "standard" (voir plus bas).

Ce modèle fut cependant abandonné dans les années 60 avec la découverte par Penzias et Wilson du rayonnement de fond à 3 degrés Kelvin, forte indication que l'univers a été plus chaud dans le passé, qu'il a donc une histoire et n'est donc pas dans un état stationnaire.

18. Le modèle "standard" du Big-Bang chaud[9]

Dans ce modèle, qui sert depuis les années 60 de cadre à la cosmologie observationnelle, la croissance du facteur d'échelle est régie par les équations de la Section 15. On voit ainsi sur (15.5) que pour les $a(t)$ suffisamment petits, c'est la densité de radiation qui gouverne l'évolution de l'univers et le facteur d'échelle croît en $t^{\frac{1}{2}}$. En $t = 0$, densités d'énergie et tenseur de courbure divergent : c'est le *Big-Bang*, singularité

[9] Pour un exposé plus détaillé su modèle standard, voir le cours de F. Bernardeau, et, eg, les livres de P.Peter et Jean-Philippe Uzan ou de M. Mukhanov.

de l'espace-temps où les équations d'Einstein ne sont plus valables. Ce Big-Bang de plus fut "chaud" car la température de la radiation, inversement proportionnelle au facteur d'échelle, y devient infinie.

Ensuite la matière domine et (si le terme de courbure peut être ignoré) le facteur d'échelle croît en $t^{\frac{2}{3}}$. L'évolution ultime de l'univers dépend de la présence ou non de la constante cosmologique et de la courbure des sections spatiales. Pour $\Omega_0^\Lambda = 0$ et $\Omega_0^K < 0$ ($K = +1$) par exemple, l'univers après sa période d'expansion s'effondrera sur lui-même. En revanche, pour $\Omega_0^\Lambda > 0$ l'Univers tend asymptotiquement vers un espace-temps de de Sitter.

Les valeurs des paramètres de densité $\Omega_0^{(i)}$ sont dérivés d'observations astronomiques. L'équation (15.5) détermine seulement leur somme

$$1 = \Omega_0^m + \Omega_0^{rad} + \Omega_0^\Lambda + \Omega_0^K\,. \tag{1}$$

Quant à la seconde équation de Friedmann (15.1) elle donne

$$2q_0 = \Omega_0^m + 2\Omega_0^{rad} - 2\Omega_0^\Lambda\,. \tag{2}$$

Si la densité de radiation est dominée par le rayonnement de corps noir du fond microonde (i.e. si, comme on le pense, la "matière sombre chaude" est négligeable), alors sa température ($T_0 = 2.7$ degrés K) et la loi de Stefan ($\rho_0^{rad} = \sigma T_0^4$) montrent qu'elle est actuellement négligeable :

$$\Omega_0^{rad} \approx 10^{-4}\,. \tag{3}$$

Dans les années 90, aucun besoin de constante cosmologique ne s'étant fait sentir, les deux équations (1) et (2) se résumaient alors à : $1 = \Omega_0^m + \Omega_0^K$ et $2q_0 = \Omega_0^m$. Supposer en plus des sections spatiales quasi-euclidiennes (en accord avec les prédictions des modèles d'inflation, voir plus bas) conduisait alors à $\Omega_0^m = 1$, en désaccord avec les observations de courbes de rotation des galaxies par exemple, qui indiquaient plutôt : $\Omega_0^m = 0.3$. Pour que Ω_0^m ait cette dernière valeur, les sections spatiales de l'univers devaient être hyperboliques ($\Omega_0^K = 0.7 \Rightarrow K = -1$) (d'où la construction de modèles d'inflation "ouverte").

La situation a changé dramatiquement ces toutes dernières années. Tout d'abord les mesures des anisotropies du rayonnement de fond (en particulier la position du premier "pic Doppler") indiquent que

$$\Omega_0^m + \Omega_0^\Lambda \approx 1 \tag{4}$$

ce qui implique via (1) et (2) $\Omega_0^K \approx 0$, en accord avec les modèles d'inflation standard. Par ailleurs les observations récentes de supernovae lointaines indiquent que $q_0 < 0$. La présence d'une constante cosmologique (ou d'un champ de "quintessence", qui en est une version dynamique) semble donc s'imposer.

Soyons plus précis : les observations de supernovae ne mesurent pas directement q_0, le développement limité (13.2) manquant de précision pour les redshifts mesurés (de l'ordre de 0.5-1). On utilise plutôt les expressions exactes (13.1) en y exprimant dt en fonction de da à partir de (15.5). Si l'on pose $\Omega_0^{rad} = 0$, on a alors, en tenant compte de (2) (dans le cas $K = 0$)

$$H_0 D_L = (1 + z_e) \int_0^{z_e} \frac{dz}{\sqrt{1 + (2 + \Omega_0^m - 2\Omega_0^\Lambda)z + (1 + 2\Omega_0^m - \Omega_0^\Lambda)z^2 + \Omega_0^m z^3}} \tag{5}$$

(ce qui redonne bien (13.2) au premier ordre, en utilisant (2)). Dans la zone de redshifts balayée ($z \approx [0.5-1]$) et pour les valeurs pressenties de Ω_0^m etΩ_0^Λ (≈ 0.3 et ≈ 0.7) les termes en z et z^2 sont comparables et l'intégrale s'avère dépendre grosso modo de $\Omega_0^\Lambda - \Omega_0^m$; l'ajustement aux observations donne

$$\Omega_0^\Lambda - \Omega_0^m \approx 0.4\,. \tag{6}$$

Enfin, la valeur $\Omega_0^m = 0.3$ obtenue par les courbes de rotation de galaxies (entre autres) se confirme. On arrive donc à un faisceau d'observations indépendantes se recoupant pour donner

$$\Omega_0^{rad} \simeq 0 \quad , \quad \Omega_0^m \simeq 0.3 \quad , \quad \Omega_0^K \simeq 0 \qquad , \quad \Omega_0^\Lambda \simeq 0.7\,. \tag{7}$$

Il reste à évaluer la contribution de la matière ordinaire, baryonique, à Ω_0^m. La méthode la plus fiable est de mesurer les proportions (relatives à l'hydrogène) des éléments légers (Hélium, Lithium,...) présents dans l'univers. En effet ces éléments (comme le montrèrent Gamow, Bethe, Hoyle,...) ne sont pas produits dans les étoiles comme les éléments plus lourds, mais au début de l'histoire de l'univers, lors de la *nucléosynthèse primordiale*, époque où la température était suffisamment élevée pour les produire. Les proportions produites résultent d'un équilibre entre le taux d'expansion de l'univers et la densité de protons présents. On arrive ainsi à

$$\Omega_0^b h^2 \approx 2\times 10^{-2} \qquad \text{soit} \qquad \Omega_0^b \approx 0.04\,. \tag{8}$$

...Les résultats (3), (7) et (8) sont pour le moins surprenants : l'évolution de l'univers serait gouvernée non, comme on le croyait jusqu'aux années 80, par la matière ordinaire, connue en laboratoire, mais par un mélange de "matière noire froide" de nature inconnue et de constante cosmologique dont les seules valeurs "naturelles" sont, soit strictement zéro comme le prônait Einstein, soit, si c'est une "énergie du vide", $\rho_\Lambda \simeq \rho_{Planck}$, ce qui, par l'équation de Friedmann (15.1), est incompatible par plus de 120 ordres de grandeur avec la valeur mesurée de la constante de Hubble (13.3)...

19. Quelques questions sans réponse dans le modèle standard

En plus des énigmes évoquées ci-dessus, le modèle standard laisse en suspens plusieurs questions. Par exemple :

• *Le problème de la platitude de l'espace*

L'équation de Friedmann (15.1) s'écrit aussi sous la forme

$$\Omega - 1 = \frac{K}{(aH)^2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Omega - 1 = (\Omega-1)_0 \left(\frac{T}{T_0}\right)^{2(1-p)/p} \tag{1}$$

où $\Omega \equiv \rho_{tot}/\rho_{crit}$, $\rho_{crit} \equiv 3H^2/8\pi G$, et où dans la seconde équation on a pris $a \propto t^p$ et utilisé $aT = Const.$ On voit ainsi que $\Omega - 1$ croît avec le temps si $p < 1$, ce qui est le cas, et que pour être de l'ordre de un aujourd'hui (ce qui est le cas : la géométrie des sections spatiales de l'univers est remarquablement plate), il a fallu qu'il soit TRÈS proche de 1 dans le passé (à environ 10^{60} près au temps de Planck où la température a dû valoir 10^{32} degrés Kelvin).

• *Le problème de l'horizon*

La distance propre parcourue depuis le Big-Bang par un photon, et donc par tout phénomène causal (appelée aussi "horizon des particules"), est finie si $a \propto t^p, p < 1$ ce qui est le cas si l'évolution de l'univers a été dominée par de la poussière ou de la radiation (pour $K = 0$). On a en effet $ds^2 = 0$ donc, au moment par exemple du découplage radiation-matière : $l_p = a\int_0^t a^{-1}dt = 2t = 2t_{dec}(T_{dec}/T)^2$ si l'univers est encore dominé par la radiation ($a \propto t^{1/2}$). Une application numérique simple (et un peu de trigonométrie) donne alors que des régions séparées du ciel, de quelques degrés carré chacune, ne pouvaient pas être en contact causal au moment du découplage et ne devraient donc pas a priori avoir les mêmes propriétés. Or le rayonnement de fond à 3 degrés K est isotrope sur tout le ciel à mieux de 10^{-5} près et ses fluctuations ont partout les mêmes propriétés statistiques. Ainsi on ne peut, dans le cadre du modèle standard, que postuler l'homogénéité et l'isotropie des sections spatiales, on ne peut espérer les expliquer.

• *Le problème de la formation des structures*

C'est une autre façon de poser le problème de l'horizon. Le rayon de l'horizon des particules est $l_p = t/(1-p)$ si le facteur d'échelle croît en t^p, $p < 1$; le rayon de Hubble qui caractérise l'échelle des distances cosmologiques est lui aussi proportionnel au temps cosmique : $l_H \equiv 1/H = a/\dot{a} = t/p$. La taille propre d'une structure de taille comobile fixe croît en revanche comme le facteur d'échelle, en t^p. On voit donc que suffisamment tôt dans l'histoire de l'univers toute structure a eu une taille supérieure à celle de l'horizon ou du rayon de Hubble. Elle n'a donc pu être générée par des processus causaux. Par conséquent il est impossible, dans le cadre du modèle standard, d'expliquer le spectre des perturbations éventuellement à l'origine des grandes structures, galaxies et amas de galaxies observées : il faut le postuler.

• *Le problème des monopôles*

Les théories actuelles d'unification des interactions sont pour la plupart des théories de jauge dans lesquelles un champ scalaire ϕ, dit de Higgs, brise la symétrie de l'interaction en sautant par effet tunnel à une valeur, non nulle, d'énergie minimale. Ce phénomène est dû au fait que le potentiel, de quadratique, devient quartique (en forme de "chapeau mexicain") au moment où la température chute en dessous de la température d'unification. Le saut de ϕ de sa valeur nulle de "faux vide" vers le "vrai vide" d'énergie minimale étant quantique, sa valeur finale est aléatoire. On conçoit que dans des régions causalement disconnectées ces valeurs soient différentes. Le raccordement de ϕ aux frontières de tels domaines implique l'existence de "défauts topologiques" où ϕ, localement, possède sa valeur de faux vide. Dans le cas simple où ϕ est un champ réel ces défauts sont des "murs", i.e. des objets bi-dimensionnels ; dans le cas où il est complexe, ce sont des filaments unidimensionnels ou "cordes cosmiques" ; enfin ce sont des objets ponctuels ou "monopôles" pour des groupes de jauge plus élaborés. Or la température critique des théories grand-unifiées des interactions électrofaible et forte est estimée valoir entre 10^{14} et 10^{16} GeV. Lorsque, peu de temps après le Big-Bang (à $t \approx 10^{-35}$ sec) l'univers avait cette température, des défauts topologiques ont donc dû se former copieusement, la taille de l'horizon à cette époque étant de l'ordre de $10^{-24}cm$. Les cordes cosmiques, qui ont une dynamique complexe, rayonnent de l'énergie sous forme d'ondes gravitationnelles et pour la plupart disparaissent. Les monopôles en revanche sont stables et bien qu'ils se diluent en a^{-3} leur densité actuelle devrait être de 10^{13} fois la densité critique ! De deux choses l'une donc : ou les théories grand-unifiées ou le modèle standard du Big-Bang chaud sont à mettre au rebut.

Les modèles d'"inflation"

20. Changer l'équation d'état de la matière primordiale

Toutes ces questions laissées sans réponse dans le cadre du modèle standard viennent du fait que le facteur d'échelle croît comme t^p, $p < 1$ près du Big-Bang. Supposons donc que l'univers ait connu une brève période d'expansion très brutale, appelée d'inflation, dans son passé reculé : $a \propto t^q$, avec $q \gg 1$, voire $a \propto e^{Ht}$.

Le problème de la platitude est alors résolu. En effet, dans le cas d'une croissance exponentielle par exemple :

$$\frac{\Omega_f - 1}{\Omega_d - 1} = \left[\frac{(aH)_d}{(aH)_f}\right] = \frac{a_d}{a_f} = e^{-2H(t_f - t_d)} \tag{1}$$

où les indices f et d se réfèrent à la fin et au début de la période inflatoire, et $\Omega = 1$, qui correspond à $\rho = \rho_{crit}$ et donc à une géométrie spatiale euclidienne, de répulseur devient un attracteur. En fait, voir plus bas, les modèles d'inflation génériquement *prédisent* $\rho = \rho_{crit}$ à une extraordinaire précision, en accord avec les observations récentes des anisotropies du rayonnement de fond qui indiquent, comme nous l'avons vu, que $\Omega_0^K \approx 0$. La métrique pendant la période d'inflation est avec grande précision : $ds^2 = -dt^2 + e^{2Ht} d\vec{x}^2$, qui n'est autre que la métrique de de Sitter. Pendant l'inflation l'espace-temps est donc quasiment à symétrie maximale.

Les modèles d'inflation résolvent aussi le problème de l'origine des structures. Puisque le rayon de Hubble est constant pendant la période quasi-de Sitter d'inflation une structure aujourd'hui disons de la taille d'un amas de galaxies peut facilement avoir été à l'intérieur du rayon de Hubble en début d'inflation. (Le problème de causalité étant résolu, il reste bien sûr à fournir un mécanisme précis—voir plus bas.)

De même ils résolvent le problème de l'horizon. Dans le modèle standard d'une époque dominée par le rayonnement suivie par une époque où la pression est nulle, la taille de l'horizon des particules est (en temps conforme et pour $K = 0$) : $\eta_0 = 2H_0^{-1} - H_0^{-1}(1 + z_{trans})$ où $z_{trans} = a_0/a_{trans} \approx 10^3$ est le redshift de la surface de transition. Par conséquent $(\eta_0 - \eta_{trans})/\eta_0 \approx 2z_{eq} \gg 1$ et deux régions diamétralement opposées sur le ciel ne peuvent pas avoir été en contact causal au moment de la transition. Si maintenant l'univers a subi une période d'inflation exponentielle, un calcul analogue conduit à :

$$\eta_0 = 2H_0^{-1} - H_0^{-1}(1 + z_{trans}) + \frac{z_{infl}\, z_{trans}^{1/4}}{\sqrt{H_0 H_{infl}}} \tag{2}$$

où $z_{infl} = a_f/a_d$ est exponentiellement grand. Pour résoudre le problème de l'horizon il "suffit" donc (pour $z_{trans} \approx 10^3$ et $T_e \approx 10^{14}$ GeV) que $z_{infl} \approx 10^{26} \approx e^{60}$, ce que les modèles atteignent aisément.

21. Le rôle d'un champ scalaire

Quel type de matière peut causer une telle période d'inflation ? Ce ne peut être de la matière ordinaire car pour que le facteur d'échelle croisse en t^q avec $q > 1$ il faut que $\rho + 3p < 0$, cf (15.1). Mais si l'évolution de l'univers pendant l'inflation est gouvernée par un champ scalaire de tenseur énergie-impulsion donné par (14.1) alors les équations de Friedmann (pour $K = 0$) deviennent :

$$\begin{cases} 3H^2 = 8\pi G \left(\frac{1}{2}\dot{\Phi}^2 + V(\Phi) + \rho_{rad} \right) \\ \ddot{\Phi} + 3H\dot{\Phi} + \frac{dV}{d\Phi} = 0. \end{cases} \tag{1}$$

On voit que si, primo, la densité d'énergie du champ scalaire se met à l'emporter sur la densité de matière ordinaire (rayonnement) et que, secondo, $\dot{\Phi} \approx 0$ pendant cette période, alors : $H^2 \approx 8\pi GV/3 \approx Const$ et le facteur d'échelle croît exponentiellement, comme souhaité.

Il faut à ce stade pouvoir proposer un candidat plausible pour ce champ scalaire. En 1981 Alan Guth proposa que ce soit le champ de Higgs des théories grand-unifiées, celui-là même qui, dans le scénario standard, est à l'origine du problème des monopôles. Malheureusement ce scénario de "vieille inflation" n'est pas viable (il conduit à un univers beaucoup trop inhomogène). De nombreux autres scénarios ont été proposés depuis, aucun n'a encore fait l'unanimité.

22. L'inflation "chaotique" (Linde 1983)

Les champs scalaires issus de théories grand-unifiées ou de supercordes n'ayant conduit qu'à des scénarios bancals, Linde en 1983 proposa de *postuler* (en tous cas pour l'heure) l'existence d'un champ scalaire, appelé inflaton, le plus simple, à savoir libre et massif. Les équations d'évolution de l'univers primordial lorsqu'il est régi par ce champ sont alors simplement

$$3H^2 = \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + V(\phi) \quad , \quad \ddot{\phi} + 3H\dot{\phi} + \frac{dV}{d\phi} = 0 \quad , \quad V(\phi) = \frac{1}{2}m^2\phi^2 \tag{1}$$

(où on a absorbé le facteur $8\pi G$ dans une redéfinition du champ). Il est facile de voir que si, initialement, $\phi \gg 1$ la solution approchée de ces équations est

$$\ddot{\phi} \simeq 0 \quad , \quad \dot{\phi} \simeq -\sqrt{\frac{2}{3}}m \quad , \quad H \simeq \frac{m\phi}{\sqrt{6}} \qquad (\phi \gg 1) \tag{2}$$

ce qui implique une expansion quasi-exponentielle du facteur d'échelle, qui résout les problèmes d'horizon, platitude etc énumérés plus haut.

A la fin de cette période de "roulement lent", le champ scalaire oscille au fond de son puits de potentiel et la solution approchée de (1) devient

$$\phi \simeq 2\sqrt{\frac{2}{3}}\frac{\sin mt}{mt} \quad , \quad H \simeq \frac{2}{3t} \qquad (\phi \simeq 0) \tag{2}$$

de sorte que le facteur d'échelle croît en moyenne en $t^{2/3}$, comme si l'univers était dominé par un fluide sans pression.

Le problème de ce scénario (comme de tout autre scénario d'inflation) est alors celui de s'en "sortir élégamment", c.-à-d. de proposer un mécanisme de conversion du champ ϕ en fluide de radiation, afin de raccorder cette évolution inflatoire primordiale au scénario standard dominé par le mélange de radiation, matière froide et constante cosmologique (ou champ de quintessence). La nature de l'inflaton étant inconnue, ses couplages à la matière sont calqués sur ceux dont on a l'habitude en théorie des champs, par exemple en $\phi^2\psi^2$ où ψ symbolise la matière ordinaire. L'équation de Klein-Gordon du mouvement de ψ s'avère alors être de la classe des équations différentielles de Matthieu dont les solutions s'interprètent comme des productions de bouffées de particules ψ. Cette période de "pré-chauffage" doit se poursuivre par une période de thermalisation, dont les mécanismes sont encore mal compris.

Bien sûr ce scénario de base peut être raffiné à l'envi. Les potentiels peuvent être plus complexes, on peut introduire plusieurs inflatons etc.

23. Origine quantique des fluctuations de matière

Jusqu'à présent nous nous sommes bornés à décrire l'univers comme strictement homogène et isotrope. Bien sûr ce n'est qu'une approximation : des anisotropies de l'ordre de 10^{-5} sont mesurées depuis le début des années 90 dans le rayonnement de fond à 3 degrés K et les grandes structures de l'univers, galaxies et amas de galaxies, sont très probablement le résultat de l'effondrement gravitationnel de petites fluctuations initiales de densité.

Comme nous l'avons mentionné plus haut, le scénario standard du Big-Bang chaud, où l'univers est dominé à ses débuts par un fluide de radiation, ne peut fournir une origine à ces fluctuations primordiales, du fait du problème de l'horizon. Les scénarios d'inflation, en résolvant ce problème, procurent un cadre dans lequel traiter la question.

• *Perturber la métrique*

L'élément de longueur d'un univers de Robertson-Walker perturbé peut s'écrire sous la forme (nous nous limiterons ici au cas $K = 0$)

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2A)d\eta^2 + 2B_\alpha d\eta dx^\alpha + (\delta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta})dx^\alpha dx^\beta] \tag{1}$$

et les perturbations peuvent se décomposer selon

$$B_\alpha = \partial_\alpha B + \bar{B}_\alpha \quad , \quad h_{\alpha\beta} = 2C\delta_{\alpha\beta} + 2\partial^2_{\alpha\beta}E + 2\partial_{(\alpha}\bar{E}_{\beta)} + \bar{h}_{\alpha\beta} \tag{2}$$

où les tri-vecteurs $\bar{B}^\alpha$ et $\bar{E}^\alpha$ sont à divergence nulle ainsi que le tenseur $\bar{h}_{\alpha\beta}$ qui, de plus est sans trace. Ainsi les perturbations de la métrique se divisent en quatre perturbations "scalaires" (A, C, B, E), quatre perturbations "vectorielles" (les quatre composantes indépendantes des deux vecteurs sans divergence $\bar{B}^\alpha$ et $\bar{E}^\alpha$), et deux perturbations "tensorielles" $(\bar{h}_{\alpha\beta})$, soit dix composantes en tout, comme il se doit.

L'intérêt de cette décomposition est que les équations d'Einstein se séparent alors en trois groupes indépendants. Nous nous limiterons dorénavant aux perturbations scalaires (dans le scénario d'inflation chaotique il s'avère que les perturbations vectorielles sont négligeables et les perturbations tensorielles sous-dominantes).

Le choix du repère étant libre en Relativité Générale (ce qui s'interprète dans ce cadre linéarisé comme une liberté de jauge), quatre de ces perturbations peuvent être choisies arbitrairement. Nous choisirons la jauge dite longitudinale (ou newtonienne), à savoir

$$B = E = \bar{B}_\alpha = 0 \tag{3}$$

de sorte que l'élément de longueur (1) pour les perturbations scalaires se réduit à

$$ds^2 = a^2(\eta)[-(1 + 2A)d\eta^2 + \delta_{\alpha\beta}(1 + 2C)dx^\alpha dx^\beta]\,. \tag{4}$$

N.B.: Nous traiterons plus en détail cette décomposition scalaire/ vecteur/ tenseur ainsi que les choix de jauge quand nous traiterons les ondes gravitationnelles.

• *Les équations d'Einstein pour les perturbations*

C'est un exercice facile de calculer au premier ordre le tenseur d'Einstein pour la métrique (4). Quant au membre de droite des équations d'Einstein c'est le tenseur énergie-impulsion de l'inflaton, calculé lui-aussi au premier ordre en $\delta\phi$. On obtient ainsi deux équations de contraintes

$$A = -C \quad , \quad \frac{1}{2}\phi'\delta\phi = A + HA \tag{5}$$

où un prime dénote la dérivation par rapport au temps conforme η (tel que $ad\eta = dt$), et une équation d'évolution pour le mode k de Fourier de A :

$$u'' + \left(k^2 - \frac{w''}{w}\right)u = 0 \quad \text{où} \quad u \equiv \frac{2a}{\phi'}A \quad \text{et} \quad w \equiv \frac{H}{a\dot{\phi}}\,. \tag{6}$$

(Cette équation est l'analogue relativiste de l'équation newtonienne (4.1).)

L'évolution qualitative des perturbations est alors la suivante : au début de l'inflation le terme $\frac{w''}{w}$ (dont on connaît l'expression explicite en fonction du temps via (22.1) est négligeable, pour tout k correspondant à une taille de structure d'intérêt aujourd'hui. Les perturbations oscillent donc. Puis, l'expansion étant toujours quasi-exponentielle, elles "sortent du rayon de Hubble" (k^2 devient négligeable devant $\frac{w''}{w}$) et $u \simeq C_d w + C_c w \int \frac{d\eta}{w^2} \to C_c w \int \frac{d\eta}{w^2} \approx Const.$, le premier terme devenant vite négligeable. Arrive la fin de l'inflation où l'expansion de l'univers de quasi-exponentielle, devient $\propto t^{\frac{2}{3}}$. Comme (6) possède, pour $k = 0$, l'intégrale première $w^2(u/w)' = Const.$, il est facile de relier l'amplitude de la perturbation u lorsque qu'elle entre à nouveau dans le rayon de Hubble à son amplitude en début d'inflation et de constater une énorme amplification, $\propto \frac{H^2}{\dot{\phi}^2}|_{inf} \gg 1$, cf (22.2).

• *Quantification des perturbations*

Il reste à déterminer l'amplitude initiale des perturbations. La nature exacte de l'inflaton est inconnue mais on pense que c'est un champ fondamental d'une théorie grand-unifiée encore à naître. Il est donc quantique et on le décompose en deux morceaux : un "mode zéro", $\phi(t)$, considéré comme une moyenne classique dont le tenseur énergie-impulsion régit les équations (non quantiques) d'Einstein ; et une fluctuation $\delta\phi$ qui, elle, peut être considérée comme un champ quantique libre se propageant dans un espace de Robertson-Walker.

La quantification de ce champ suit la procédure standard : on le décompose en modes de Fourier dont les coefficients sont transformés en opérateurs obéissant aux lois habituelles de commutation des opérateurs de création et d'annihilation de l'oscillateur harmonique. Il faut ensuite choisir l'état quantique du champ. Le plus simple et le plus naturel est de supposer qu'il est dans l'état du vide, i.e. que chaque mode de Fourier est dans l'état fondamental de l'oscillateur harmonique. Ceci fixe comme on sait la normalisation des modes. Le spectre des fluctuations ($<0|\hat{\delta}\phi_{k'}\hat{\delta}\phi_k|0>$) est ainsi connu et identifié au spectre des fluctuations classiques, considérées comme des variables aléatoires.

• *Résultat*

Ainsi donc, dans les modèles d'inflation, les fluctuations du vide quantique en début d'inflation se transforment, via leurs relations aux perturbations de la métrique, en perturbations de densité de la matière, lorsque celles-ci se couplent à la métrique, après la période d'inflation, au travers des équations d'Einstein. L'amplitude et le spectre de ces fluctuations, au moment où elles entrent à nouveau dans le rayon de Hubble, sont complètement déterminés : c'est grosso modo un spectre sans échelle (dû au fait que la période d'inflation est quasi-de Sitter donc sans échelle privilégiée) et d'amplitude $\approx m \approx 10^{-5}$ pour une masse de l'inflaton de l'ordre de $10^{14} GeV$.

Il est à partir de cela possible de calculer le spectre des anisotropies du rayonnement de fond à 3 degrés K et le fait que les prédictions ont été jusqu'à présent confirmées par les observations (COBE, BOOMERANG, ARCHEOPS, WMAP,...) est un remarquable succès au crédit des modèles d'inflation.

COSMOLOGIE

Cosmologie newtonienne

Espaces-temps de Robertson-Walker

Dynamique des espaces-temps de Friedmann-Lemaître

Modèles d'univers : 1917-1982

Les modèles d'inflation