Nathalie Deruelle

ETOILES RELATIVISTES ET TROUS NOIRS

Fluides newtoniens auto-gravitants *

1. Equations d'Euler et de Poisson

Nous considérons ici des *fluides parfaits*, caractérisés par leur densité de masse $\varrho(t, x^\alpha)$, leur pression $p(t, x^\alpha)$ et leur champ de vitesse $v(t, x^\alpha)$, dont les mouvements ou configurations d'équilibre sont déterminés par leur équation d'état ($p = p(\varrho)$ pour un fluide barotropique) et par le potentiel de gravitation $U(t, x^\alpha)$ créé en un point par les autres éléments du fluide.

Les équations à résoudre sont donc, une équation d'état étant donnée : les équations de continuité, d'Euler et de Poisson, qui s'écrivent, en repère inertiel et coordonnées quelconques x^α :

$$\frac{\partial\varrho}{\partial t} = -\nabla\cdot(\varrho v) \quad , \quad \frac{dv}{dt} \equiv \frac{\partial v}{\partial t} + (v\cdot\nabla)v = -\nabla U - \frac{1}{\varrho}\nabla p \quad , \quad \triangle U = 4\pi\, G\, \varrho \quad , \quad p = p\,(\varrho)\,. \tag{1}$$

Le fluide est stationnaire si aucune grandeur ne dépend explicitement du temps ; statique si de plus $v = 0$.

Les *conditions de raccordement* à la surface Σ du fluide $x^r = Const.$ se lisent sur les équations (1) : si ϱ y subit une discontinuité finie, l'équation de Poisson implique que U et $\partial_r U$ y sont continus (car l'intégrale d'une fonction discontinue est continue) ; l'équation de continuité impose ensuite que v^r soit nul en Σ (pour éliminer le terme en $\partial_r\varrho$ qui est une distribution) ; l'équation d'Euler dit enfin que $\partial_r p$ subit au plus une discontinuité finie en Σ et par conséquent que p y est continu, de sorte que $p = 0$ en Σ puisque $p = 0$ à l'extérieur du fluide.

L'énergie gravitationnelle du fluide est donnée par

$$W = \frac{1}{2}\int \varrho\, U\, dV = -\frac{1}{8\pi G}\int (\nabla U)^2 dV \tag{2}$$

où la première intégrale est prise sur tout le volume du fluide, la seconde sur tout l'espace (l'une se déduisant de l'autre *via* l'équation de Poisson) et où $dV = \sqrt{\det e}\, dx^1 dx^2 dx^3$, $\det e$ étant le déterminant des coefficients de la métrique dans les coordonnées x^α.

2. Equations des modèles statiques à symétrie sphérique

Considérons une distribution de matière à symétrie sphérique confinée en $r < r_0$ (r est la coordonnée radiale des coordonnées sphériques) créant un champ de gravitation à symétrie sphérique lui-aussi de sorte que $U = U(t, r)$. A l'extérieur de la matière l'équation de Laplace, $\triangle U = 0$, se réduit à : $\frac{d^2U}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{dU}{dr} = \frac{(r^2U')'}{r^2} = 0$ dont la solution est

$$r > r_0 : \qquad U = -\frac{GM}{r} \tag{1}$$

où GM est une "constante" d'intégration ne dépendant que du temps (U étant défini à une constante additive près, on peut poser cette dernière à zéro). Remarquons que, en accord avec le théorème de Gauss, la solution vaut quel que soit le mouvement de la matière créant ce champ du moment qu'il reste à symétrie sphérique.

Supposons maintenant que la distribution de matière soit de plus statique : $\varrho = \varrho(r)$, $v = 0$. A l'intérieur de la matière les équations d'Euler et de Poisson se réduisent alors à

$$r < r_0 : \quad \frac{dp}{dr} = -\varrho\frac{dU}{dr} \qquad , \qquad \frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dU}{dr}\right) = 4\pi G\varrho\, r^2\,. \tag{2}$$

* Cette section est extraite du livre "*Mécanique et Gravitation Newtoniennes*" par N.D. et J.P. Uzan, Vuibert, 2006

Ces équations peuvent se réécrire sous la forme d'un système d'équations différentielles du premier ordre selon

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\varrho r^2 \quad , \quad \frac{dU}{dr} = \frac{Gm}{r^2} \quad , \quad \frac{d\varrho}{dr} = -\frac{\varrho}{dp/d\varrho}\frac{dU}{dr} \,. \tag{3}$$

Une équation d'état $p = p(\varrho)$ étant donnée, le système (2) ou (3) s'intègre (numériquement le cas échéant) avec comme conditions initiales :

$$m(0) = 0 \quad , \quad U(0) = U_0 \quad , \quad \varrho(0) = \varrho_0 \,. \tag{4}$$

La valeur choisie pour U_0 est sans importance car le potentiel est défini à une constante près ; on peut le renormaliser *a posteriori* pour qu'il soit nul à l'infini. On voit ainsi que, pour une équation d'état donnée, il existe tout une famille de modèles paramétrée par la densité centrale ϱ_0.

L'intégration s'achève au point où la pression s'annulle, qui définit le rayon r_0 de la distribution et sa masse $M = m(r_0)$.

Cas d'une densité constante

Dans l'exemple où la densité est constante les équations (2) s'intègrent à vue :

$$U(r) = D + \frac{2\pi G}{3}\varrho r^2 \quad , \quad p(r) = p_0 - \frac{2\pi G}{3}\varrho^2 r^2 \tag{5}$$

(où on a exclu un terme en $1/r$ dans l'expression du potentiel pour qu'il reste fini à l'origine). La solution extérieure est donnée par (1). Les conditions de continuité de U et $\frac{dU}{dr}$ et de nullité de p à la surface du fluide déterminent D, GM et p_0 selon

$$M = \frac{4\pi}{3}\varrho r_0^3 \quad , \quad D = -\frac{3GM}{2r_0} \quad , \quad p_0 = \frac{GM\varrho}{2r_0} \,, \tag{6}$$

de sorte que

$$U(r) = -\frac{GM}{2r_0}\left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \quad , \quad p(r) = \frac{GM\varrho}{2r_0}\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) \,. \tag{7}$$

Durée de vie gravitationnelle du Soleil

Le potentiel gravitationnel à l'intérieur d'un corps statique, à symétrie sphérique et de densité constante ϱ est (*cf* (7)) : $U = -\frac{GM}{2r_0}\left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)$ où r_0 est le rayon de l'objet et $M = \frac{4\pi}{3}\varrho r_0^3$ sa masse. Son énergie gravitationnelle est donc : $W = \frac{1}{2}\int \varrho U dV = -\frac{GM\varrho}{4r_0}\int \left(3 - \frac{r^2}{r_0^2}\right) r^2 \sin\theta \, d\phi d\theta dr$ soit :

$$W = -\frac{3}{5}\frac{GM^2}{r_0}. \tag{8}$$

$|W|$ est l'énergie à fournir pour disperser à l'infini les constituants du corps. Si le corps se contracte il perd de l'énergie.

Si l'énergie rayonnée par le Soleil était due à une telle contraction, quelle serait alors sa durée du vie ?

En écrivant $\frac{dW}{dt} = -4\pi r_{TS}^2 \, P_r$ où r_{TS} est la distance Terre-Soleil, on obtient une durée de vie : $\tau = -W/(4\pi r_{TS}^2 \, P_r)$. Pour les données du Soleil on trouve : $W = -2.3 \times 10^{41}$ Joules ; par ailleurs $P_r \approx 1$ kwatt par m^2 à la surface de la Terre ; d'où $\tau \approx 2.4 \times 10^7$ ans, alors que la durée de vie du Soleil est estimée à 5×10^9 ans si l'on impute son rayonnement à des réactions nucléaires.

3. Polytropes et équation de Lane-Emden

L'équation d'état d'un *polytrope* est $p = K\varrho^\gamma$ où K et $\gamma \equiv 1 + \frac{1}{n}$ sont des constantes.[1] L'équation d'Euler (2.2) s'intègre alors pour donner la densité en fonction du potentiel selon : $\varrho = \varrho_0\theta^n$ avec $\theta \equiv \frac{C_1 - U}{K(n+1)}\varrho_0^{-\frac{1}{n}}$;

[1] n est l'*index polytropique*, γ l'*index adiabatique* ; plus γ est élevé plus l'équation d'état est dite “dure” ; les valeurs $\gamma = 5/3$ et $\gamma = 4/3$ décrivent les *naines blanches*. Pour un exposé détaillé de la physique des étoiles compactes, voir, par exemple, “*Objets compacts*” par Eric Gourgoulhon, sur le site http://luth2.obspm.fr/ luthier/gourgoulhon/index-en.html. Voir aussi “*The fundamentals of stellar structure*” par A. Collins, 2003, sur le site http://ads.harvard.edu/books/1989fsa..book/.

C_1 est une constante d'intégration et ϱ_0 une constante arbitraire introduite par commodité. L'équation de Poisson devient alors l'*équation de Lane-Emden*

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\theta}{d\xi}\right) = -\theta^n \tag{1}$$

ξ étant relié à r par : $r = \alpha\xi$ avec $\alpha \equiv \sqrt{\frac{K(n+1)}{4\pi G}\varrho_0^{\frac{1-n}{2n}}}$. Les conditions initiales en $\xi = 0$ sont $\theta(0) = 1$ (ce qui définit la constante ϱ_0 comme la densité centrale de l'étoile) et $\frac{d\theta}{d\xi}|_0 = 0$ (afin que le potentiel U soit lisse à l'origine).

On ne connait de solution analytique de l'équation de Lane-Emden que pour $n = 0$ ($\theta_0 = 1 - \xi^2/6$, cas où la densité est constante), $n = 1$ ($\theta_1 = \sin\xi/\xi$) et $n = 5$ ($\theta_5 = (1 + \xi^2/3)^{-1/2}$). Dans les autres cas il faut recourir à des développements de Taylor ($\theta_n(\xi) = 1 - \xi^2/6 + n\xi^4/120 - (8n^2 - 5n)\xi^6/15120 + ...$) ou à une intégration numérique. Pour $n > 5$ ($\gamma < 6/5$) il s'avère que $\theta_n(\xi)$ ne s'annulle jamais et décrit donc des configurations d'extension infinie.

Une fois $\theta_n(\xi)$ (c.-à-d. ϱ ou p) connu, le rayon de l'étoile l'est aussi, en fonction de K, n et ϱ_0 : il est donné par $r_0 = \alpha\bar{\xi}$ avec $\theta_n(\bar{\xi}) = 0$. La masse est connue également : $M = 4\pi\int_0^{r_0}\varrho r^2 dr = 4\pi\int_0^{r_0}\varrho_0\theta^n r^2 dr = 4\pi\varrho_0\alpha^3\int_0^{\bar{\xi}}\theta^n\xi^2 d\xi$ qu'on peut réécrire, en utilisant l'équation de Lane-Emden (1) :

$$M = 4\pi\varrho_0\alpha^3\bar{\xi}\,\bar{\theta}' \qquad \text{avec} \qquad \alpha \equiv \sqrt{\frac{K(n+1)}{4\pi G}\varrho_0^{\frac{1-n}{2n}}}\,. \tag{2}$$

On remarque que si $n = 3$ ($\gamma = \frac{4}{3}$) M ne dépend pas de la densité centrale ; c'est la *masse de Chandrasekhar*.[2]

Quant au potentiel gravitationnel il est donné par $U = -K(n+1)\varrho_0^{1/n}\theta + C_1$ à l'intérieur de l'étoile, et par $U = -GM/r$ à l'extérieur, ce qui détermine C_1 : $C_1 = -GM/r_0$.

L'énergie gravitationnelle, $W_{\rm grav} = 2\pi\int\varrho U r^2 dr$, est aussi une fonction des paramètres du problème (c.-à-d. K, n et ϱ_0). Il existe en fait une relation simple entre M, r_0 et W, à savoir :[3]

$$W_{\rm grav} = -\frac{3}{5-n}\frac{GM^2}{r_0} \qquad \text{soit encore} \qquad W_{\rm grav} = -\frac{3(\gamma-1)}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{r_0}\,. \tag{3}$$

(Pour $n = 0$ on retrouve l'expression (59.8) pour une sphère homogène.) La densité d'*énergie interne* ϵ est définie par $p = (\gamma-1)\epsilon$.[4] Un calcul analogue donne $W_{\rm int} = \int\epsilon\, dV = \frac{1}{5\gamma-6}\frac{GM}{r_0^2}$. Ainsi l'énergie totale de l'étoile ou *énergie de liaison* est

$$W = W_{\rm grav} + W_{\rm int} = \frac{3-n}{5-n}\frac{GM^2}{r_0} \qquad \text{soit encore} \qquad W = -\frac{3\gamma-4}{5\gamma-6}\frac{GM^2}{r_0}\,. \tag{4}$$

---

[2] Après intégration numérique de l'équation de Lane-Emden (1) dans ce cas particulier ($n = 3$) on obtient : $M = 2.02\frac{4}{\sqrt{\pi}}\left(\frac{K}{G}\right)^{3/2}$. Reste à déterminer K ; des considérations de mécanique quantique (Chandrasekhar, Landau) conduisent à : $M = 1.46M_\odot$ *cf opus cit.* en Note 1.

[3] En effet, en utilisant l'équation de Lane-Emden (1), on a : $\frac{W_{\rm grav}}{2\pi\alpha^3\varrho_0} = \int_0^{\bar{\xi}}\xi^2\theta^n U = \frac{GM}{r_0}\bar{\xi}^2\bar{\theta}' - K(n+1)\varrho_0^{1/n} I$ avec $I = \int_0^{\bar{\xi}}\xi^2\theta^{n+1}d\xi$. I se calcule en utilisant (1) et en effectuant des intégrations par parties : on montre d'abord que $I = \int_0^{\bar{\xi}}\xi^2\theta'^2 d\xi$ et aussi que $I = -\frac{n+1}{3}\int_0^{\bar{\xi}}\xi^3\theta'\theta^n d\xi$; on montre ensuite que $\int_0^{\bar{\xi}}\xi^3\theta'\theta^n d\xi = \int_0^{\bar{\xi}}\xi^2\theta'(\xi^2\theta')'\frac{d\xi}{\xi} = \frac{1}{2}(\bar{\xi}^3\bar{\theta}'^2 + \int_0^{\bar{\xi}}\xi^2\theta'^2 d\xi)$; on a ainsi $I = \frac{n+1}{6}(\bar{\xi}^3\bar{\theta}'^2 + I)$ d'où on tire $I = \frac{n+1}{5-n}\bar{\xi}^3\bar{\theta}'^2$. On exprime enfin $\bar{\theta}'$ en fonction de M (équation (2)), on introduit $r_0 = \alpha\bar{\xi}$ et on remplace α par sa valeur en fonction de ϱ_0.

[4] En effet la force exercée sur un élément du fluide de masse $m = \varrho\tau$ contenue dans un petit volume τ délimité par la surface S est $-\int_S p dS$, par définition de la pression (*cf* &31). La densité d'énergie associée au petit volume τ, est donc $-p\,dV$; comme $\tau = \frac{m}{\varrho} = \int dV$, on a : $dV = -\frac{m}{\varrho^2}d\varrho$. Ainsi : $-p\,dV = m\frac{p d\varrho}{\varrho^2}$. Pour un polytrope : $p = K\varrho^\gamma$ et donc $-\int_\tau p\,dV = \tau\frac{p}{\gamma-1}$. Par conséquent la densité d'*énergie interne* est $\epsilon = \frac{p}{\gamma-1}$.

Pour $\gamma > 6/5$, le système est lié si $\gamma > 4/3$.

On remarque enfin que l'équation de Lane-Emden possède une propriété d'*homologie*, à savoir qu'elle est invariante dans les changements d'échelle $\xi \mapsto A\xi$ et $\theta \mapsto B\theta$ si $A^2 B^{n-1} = 1$, A et B étant des constantes. Ceci est une indication qu'elle peut être transformée en une équation du premier ordre. On voit facilement en effet que si l'on introduit (avec Chandrasekhar) les fonctions invariantes par changements d'échelle

$$u = -\frac{\xi\theta^n}{\theta'} \qquad , \qquad v = -\frac{\xi\theta'}{\theta} \quad \text{où} \quad \theta' \equiv \frac{d\theta}{d\xi} \tag{5}$$

alors l'équation de Lane-Emden se réécrit sous la forme

$$\frac{u}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{u+v-1}{u+nv-3} \tag{6}$$

avec comme conditions initiales : $v = 0, u = 3$ (qui s'obtiennent par développement limité de la solution de l'équation de Lane-Emden (1)).

4. La sphère isothermale

L'équation d'état d'un gaz parfait à température constante est $p = w\varrho$ où w est constant. L'équation d'Euler à symétrie sphérique (2.2) décrivant une telle *sphère isothermale* s'intègre en $\varrho = \varrho_0\, e^{(-U/w)}$ et celle de Poisson devient $(r^2U')' = 4\pi G\varrho_0 r^2\, e^{(-U/w)}$ qui peut se mettre sous une forme d'équation de Lane-Emden :

$$\frac{1}{\xi^2}\frac{d}{d\xi}\left(\xi^2\frac{d\psi}{d\xi}\right) = e^{-\psi} \tag{1}$$

après avoir posé $U \equiv w\psi$ et $r = \alpha\xi$ avec $\alpha = \sqrt{\frac{w}{4\pi G\varrho_0}}$. Les conditions initiales sont $\psi = 0$ (ce qui définit ϱ_0 comme la densité centrale) et $\frac{d\psi}{d\xi}|_0 = 0$. L'équation (1) s'intègre numériquement.[5] Il s'avère que la densité décroît et a chuté de près de la moitié en $\xi_0 = 3$, le *rayon de King*.

On note que l'ansatz $\psi = 2\log\xi - \ln 2$, dit "sphère isothermale singulière" (car $\varrho = 2\varrho_0/\xi^2$ diverge à l'origine), la résout (et approxime bien la solution régulière pour ξ grand).

L'équation (1) possède une propriété d'*homologie* puisque elle est invariante dans les transformations $\xi \mapsto e^{B/2}\xi$, $\psi \mapsto \psi + B$, B étant une constante. En introduisant les fonctions invariantes d'échelle (dites *de Milne*)

$$u = \frac{\xi e^{-\psi}}{d\psi/d\xi} \qquad , \qquad v = \xi\frac{d\psi}{d\xi} \tag{2}$$

on peut donc la réécrire (la solution singulière étant exclue) sous forme d'une équation du premier ordre

$$\frac{u}{v}\frac{dv}{du} = -\frac{u-1}{u+v-3} \tag{3}$$

avec comme conditions initiales $v = 0, u = 3$ (qui s'obtiennent par développement limité de la solution de (1)).

Théorie cinétique et sphère isothermale

Considérons un système de N particules identiques de masse m n'interagissant que gravitationnellement. Nous supposons le système isolé si bien que son énergie totale $\mathcal{E}$ ainsi que N sont constantes (description *microcanonique*). Dans un état sationnaire un tel système est décrit statistiquement par une fonction de distribution $f(R, v)$ telle que fd^3Xd^3V représente le nombre de particules dans le volume d^3X centré en X^α dont les composantes de la vitesse v sont comprises entre V^α et $V^\alpha + dV^\alpha$ (X^α étant des composantes cartésiennes de R dans un repère inertiel).

Si la fonction de corrélation à deux points de la distribution peut être négligée alors, *cf* & 42, f satisfait à l'équation de Boltzmann stationnaire, que l'on peut écrire selon

$$v \cdot \nabla f - \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \nabla U = 0 \tag{4}$$

[5] Voir par exemple "*Galactic dynamics*" par J. Binney et S. Tremaine, Princeton University Press, 1994.

où U est le potentiel gravitationnel moyen créé par la distribution (*cf* & 47 l'expression de W en fonction de U).

L'énergie totale du système est la somme de ses énergies cinétique et gravitationnelle, soit (*cf* & 47 ; nous noterons ici l'énergie cinétique par K, et non par T) :

$$\mathcal{E} = K + W \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = \dfrac{m}{2} \displaystyle\int v^2 f(R,v)\, d^3X d^3V \\ W = \dfrac{1}{2} \displaystyle\int \varrho U d^3X = -\dfrac{1}{8\pi G} \displaystyle\int (\nabla U)^2 d^3X\,. \end{cases} \tag{5}$$

La fonction de distribution

$$f(R,v) = \frac{\varrho_0}{m}\left(\frac{\beta m}{2\pi}\right)^{3/2} \mathrm{e}^{-\beta m(\frac{1}{2}v^2+U)} \tag{6}$$

où ϱ_0 et β sont des constantes résout l'équation de Boltzmann et extrémise l'entropie, définie par $S = -\int f \ln f\, d^3Xd^3V$, à $\mathcal{E}$ et N constants.[6] On en déduit que la densité massique ϱ et l'équation de Poisson que doit satisfaire le potentiel moyen U, données par : $\varrho = m\int f(R,v)d^3V$ et $\triangle U = 4\pi G\varrho$, sont

$$\varrho = \varrho_0 \mathrm{e}^{-\beta m U} \qquad , \qquad \triangle U = 4\pi G \varrho_0 \mathrm{e}^{-\beta m U}\,. \tag{7}$$

Ainsi la fonction de distribution (6) décrit-elle une sphère isothermale d'équation d'état $p = w\varrho$ avec $w = \frac{1}{\beta m}$.

On déduit aussi de (6) et (5) par une intégration élémentaire que l'énergie cinétique de ce gaz parfait est $K = \frac{3N}{2\beta}$ ce qui permet d'identifier β à l'inverse de la température : $\beta = \frac{1}{kT}$ où k est la constante de Boltzmann. Enfin c'est en utilisant le théorème du viriel scalaire : $2K + W = 0$ (*cf* & 35) que l'on obtient le plus facilement l'énergie gravitationnelle W de la distribution. En résumé

$$K = \frac{3}{2}NkT \qquad , \qquad W = -2K \qquad , \qquad \mathcal{E} = -K\,, \tag{8}$$

de sorte que la *chaleur spécifique* du système, $C_V = \frac{d\mathcal{E}}{dT}\Big|_{V,N}$, qui caractérise l'accroissement d'énergie lorsqu'on augmente la température est donnée par

$$C_V = -\frac{3}{2}Nk \quad < 0\,. \tag{9}$$

Ainsi, en perdant de l'énergie ($\mathcal{E} < 0$) le système devient plus chaud et se contracte. Ceci implique qu'un système auto-gravitant ne peut pas être, sous les hypothèses faites, à l'équilibre thermodynamique.[7]

5. Sphéroïdes de MacLaurin

Le potentiel gravitationnel à l'intérieur d'un ellipsoïde de révolution homogène limité par la surface d'équation

$$X^2 + Y^2 + \frac{Z^2}{1-e^2} = a^2\,, \tag{1}$$

[6] L'équation d'extrémisation de S est, en introduisant les multiplicateurs de Lagrange α et β (*cf* & 37) : $\delta S - \beta\delta\mathcal{E} - \alpha\delta N = 0$. Seul le calcul de δW requiert un peu d'attention. On a : $\delta W = \frac{1}{2}\int(U\delta\varrho + \varrho\,\delta U)d^3X$ mais aussi $\delta W = -\frac{1}{8\pi G}\int \delta(\nabla U)^2 d^3X = \int \varrho\,\delta U d^3X$ après intégration par partie et utilisation de l'équation de Poisson. Ainsi : $\int \varrho\,\delta U d^3X = \int U\delta\varrho\, d^3X$ et $\delta W = \int U\delta\varrho\, d^3X = m\int U\delta f\, d^3Xd^3V$. Par conséquent l'équation d'extrémisation est

$$\delta S = \int \left[\ln f + \beta m(\frac{1}{2}v^2 + U)(\alpha+1)\right] \delta f\, d^3Xd^3V = 0$$

dont la solution est bien (6) après redéfinition de la constante α .

[7] Une telle instabilité peut conduire à une *catastrophe gravothermale*, *cf* D. Lynden-Bell et R. Wood, Month. Not. Roy. Astron. Soc., 157 (1968) 495.

solution de l'équation de Poisson $\triangle U = 4\pi G\varrho$ avec $\varrho = const$, a été obtenu par Mac Laurin :[8]

$$U(X,Y,Z) = -\pi G\varrho\sqrt{1-e^2}\left[a^2 I - (X^2+Y^2)A_1 - Z^2 A_3\right] \quad \text{avec} \quad \begin{cases} I = 2\dfrac{\text{Arcsin } e}{e} \\ A_1 = \dfrac{\text{Arcsin}\, e - e\sqrt{1-e^2}}{e^3} \\ A_3 = 2\dfrac{e - \sqrt{1-e^2}\text{Arcsin}\, e}{e^3\sqrt{1-e^2}} \end{cases} \tag{2}$$

(La constante I est telle que le potentiel extérieur tende vers zéro à l'infini.) Les équipotentielles $U = const.$ sont aussi des ellipsoïdes de révolution mais la surface (1) n'est pas une équipotentielle.

Dans la limite où l'excentricité tend vers zéro l'expression (2) se développe en

$$U(r,\theta) = -2\pi G\varrho a^2\left[1 - \frac{r^2}{3a^2} - \frac{e^2}{3}\left(1 + \frac{2}{5}\frac{r^2}{a^2}P_2(\cos\theta)\right)\right] + \mathcal{O}(e^4) \tag{3}$$

où $r^2 = X^2+Y^2+Z^2$, $\cos\theta = \frac{Z}{r}$ et où $P_2(x) = \frac{3x^2-1}{2}$ est le polynôme de Legendre d'ordre 2.

La solution de l'équation de Poisson admise, on résout les équations de continuité et d'Euler (1.1) en cherchant une solution stationnaire décrivant un fluide en rotation rigide autour de son axe de symétrie OZ. Pour déterminer sa vitesse dans le repère inertiel $\mathcal{S}$ du centre de masse on se place dans le repère tournant avec le fluide dans lequel la vitesse $v' = v - \Omega\wedge R = 0$, où $R = Xe_X + Ye_Y + Ze_Z$ détermine un point du fluide et où $\Omega = \omega e_Z$ est son vecteur de rotation ; ainsi $v = \Omega\wedge R = \omega(-Ye_X + Xe_Y)$ de sorte que $(v\cdot\nabla v) = V^\alpha\partial_\alpha V^\beta e_\beta = -\omega^2(Xe_X+Ye_Y) = -\frac{\omega^2}{2}\nabla(X^2+Y^2)$. Par conséquent l'équation d'Euler (1.1) s'écrit :

$$\nabla\left(U + \frac{p}{\varrho} - \frac{\omega^2}{2}(X^2+Y^2)\right) = 0 \tag{4}$$

dont la solution est, compte tenu de (2) :

$$\frac{p}{\varrho} = -\pi G\varrho\sqrt{1-e^2}\left[(X^2+Y^2)\left(A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G\varrho\sqrt{1-e^2}}\right) + Z^2A_3 - const.\right] \tag{5}$$

La surface de l'étoile est donnée par (1), et aussi par $p = 0$. Les deux surfaces coïncident si

$$A_1 - \frac{\omega^2}{2\pi G\varrho\sqrt{1-e^2}} = (1-e^2)A_3 \tag{6}$$

(et $const = (1-e^2)a^2A_3$) soit encore si

$$\frac{\omega^2}{2\pi G\varrho} = -\frac{3(1-e^2)}{e^2} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{e^3}(3-2e^2)\text{Arcsin}\, e\,. \tag{7}$$

A la limite $e\to 0$: $\omega^2 \approx \frac{8\pi}{15}G\varrho e^2$ (un résultat obtenu par Newton) ; la courbe $\omega(e)$ atteint son maximum $\frac{\omega^2_{\max}}{\pi G\varrho} = 0.449$ en $e = 0.930$ et retombe à 0 en $e = 1$. Ainsi, si on se donne ϱ et la vitesse de rotation $\omega(<\omega_{\max})$, l'équation (7) a deux solutions $e_{1,2}$ correspondant à deux solutions d'équilibre différentes.

La masse du sphéroïde est $M = \frac{4\pi}{3}a^3\sqrt{1-e^2}$; ses moments d'inertie sont $I_1 = I_2 = \frac{Ma^2}{5}(2-e^2)$ et $I_3 = \frac{2Ma^2}{5}$; la composante selon l'axe OZ de son moment cinétique est $\mathcal{M}_Z = \frac{2M}{5}\omega a^2$. Son énergie cinétique est $T = \frac{1}{2}\int\varrho v^2 dV$, soit, puisque $v = \Omega\wedge R = \omega(-Ye_X + Xe_Y)$:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2}\int\varrho v^2 dV = \frac{\omega^2}{2}\int\varrho(X^2+Y^2)dV = \frac{1}{2}\omega^2 I_3 \\ &= \frac{16\pi^2}{15}G\varrho a^5\frac{(1-e^2)}{e}\text{Arcsin}\, e\left(\frac{3}{2e^2} - 1 - \frac{3\sqrt{1-e^2}}{2e\text{Arcsin}\, e}\right)\,. \end{aligned} \tag{8}$$

[8] On trouvera la démonstration détaillée dans "*Ellipsoidal figures of equilibrium*" par S. Chandrasekhar, Yale University Press, 1969.

Son énergie gravitationnelle est

$$\begin{aligned} W = \frac{1}{2}\int \varrho U dV &= -\frac{1}{2}\pi G\varrho\sqrt{1-e^2}\left[a^2 IV - A_1 I_3 - \frac{A_3}{2}(I_1+I_1-I_3)\right] \\ &= -\frac{16\pi^2}{15}G\varrho^2 a^5\frac{(1-e^2)}{e}\mathrm{Arcsin}\, e\,. \end{aligned} \tag{9}$$

Le rapport $T/|W|$ est un fonction croissante de l'excentricité ; pour $e=0$ (sphère), $T/|W|=0$; pour $e=1$ (disque), $T/|W|=1/2$.

Ellipsoïdes de Jacobi

Si on se donne l'excentricité ($0\leq e\leq 1$) d'un ellipsoïde de révolution homogène de densité de masse ϱ, alors on connaît la vitesse de rotation rigide ω autour de son axe de symétrie qui le maintient en équilibre gravitationnel (Mac Laurin, 1742), *cf* équation (7). Cette vitesse est indépendante de la valeur du grand axe a.

Jacobi montra (en 1834) que si e excède sa valeur de *bifurcation*, $e=0.813$ (correspondant à $\frac{\omega^2}{\pi G\varrho}\geq 0.374$ et $T/|W|\geq 0.1375$), il existe, en plus du sphéroïde de Mac Laurin une autre figure d'équilibre en rotation rigide, ellipsoïdale, c.-à-d. d'équation $X^2+\frac{Y^2}{1-e_2^2}+\frac{Z^2}{1-e^2}=a^2$, la valeur de e_2 ainsi que la vitesse de rotation étant déterminées par e.[9] Dedekind (1860) et Riemann (1892) généralisèrent ces résultats au cas où la rotation du fluide n'est plus imposée être rigide.

A masse et moment cinétique donnés un sphéroïde de Mac Laurin s'avère avoir une énergie totale $\mathcal{E}=T+W$ (*cf* (8-9)) supérieure à celle de l'ellipsoïde de Jacobi correspondant ; il est donc instable (cette instabilité est dite *séculaire* car elle requiert une dissipation d'énergie). Une analyse directe (Riemann, 1860) des perturbations de la configuration d'équilibre montre qu'une instabilité *dynamique* (*i.e.* sans dissipation d'énergie) se développe pour $e\geq 0.953$ (soit $\frac{\omega^2}{\pi G\varrho}=0.4402$).

Poincaré (1885) effectua une analyse similaire des perturbations des configurations d'équilibre des ellipsoïdes de Jacobi et montra l'existence d'un point de bifurcation vers des configurations en forme de poire pour $e=0.881$ soit $\frac{\omega^2}{\pi G\varrho}=0.284$, point qui se trouve correspondre aussi au développement de l'instabilité dynamique (Cartan, 1924).

Etoiles relativistes

6. La solution de Schwarzschild

En Relativité Générale l'analogue de résoudre l'équation de Laplace dans le cas à symétrie sphérique est de trouver les espaces-temps à symétrie sphérique solutions des équations d'Einstein; et l'analogue de la solution $U=-GM/r$ est la “solution de Schwarzschild”.

Considérons un espace-temps à symétrie sphérique. Au vu des résultats du chapitre précédent on sait qu'il existe un sytème de coordonnées adaptées dans lequel la métrique s'écrit sous la forme :

$$ds^2=-\mathrm{e}^{\nu}c^2dt^2+\mathrm{e}^{\lambda}dr^2+r^2(d\theta^2+\sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

où (t,r) sont les coordonnées dites de *Schwarzschild*, choisies de sorte que la circonférence d'un cercle de rayon r soit $2\pi r$ et de façon que la métrique ne comporte pas de termes en $dtdr$. Les fonctions ν et λ dépendent a priori de t et r. L'espace-temps étant courbe, le rapport entre la circonférence des sphères et leur rayon propre, $\int dr\exp\frac{\lambda}{2}$, n'est pas nécessairement 2π ; par ailleurs la relation entre le temps propre τ des horloges et le temps coordonnée t peut varier de point en point selon : $\tau=\int\exp\frac{\nu}{2}dt$. Ces fonctions ν et λ devront être déterminées par les équations d'Einstein. Le tenseur-énergie impulsion représentant la matière source de ce champ gravitationnel doit être lui aussi à symétrie sphérique.

En dehors de la matière, les équations d'Einstein s'écrivent : $R_{ij}=0$. Le calcul direct du tenseur de Ricci à partir de sa définition en fonction des symboles de Christoffel est un peu long et fastidieux. Il est beaucoup plus court si l'on utilise une base orthonormée de l'espace tangent et les équations de structure de Cartan (voir e.g. R.W. Wald ou les Notes de N.D. sur le site http://luth2.obspm.fr/IHP06/).

[9] On trouvera les formules dans “*Ellipsoidal figures of equilibrium*” par S. Chandrasekhar, Yale University Press, 1969. Pour des développements plus récents, voir *e.g.* D. Christodoulou *et al.*, Astrophys. J. 446, (1995), 472 (astro-ph/9505008).

Le premier résultat que l'on obtient (en égalant à zéro la composante (t, r) du tenseur de Ricci) est que les fonctions ν et λ sont indépendantes du temps. Ainsi, un espace-temps à symétrie sphérique solution des équations d'Einstein du vide est-il nécessairement statique; c'est le *théorème de Birkhoff.*

Les symboles de Christoffel se simplifient alors et l'on obtient (nous poserons dorénavant $c = G = 1$) :

$$\Gamma^t_{tr} = \frac{\nu'}{2} \quad ; \quad \Gamma^r_{rr} = \frac{\lambda'}{2} \quad ; \quad \Gamma^\theta_{\theta r} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} \quad ; \quad \Gamma^r_{tt} = \frac{1}{2}e^{\nu-\lambda}\nu' \quad ; \quad \Gamma^r_{\theta\theta} = \Gamma^r_{\phi\phi} = -re^{-\lambda}$$

où un prime dénote la dérivation par rapport à r. De là on tire :

$$\begin{cases} G_{00} = \dfrac{1}{r^2}e^\nu \dfrac{d}{dr}\left[r\left(1-e^{-\lambda}\right)\right] \quad ; \quad G_{rr} = -\dfrac{1}{r^2}e^\lambda\left(1-e^{-\lambda}\right) + \dfrac{1}{r}\nu' \\ G_{\theta\theta} = \dfrac{1}{2}r^2e^{-\lambda}\left[\nu'' + \dfrac{(\nu')^2}{2} + \dfrac{\nu'}{r} - \dfrac{\nu'\lambda'}{2} - \dfrac{\lambda'}{r}\right] \quad ; \quad G_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, G_{\theta\theta}. \end{cases} \tag{2}$$

les autres composantes étant nulles. L'intégration de $G_{ij} = 0$ est aisée et donne enfin :

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1-2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{3}$$

où m est une constante d'intégration. C'est la métrique de *Schwarzschild* (1916).

Lorsque $r \to \infty$ (3) tend vers la métrique de Minkowski en coordonnées sphériques. Les coordonnées (t, r, θ, ϕ) mesurent donc le temps propre des observateurs à l'infini, ainsi que les distances propres qui les séparent. A la limite newtonienne $-g_{00} \sim 1 + 2U/c^2$ où $U = -GM/r$ est le potentiel newtonien. Il faut donc identifier la constante d'intégration m à GM/c^2 où M est la masse de l'objet central. L'espace-temps décrit par (3) est ainsi celui extérieur à un objet massif à symétrie sphérique.

7. Etoiles statiques à symétrie sphérique

L'étude de la structure des étoiles, c.-à-d. leur masse, leur rayon, l'état de la matière qui les compose, la quantité d'énergie et le spectre qu'elles rayonnent, ne s'effectue dans le cadre de la Relativité Générale que si le paramètre Gm/Rc^2, où m est la masse de l'étoile et R son rayon, est de l'ordre de 1. (Rappelons que ce rapport vaut 7×10^{-10} pour la Terre, 2×10^{-6} pour le Soleil, mais approche 0.2 pour les étoiles à neutrons.) Ainsi qu'on le déduit de l'expression de la métrique de Schwarzschild ce n'est en effet qu'alors que l'espace-temps est suffisamment courbé pour que les effets relativistes puissent modifier qualitativement les résultats newtoniens. Comme ce sont ces effets qui nous intéressent, nous nous contenterons d'obtenir les équations qui déterminent la structure d'un fluide parfait relativiste, que nous supposerons statique, à symétrie sphérique et sans rotation.

La métrique d'un espace-temps statique et à symétrie sphérique s'écrit, en coordonnées schwarzschildiennes (cf (6.1)) : $ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ où $\nu = \nu(r)$ et $\lambda = \lambda(r)$. Les composantes non nulles du tenseur d'Einstein correspondant ont été données plus haut. Le tenseur énergie-impulsion d'un fluide parfait est : $T_{ij} = (\mu + p)u_iu_j + pg_{ij}$, où $\mu = \mu(r)$ et $p = p(r)$ sont la densité d'énergie et la pression de l'étoile. Comme elle est statique, le vecteur vitesse u^i est $u^i = (u^0, \vec{0})$, et comme $u_iu^i = -1$, on a : $u^0 = e^{-\nu/2}$; de sorte que les composantes non nulles de T_{ij} sont :

$$T_{00} = \mu e^\nu \quad ; \quad T_{rr} = pe^\lambda \quad ; \quad T_{\theta\theta} = r^2 p \quad ; \quad T_{\phi\phi} = \sin^2\theta\, T_{\theta\theta}. \tag{1}$$

La structure de l'étoile est donc déterminée par 4 fonctions : ν, λ, μ et p. Une première relation est donnée par l'équation d'état : $p = p(\mu)$. Les équations d'Einstein donnent les trois autres, à savoir :

$$(\mu + p)\frac{d\nu}{dr} = -2\frac{dp}{dr} \tag{2}$$

qui découle de la conservation de T_{ij} ($D_iT^{ij} = 0$, qui dans le cas de la symétrie sphérique se réduit à $D_iT^{ir} = 0$) ; et :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2\mu \qquad ; \qquad \frac{d\nu}{dr} = 2\frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)}, \tag{3}$$

qui sont les composantes (00) et rr des équations d'Einstein, et où $m(r) \equiv (1/2)r[1-\exp(-\lambda)]$ est la *fonction de masse*. En éliminant $d\nu/dr$ des équations (2) et (3), on obtient que le système à intégrer est (3) plus :

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2\mu \qquad ; \qquad \frac{dp}{dr} = -(\mu + p)\frac{m + 4\pi r^3 p}{r(r-2m)}. \tag{4}$$

(La deuxième équation dans (4) est l'équation de *Tolman, Oppenheimer et Volkoff*, 1939.)

Pour intégrer (numériquement) (4), et obtenir $p(r)$ (et donc $\mu(r)$), ainsi que $m(r)$ (et donc $\lambda(r)$), il faut deux conditions initiales : la densité centrale $\mu(0)$, et $m(0)$, qui doit être nul car l'espace-temps, et en particulier $g_{rr} = (1 - 2m(r)/r)^{-1}$, doit être régulier en $r = 0$. Le bord de l'étoile est la surface où pression et densité s'annullent ; son rayon R est donc défini par $p(R) = \mu(R) = 0$ et la masse de l'étoile est $m(R)$. La métrique doit s'identifier, à l'extérieur de l'étoile à la solution à symétrie sphérique du vide des équations d'Einstein, c.-à-d. la métrique de Schwarzschild :

$$ds^2 = -(1 - 2m/r)\,dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2). \tag{5}$$

où m, la masse de Schwarzschild, est reliée à la densité centrale par : $m = m(R) = \int_0^R 4\pi\mu r^2 dr$. L'intégration de (4) avec la condition $e^\nu = 1 - 2m(R)/R$ en $r = R$ donne alors $\nu(r)$. Ainsi pour déterminer la structure d'une étoile relativiste, statique et à symétrie sphérique, il suffit de se donner une équation d'état et une densité centrale.

Notons que la masse de Schwarzschild $m = m(R) = \int_0^R 4\pi\mu r^2 dr$ n'est *pas* la masse *propre* définie comme l'intégrale de la densité sur le volume propre : $m_p = \int_0^R 4\pi\mu r^2\,[1 - 2m(r)/r]^{-1/2}\,dr$. La différence peut s'interpréter comme une énergie de liaison gravitationnelle, car c'est ce à quoi elle se réduit à la limite newtonienne.

La limite newtonienne de l'équation (4) de Tolmann, Oppenheimer Volkoff est : $dp/dr = -\mu m/r$, et est inférieure à sa valeur relativiste. Il est donc plus difficile de maintenir l'équilibre d'une étoile en théorie relativiste qu'en théorie newtonienne. C'est pourquoi la notion de masse critique s'introduira-t-elle en Relativité Générale.

8. Discontinuités et conditions de raccordement

Nous avons supposé plus haut que pression et densité étaient régulières et continues partout. Il est cependant parfois commode de scinder l'espace-temps en deux régions distinctes, l'une "extérieure", V_e (vide par exemple), l'autre "intérieure", V_i (où peut se trouver un fluide parfait), séparées par une 3-surface de discontinuité Σ représentant dans le cas présent l'évolution temporelle du bord de l'étoile. Pour énoncer les conditions de raccordement de ces deux régions, introduisons un système de coordonnées particulier, dit "admissible", ou *de Gauss*, valable des deux côtés de la surface (cf e.g. Lichnérowicz in *Théories Relativistes de la Gravitation*), tel que la métrique prenne la forme :

$$ds^2 = d\tilde{r}^2 + \gamma_{\alpha\beta}(\tilde{r}, x^\gamma)dx^\alpha dx^\beta \tag{1}$$

où $\tilde{r} = Const$ est l'équation de Σ et où les indices grecs représentent les trois coordonnés restantes.

Les coordonnées de Schwarzschild dans lesquelles la métrique d'un espace-temps sphérique et statique s'écrit sous la forme $ds^2 = -e^\nu dt^2 + e^\lambda dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$ ne sont pas gaussiennes à travers la surface $r = R$, mais presque ; il suffit de poser $d\tilde{r} = e^{(\lambda/2)}dr$ pour qu'elles le deviennent.

L'éventuelle discontinuité de T_{ij} à travers Σ se manifeste au plus, via les équations d'Einstein, par des discontinuités dans les dérivées secondes des composantes $\gamma_{\alpha\beta}$ la métrique (nous ne traitons pas ici des *couches minces* c-à-d des tenseurs d'énergie-impulsion contenant des distributions delta de Dirac). Par conséquent les conditions de raccordement de la métrique à travers Σ sont que les fonctions $\gamma_{\alpha\beta}$ soient continues et à dérivées premières par rapport à $\tilde{r}$ continues dans le système de coordonnées de Gauss (1). Cela se traduit en termes plus géométriques par l'exigence que la 3-métrique induite sur Σ et la courbure extrinsèque K_{ij} soit continues.

Ces conditions de raccordement se traduisent par des contraintes sur le tenseur énergie-impulsion. Plaçons-nous en effet dans un sytème de Gauss. Les composantes $G_i^{\tilde{r}}$ ne dépendent que de la métrique et de ses dérivées premières par rapport à $\tilde{r}$ (cf l'étude du problème de Cauchy) : elles sont donc continues à travers Σ et il doit en être de même de $T_i^{\tilde{r}}$. Pour un fluide parfait, ceci implique :

$$u^{\tilde{r}} = 0 \qquad ; \qquad p = 0 \tag{2}$$

qui expriment que le fluide est confiné par Σ et que sa pression y est nulle.

9. Etoiles à densité constante

L'équation d'état $\mu = const.$ à l'intérieur de l'étoile (et $\mu = 0$ à l'extérieur), bien que peu réaliste, renferme les caractéristiques de tous les modèles. Dans ce cas la fonction de masse, cf Eq (7.3), est simplement $m(r) = \frac{4\pi\mu}{3} r^3$. L'équation (7.3) s'écrit $d\nu = -2dp/(\mu + p)$ et donne $\mu + p = Be^{-\nu/2}$ où B est une constante. Enfin l'eq (7.4) pour ν, après avoir posé $z = e^{\nu/2} - 3B/2\mu$ donne $z = -D\left[1 - (8\pi\mu/3)r^2\right]^{1/2}$ où D est une autre constante. Les conditions de raccordement à la métrique extérieure de Schwarzschild imposent que $m = \frac{4\pi}{3}\mu R^3$ où R est le rayon de l'étoile (continuité de λ) et que $B/(2D\mu) = \sqrt{1 - 2m/R}$ (nullité de la pression à la surface de l'étoile). La constante D reste arbitraire et peut être absorbée dans une redéfinition du temps coordonnée à l'intérieur de l'étoile.

On obtient ainsi :

$$\begin{cases} ds^2 = -\left(\dfrac{3}{2}\sqrt{1 - 2m/R} - \dfrac{1}{2}\sqrt{1 - 2mr^2/R^3}\right)^2 dt^2 + \dfrac{dr^2}{1 - 2mr^2/R^3} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \\ p = \mu \dfrac{\sqrt{1 - 2mr^2/R^3} - \sqrt{1 - 2m/R}}{3\sqrt{1 - 2M/R} - \sqrt{1 - 2mr^2/R^3}}, \end{cases} \tag{1}$$

(Schwarzschild, 1916).

A un instant t donné et dans le "plan" $\theta = \pi/2$ la géométrie spatiale en coordonnées schwarzschildiennes est ainsi déterminée, à l'extérieur et à l'intérieur de l'étoile, par :

$$d\sigma_{ext}^2 = dr^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + r^2 d\phi^2 \quad , \quad d\sigma_{int}^2 = dr^2 \left[1 - \frac{2m}{R}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right]^{-1} + r^2 d\phi^2. \tag{2}$$

A l'extérieur l'espace a la même géométrie qu'un paraboloïde d'équation $z^2 = 8m(r - 2m)$ plongé dans un espace euclidien (x, y, z). Très loin du centre elle est presque plane. A l'intérieur la géométrie est celle d'une sphère, régulière partout, y compris en $r = 0$. On note qu'à la surface de raccordement $r = R(> 2m)$ les métriques sont continues, mais pas leur dérivées premières, en accord avec le fait que les coordonnées schwarzschildiennes n'y forment pas un système admissible (i.e. de Gauss). La géométrie globale peut donc être visualisée comme un "drap" élastique creusé en son centre par le "poids" de l'étoile (voir par exemple le livre "Gravitation" de Misner-Thorne-Wheeler p 614).

La pression centrale est $p(0) = \mu(1 - \sqrt{1 - 2m/R})/(3\sqrt{1 - 2m/R} - 1)$. Pour qu'elle reste finie, il faut que $m < 4R/9$, soit encore (puisque $m = \frac{4\pi}{3}\mu R^3$) $m < m_{crit}$ avec $m_{crit} = \frac{4}{9\sqrt{3\pi}}\frac{1}{\sqrt{\mu}}$. Pour $\mu = 10^{15} g/cm^3$ (la densité nucléaire) on trouve $m_{crit} \simeq 4M_\odot$.

Cette notion de masse limite au-delà de laquelle la pression ne peut plus supporter les forces gravitationnelles est essentiellement relativiste (en théorie newtonienne la pression, $p = \mu m/2R$, est toujours finie) et n'est pas un artefact de l'équation d'état choisie: aucune équation d'état connue ne permet en effet de dire qu'il existe une configuration stable au delà des étoiles à neutrons. On peut en fait montrer qu'il existe une masse critique au-delà de laquelle une étoile ne peut pas se trouver en état d'équilibre stable, quelle que soit son équation d'état, si l'on impose que la vitesse du son reste inférieure à c (Ruffini 1971). La masse critique ainsi obtenue est de l'ordre de quelques masses solaires. Une étoile dont le collapse ne peut se stabiliser est un trou noir. Il existe actuellement une dizaine de bons candidats trous noirs. Le premier découvert fut Cygnus X-1, le meilleur est GS 2023+338 (V 404 Cygni). Les quasars sont aussi peut-être des trous noirs extrêmement massifs (de 10^6 à 10^9 masses solaires).

10. Etoiles relativistes en rotation

Voir les Notes de N.D. sur le site http://luth2.obspm.fr/IHP06/

On y trouvera la description de la version relativiste des ellipsoïdes de Mac Laurin ainsi que des considérations sur les difficultés à définir la notion d'énergie gravitationnelle en Relativité Générale.

Effondrement gravitationnel

11. Collapse gravitationnel en théorie newtonienne

Voir les Notes de N.D. sur le site http://luth2.obspm.fr/IHP06/

12. Le modèle d'Oppenheimer Snyder : le collapse vu de l'extérieur de l'étoile

Jusqu'ici nous nous sommes surtout préoccupés d'étoiles statiques dans le but de déterminer leurs configurations $m(R)$ d'équilibre stable. Ceci nous a conduit au résultat qu'une étoile de masse supérieure à une masse critique (de l'ordre de $3-4M_\odot$) doit s'effondrer. La question ici est déterminer l'issue de cet effondrement. Le modèle d'Oppenheimer et Snyder (1939) consiste à décrire une étoile en effondrement comme un nuage de poussière ($p=0$) relativiste, à symétrie sphérique. Bien que simpliste, ce modèle saisit les principales caractéristiques du processus. De plus il devient réaliste en fin du collapse où les forces de pression deviennent négligeables devant la gravitation.

Comme la pression est nulle, les particules qui constituent l'"étoile" suivent des géodésiques de l'espace-temps. Une particule à sa surface suivra donc une géodésique radiale de l'espace-temps de Schwarzschild. Comme la métrique, en coordonnées schwarzschildiennes, ne dépend pas du temps, on a que $u_0 = g_{00}u^0 = g_{00}dt/d\tau$ est une constante.

De manière générale, écrivons l'équation géodésique sous la forme : $u^i D_i u_j = 0$, soit encore : $u^i\partial_i u_j = u^i\Gamma^k_{ij}u_k = \frac{1}{2}u^i u^l \partial_j g_{li}$ (par définition de la dérivée covariante et des symboles de Christoffel). L'espace-temps possède une symétrie (ici la staticité) s'il existe un système de coordonnées dans lequel la métrique ne dépend pas d'une des coordonnées $x^{\bar{k}}$ (i.e. $\partial_{\bar{k}} g_{ij} = 0$ pour tous (ij) et pour un $\bar{k}$ donné). On a alors $u^i\partial_i u_{\bar{k}} \equiv du_{\bar{k}}/d\tau = 0$ et donc :

$$u_{\bar{k}} = Const \quad \text{le long de la trajectoire si} \quad \partial_{\bar{k}} g_{ij} = 0 \tag{1}$$

De façon plus intrinsèque, soit ξ^i un vecteur de Killing satisfaisant à l'équation de Killing :

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad D_i\xi_j + D_j\xi_i = D_j(g_{ik}\xi^k) + D_i(g_{jk}\xi^k) = 0$$

En explicitant les symboles de Christoffel et en utilisant le fait que $D_i g_{jk} = 0$ et que $\partial_i \xi^j = 0$ dans le système de coordonnées adaptées à la symétrie décrite par ξ, cette équation se réécrit : $\xi^l\partial_l g_{ij} = 0$. Si donc la métrique ne dépend pas de $x^{\bar{k}}$, $\xi^l = \delta^l_{\bar{k}}$ est un vecteur de Killing. Le vecteur u^i étant tangent à une géodésique on a alors que :

$$\frac{d}{d\tau}(u^j\xi_j) \equiv u^i D_i(u^j\xi_j) = u^i u^j D_i\xi_j + \xi_j u^i D_i u^j = 0$$

le premier terme étant nul en vertu de l'équation de Killing et le second en vertu de l'équation géodésique. Ainsi, si ξ^i est un vecteur de Killing, $u^j\xi_j = u_j\xi^j = u_{\bar{k}}$, est conservé le long de la trajectoire et l'on retrouve ainsi le résultat (1).

Par ailleurs, à θ,ϕ constants l'élément de longueur schwarzschildien donne $-1 = -(1-2m/r)(dt/d\tau)^2 + (dr/d\tau)^2/(1-2m/r)$. Par conséquent les géodésiques ont pour équation :

$$\left(1-\frac{2m}{r}\right)\frac{dt}{d\tau} = \sqrt{1-\frac{2m}{R}} \qquad ; \qquad \left(\frac{dr}{d\tau}\right)^2 = -\frac{2m}{R} + \frac{2m}{r} \tag{2}$$

où τ est le temps propre de la particule et où on a utilisé le fait que sa vitesse est nulle en R, le rayon initial de l'étoile. Cette équation s'intègre sous forme paramétrique :

$$r = \frac{R}{2}(1+\cos\eta) \qquad ; \qquad \tau = \frac{R}{2}\sqrt{\frac{R}{2m}}\,(\eta+\sin\eta), \tag{3}$$

où η varie de 0 à π. Par conséquent le temps propre, effectivement mesuré par un observateur situé sur le bord de l'étoile, mis pour tomber de $r = R$ en $r = 0$, est fini et vaut :

$$\tau_{\text{collapse}} = \tau(\pi) - \tau(0) = \frac{\pi}{2}R\sqrt{\frac{R}{2m}}. \tag{4}$$

Posant $R = 2mx$, on a : $\tau_{\text{collapse}} = \pi m x^{3/2}$. Ainsi une telle étoile, de la taille et de la masse du soleil ($m \approx 5\mu$-seconde, $x \approx 2.3 \times 10^5$), s'effondre en une demi-heure. Si le rayon initial de l'étoile est de l'ordre de son rayon de Schwarzschild ($x = \mathcal{O}(1)$), alors $\tau_{\text{collapse}} = \mathcal{O}(m)$, et est de l'ordre de quelques micro-secondes pour m de l'ordre d'une masse solaire. Enfin l'effondrement du cœur d'une supernova s'effectue en quelques milli-secondes.

Décrivons maintenant le collapse à l'aide du temps coordonnée t, qui est le temps propre d'un observateur au repos (r, θ, ϕ constants) à l'infini. De (2) on tire :

$$t = \int_R^r \frac{dr\sqrt{1-2m/R}}{(1-2m/r)\sqrt{2m/r-2m/R}} \to \infty \quad \text{quand} \quad r \to 2m \tag{5}$$

Par conséquent, décrit en temps t, l'effondrement prend un temps infini.

Plus précisément, imaginons qu'un observateur sur le bord de l'étoile et suivant son effondrement, envoie vers un observateur immobile à l'infini des signaux lumineux, à intervalles infinitésimaux réguliers $\delta\tau_{em}$ de son temps propre. A ce temps $\delta\tau_{em}$ correspond un temps coordonnée donné par (2) : $\delta t_{em} = \delta\tau_{em}(\sqrt{1-2m/R})/(1-2m/r_{em})$ où $r_{em} = r\,(t_{em})$ est le rayon de l'étoile au moment de l'émission. Pour l'observateur immobile à l'infini on a en revanche $\delta t_{rec} = \delta\tau_{rec}$. Les signaux lumineux suivent des géodésiques radiales nulles de la métrique de Schwarzschild d'équation $dr/dt = 1 - 2m/r$. On a donc $\delta t_{rec} = \delta t_{em} - \delta r_{em}/(1-2m/r_{em})$ (le second terme n'est autre que l'effet Doppler dû au fait que l'émetteur est en chute libre). δr_{em} et $\delta\tau_{em}$ sont reliés par la seconde équation (2) et par conséquent

$$\delta\tau_{rec} = \frac{\delta\tau_{em}}{1-2m/r_{em}}\left(\sqrt{1-2m/R} + \sqrt{2m/r_{em}-2m/R}\right) \tag{6}$$

qui tend vers l'infini lorsque l'étoile approche de son *rayon de Schwarzschild* $r_{em} = 2m$: les signaux sont de plus en plus "redshiftés".

Ainsi la description du collapse d'un nuage de poussière dépend-elle crucialement de l'observateur : celui qui suit le collapse atteint $r = 0$ où la densité devient infinie en un temps propre fini ; celui qui demeure au loin voit l'astre devenir progressivement noir au fur et à mesure qu'il approche son rayon de Schwarzschild $r = 2m$.

13. Le modèle d'Oppenheimer-Snyder : la solution intérieure

L'espace-temps à l'extérieur d'un nuage de poussière à symétrie sphérique est celui de Schwarzschild. A l'intérieur la métrique est solution des équations d'Einstein en présence d'un fluide parfait de pression nulle. La seule composante non nulle du tenseur énergie-impulsion est donc : $T_0^0 = -\mu(r,t)$. Dans le cas général la solution, dite de Tolman (1934), est une fonctionnelle de r (voir plus bas). Nous supposerons ici que le nuage est non seulement isotrope mais homogène, c-à-d que μ ne dépend que du temps. Ainsi donc les sections spatiales du nuage, homogènes et isotropes, sont à symétrie maximale et la métrique se réduit à une métrique de Robertson-Walker :

$$ds^2 = -d\tau^2 + a^2(\tau)\left[\frac{d\rho^2}{1-\epsilon\rho^2} + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\theta^2)\right], \tag{1}$$

où le temps propre τ, et la coordonnée radiale ρ sont différentes des coordonnées schwarzschildiennes (t, r) (ces systèmes ne sont pas de Gauss). Les équations d'Einstein se réduisent ainsi à celles de Friedmann dont la solution est, pour $p = 0$:

$$\begin{cases} a = \frac{a_m}{2}(1+\cos\eta) \quad ; \quad \tau = \frac{a_m}{2}(\eta + \sin\eta) \qquad \text{si} \qquad \epsilon = 1 \\ a = a_0 \left(\frac{\tau}{\tau_0}\right)^{\frac{2}{3}} \qquad \text{si} \qquad \epsilon = 0 \\ a = \frac{a_m}{2}(1+\cosh\eta) \quad ; \quad \tau = \frac{a_m}{2}(\eta + \sinh\eta) \qquad \text{si} \qquad \epsilon = -1\,. \end{cases} \tag{2}$$

Le premier cas ($\epsilon = 1$) décrit un nuage de poussière homogène qui s'effondre, les deux autres un nuage qui se dilate indéfiniment.

Pour compléter la description, il reste à raccorder solutions extérieure (de Schwarzschild) et intérieure. Pour ce faire calculons la circonférence de l'étoile dans les coordonnées de Schwarzschild : $C = 2\pi r$ où $r(\tau)$ est donné par l'éq (12.3) ; dans la métrique de Robertson-Walker (1) elle vaut : $C = 2\pi\rho_0 a(\tau)$ où ρ_0 est le rayon coordonnée de l'étoile et où $a(\tau)$ est donné par (2). L'identification des deux expressions donne : $\epsilon = 1$, $R = \rho_0 a_m$ et $R\sqrt{R/2m} = a_m$, ce qui détermine a_m et ρ_0 en fonction de R et m.

On retrouve que pour un observateur en co-mouvement avec l'étoile, rien de spécial ne se passe en $r = 2m$.

14. La solution de Tolman-Bondi

Considérons un nuage à symétrie sphérique de matière incohérente ($p = 0$) mais pas nécessairement homogène. Nous chercherons la solution générale des équations d'Einstein du problème dans un système de coordonnées $(\tau, \rho, \theta, \phi)$ tel que la métrique ait la forme :

$$ds^2 = -d\tau^2 + e^{\lambda(\rho,\tau)}d\rho^2 + r^2(\rho,\tau)(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2), \tag{1}$$

où λ et r sont des fonctions de la coordonnée radiale ρ et du temps τ (contrairement aux modèles statiques où les fonctions ne dépendaient pas du temps). Dans ce système de coordonnées, en *co-mouvement* (ou *co-mobile*), τ est le temps propre et les trajectoires $(\rho, \theta\, \phi) = Const.$ sont des géodésiques. On trouvera dans e.g. Stephani p.236, les expressions des symboles de Christoffel et les composantes du tenseur d'Einstein correspondant à cette métrique. Les composantes utiles sont :

$$\begin{cases} G^\rho_0 = e^{-\lambda}(-2\dot{r}' + \dot{\lambda}r')/r \quad , \quad G^\rho_\rho = (-e^{-\lambda}r'^2 + 1 + 2r\ddot{r} + \dot{r}^2)/r^2 \\ G^t_t = e^{-\lambda}(2rr'' + r'^2 - r'\lambda')/r^2 - \dot{r}(r\dot{\lambda} + \dot{r}^2)/r^2 - 1/r^2 \end{cases} \tag{2}$$

où le point est la dérivée par rapport à τ et le prime la dérivée par rapport à ρ. Quant aux composantes du tenseur énergie-impulsion elles sont toutes nulles sauf $T^t_t = -\mu$. L'intégration de la première équation (2) donne alors :

$$e^\lambda = \frac{r'^2}{1+2E} \tag{3}$$

où E est une fonction de ρ arbitraire ; la seconde s'écrit $2r\ddot{r} + \dot{r}^2 - 2E = 0$, qui a pour intégrale première :

$$\dot{r}^2 = E + 2m/r \tag{4}$$

où $m(\rho)$ est une nouvelle fonction arbitraire et qui s'intègre en :

$$\begin{cases} r = \frac{m}{-2E}(1-\cos\eta) \quad , \quad \tau_0 - \tau = \frac{2m}{(-2E)^{3/2}}(\eta - \sin\eta) \quad , \quad E < 0 \\ r = \frac{m}{2E}(\cosh\eta - 1) \quad , \quad \tau_0 - \tau = \frac{2m}{(2E)^{3/2}}(\sinh\eta - \eta) \quad , \quad E > 0 \\ r = (9m/2)^{1/3}(\tau_0 - \tau)^{2/3} \quad , \quad E = 0, \end{cases} \tag{5}$$

où $\tau_0(\rho)$ est une troisième fonction arbitraire. Il faut noter cependant que seules deux de ces trois fonctions sont indépendantes car une redéfinition de la coordonnée ρ permet d'en absorber une, par exemple $M(\rho)$. Enfin la dernière équation (2) donne la densité d'énergie :

$$4\pi\mu = \frac{M'}{r'r^2}. \tag{6}$$

La solution ainsi obtenue est la solution de Tolman (1934) et Bondi (1936). La solution homogène de Friedmann, Oppenheimer-Volkoff correspond aux choix $2E = -\epsilon\rho^2$, $\tau_0 = 0$ et $m \propto \rho^3$.

Trou noir de Schwarzschild

15. Les singularités de Schwarzschild

Dans la première partie nous nous sommes intéressés aux configurations stables d'une étoile à symétrie sphérique et introduit la notion de masse limite : au terme de leur évolution thermonucléaire, les étoiles s'effondrent, et si elles sont suffisamment massives, cet effondrement ne se stabilise pas à une nouvelle configuration d'équilibre. Dans la partie précédente nous avons décrit sur un exemple ce collapse gravitationnel. Pour ces objets donc qui ne stabilisent pas, la métrique de Schwarzschild doit être valable *jusqu'en* $r = 0$. L'espace-temps correspondant décrit un *trou noir*. Dans le reste de ce chapitre nous allons étudier les espaces-temps des trous noirs, sans faire référence, il n'en sera pas besoin, au fait qu'ils peuvent décrire l'état final de certaines étoiles.

La métrique de Schwarszchild

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)c^2dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r} + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{1}$$

est singulière en $r = 2m$ et $r = 0$: ses composantes y diverge. Plus l'on s'approche de la surface $r = 2m$—le *rayon de Schwarzschild*, plus l'intervalle de temps coordonnée, correspondant à un intervalle de temps propre donné, est long $[d\tau = (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}\, dt]$; et plus est courte la distance dr correspondant à un incrément dl donné, radial, de longueur propre $[dr = (1 - 2m/r)^{\frac{1}{2}}\, dl \to 0]$.

Il faut faire cependant attention à ne pas donner de signification “physique” prématurée à ce qui peut n'être qu'une propriété non-intrinsèque d'un système de coordonnées. On peut en effet décrire la même géométrie en utilisant d'autres systèmes de référence. Ainsi dans le système de coordonnées *isotropiques* $t, \bar{r}, \theta, \phi$ où $r = \bar{r}(1 + M/2\bar{r})^2$, la métrique (1) s'écrit :

$$ds^2 = -\left(\frac{1 - m/2\bar{r}}{1 + m/2\bar{r}}\right)^2 c^2dt^2 + \left(1 + \frac{m}{2\bar{r}}\right)^4 (d\bar{r}^2 + \bar{r}^2d\theta^2 + \bar{r}^2\sin^2\theta d\phi^2). \tag{2}$$

Dans ce système, la propagation de la lumière est isotrope, la correspondance entre r et $\bar{r}$ n'est univoque que si $\bar{r} > m/2 \Leftrightarrow r > 2m$, et la distance $d\bar{r}$ correspondant à un incrément dl donné de longueur propre tend vers $d\bar{r} \approx dl/4$ lorsque $\bar{r} \to m/2$. Dans le système de coordonnées *harmoniques* où $\tilde{r} = r - m$, utile pour l'étude de l'approximation post-newtonienne de la relativité générale, la métrique (1) devient :

$$ds^2 = -\left(\frac{\tilde{r} - m}{\tilde{r} + m}\right)c^2dt^2 + \left[\left(1 + \frac{m}{\tilde{r}}\right)^2\delta_{\alpha\beta} + \left(\frac{\tilde{r} + m}{\tilde{r} - m}\right)\frac{m^2}{\tilde{r}^4}x_\alpha x_\beta\right]dx^\alpha dx^\beta. \tag{3}$$

Enfin des changements de systèmes de coordonnées impliquant le temps peuvent être envisagés ; Lemaître par exemple posa (en 1933) :

$$\tau = t + \int dr\frac{\sqrt{2m/r}}{1 - 2m/r} \quad , \quad \rho = t + \int \frac{dr}{(1 - 2m/r)\sqrt{2m/r}}, \tag{4}$$

ce qui transforme la métrique (1) en :

$$ds^2 = -d\tau^2 + \frac{d\rho^2}{\left[\frac{3}{4m}(\rho - c\tau)\right]^{\frac{2}{3}}} + \left[\frac{3}{2}(\rho-\tau)\right]^{\frac{4}{3}} (2m)^{\frac{2}{3}}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{5}$$

On note que (5) est un cas particulier de la métrique de Tolman-Bondi (cf & 14) où $m = const$ de manière à décrire un espace vide, cf eq (14.6), et où on a choisi $E = 0$ et $\tau_0 = \rho$.Dans ce système de coordonnées la métrique dépend explicitement du temps τ mais les horloges sont synchrones (temps propre et temps coordonnée coïncident) ; on remarque également que le rayon de Schwarzschild $r = 2m$ correspond à une surface régulière du genre lumière : $\rho - \tau = 4m/3$.

On voit ainsi que la surface $r = 2m$ est en fait régulière et le rayon de Schwarzschild une simple pathologie du système de coordonnées, analogue à l'origine de l'espace euclidien en coordonnées sphériques. D'ailleurs une géodésique radiale, cf eq (12.3), peut être parcourue de $r = \infty$ à $r = 0$; on peut montrer également en utilisant l'équation de déviation géodésique (à faire en exercice), que la force de marée qui s'exerce sur un corps de dimension finie traversant $r = 2m$ reste finie. Ceci étant la surface $r = 2m$ est une surface de redshift infini, comme nous l'avons vu plus haut. Par ailleurs en deçà de $r = 2m$, les rôles des coordonnées t et r sont échangés, puisque la signature de la métrique passe de $(-, +, +, +)$ à $(+, -, +, +)$.

En revanche l'origine $r = 0$ est une singularité vraie, de courbure : les invariants de courbure, tels $R_{ijkl}R^{ijkl}$, qui caractérisent la géométrie, indépendamment du système de référence choisi y divergent : pour la métrique (1) $R_{ijkl}R^{ijkl}$ vaut $48m^2/r^6$ régulier en $r = 2m$ mais qui diverge en $r = 0$.

Ces pathologies furent notées dès 1916, mais ne furent vraiment comprises que lorsqu'il devint clair, comme nous le verrons (et comme l'expression de la métrique en coordonnées de Lemaître l'indique déjà), que la singularité $r = 2m$ était une singularité liée au choix du système de coordonnées de Schwarzschild, et non une singularité de l'espace-temps lui-même, comme c'est le cas de $r = 0$.

16. Exemple d'extension maximale : de l'espace-temps de Rindler à celui de Minkowski

Considérons la métrique bi-dimensionnelle

$$ds^2 = -x^2 dt^2 + dx^2 \quad ; \quad t \in [-\infty, +\infty] \quad ; \quad x \in [0, +\infty]. \tag{1}$$

On reconnaît là la métrique de Rindler. Elle est singulière en $x = 0$. Cette singularité, analogue à l'origine du plan euclidien en coordonnées polaires, est liée au choix du système de coordonnées et non à la structure de l'espace-temps (puisque le tenseur de Riemmann est nul). La question ici est de trouver un nouveau système de coordonnées, analogue aux coordonnées cartésiennes du plan euclidien, régulier partout.

Pour ce faire (cf e.g. Wald, p. 149 et seq.) considérons les géodésiques nulles ($ds^2 = 0$), d'équation : $t = \pm \ln x + Cte$, et introduisons les coordonnées dites *nulles* :

$$u = t - \ln x \quad ; \quad v = t + \ln x \quad ; \quad u, v \in [-\infty, +\infty], \tag{5.28}$$

dans lesquelles la métrique (1) devient : $ds^2 = -\mathrm{e}^{v-u} du dv$.

Faisons ensuite le nouveau changement de coordonnées :

$$U = -\mathrm{e}^{-u} \quad ; \quad V = \mathrm{e}^{v} \quad ; \quad U \in [-\infty, 0] \quad ; \quad V \in [0, +\infty]. \tag{2}$$

La métrique devient alors : $ds^2 = -dUdV$. Cette métrique est régulière partout et on peut *étendre* les intervalles de variation de U et V à *tout le plan* (U, V). Un ultime changement de coordonnées :

$$T = \frac{U+V}{2} = x \sinh t \quad ; \quad X = \frac{V-U}{2} = x \cosh t \quad ; \quad (T, X) \in [-\infty, +\infty] \tag{3}$$

conduit alors à la métrique familière :

$$ds^2 = -dT^2 + dX^2. \tag{4}$$

En passant des coordonnées de Rindler (t, x) aux coordonnées minkowskiennes (T, X) on a ainsi non seulement éliminé la singularité en $x = 0$, mais on a également étendu l'espace-temps, puisque les coordonnées de Rindler ne couvrent que la région $X^2 - T^2 > 0$ de l'espace-temps de Minkowski. Le cône futur de l'origine correspond à l'univers de Milne. (voir figure in e.g. "Gravitation", Misner-Thorne-Wheeler, p 167).

17. La géométrie de Schwarzschild en coordonnées de Kruskal Szekeres

La singularité de la métrique de Schwarzschild en $r = 2m$ n'étant pas intrinsèque, il existe un changement de coordonnées analogue à celui qui fait passer des coordonnées de Rindler à celles de Minkowski qui l'élimine (Kruskal, 1960).

Les sections $\theta = const, \phi = const$ de l'espace-temps de Schwarzschild ont pour métrique :

$$d\sigma^2 = -(1 - 2m/r)dt^2 + dr^2/(1 - 2m/r) \qquad ; \qquad t \in [-\infty, +\infty], \quad r \in]0, +\infty]. \tag{1}$$

Les géodésiques radiales nulles de la métrique de Schwarzschild (telles que $d\sigma^2 = 0$) ont pour équations : $t = \pm r_* + Cte$, où r_* est la coordonnée "tortue" (l'expression est de J.A. Wheeler) : $r_* = r + 2m\ln(|r/2m - 1|)$. On introduit alors les coordonnées nulles :

$$u = t - r_* \quad ; \quad v = t + r_* \qquad ; \qquad u, v \in [-\infty, +\infty], \tag{2}$$

dans lesquelles la métrique (1) devient : $ds^2 = -(2m/r)\mathrm{e}^{-r/2m}\mathrm{e}^{(v-u)/4m}dudv$.

On introduit ensuite :

$$U = -\mathrm{e}^{-u/4m} \quad ; \quad V = \mathrm{e}^{v/4m} \qquad ; \qquad U \in [-\infty, 0] \quad ; \quad V \in [0, +\infty]. \tag{3}$$

qui mène à la métrique régulière partout (sauf en $r = 0$) : $ds^2 = -(32m^3/r^3)dUdV$. L'intervalle de variation de U et V peut donc être *étendu* à *tout* le plan (U, V).

L'ultime changement :

$$T = \frac{U + V}{2} \quad ; \quad X = \frac{V - U}{2} \quad ; \quad (T, X) \in [-\infty, +\infty] \tag{4}$$

conduit enfin à la *métrique de Kruskal* :

$$ds^2 = \frac{32m^3}{r}\exp(-\frac{r}{2m})(-dT^2 + dX^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \tag{5}$$

Elle est régulière partout, sauf en $r = 0$.

En résumé :

$$\begin{cases} T = \pm\sqrt{\dfrac{r}{2m} - 1}\exp\dfrac{r}{4m}\mathrm{sh}\dfrac{t}{4m} \quad , \quad X = \pm\sqrt{\dfrac{r}{2m} - 1}\exp\dfrac{r}{4m}\mathrm{ch}\dfrac{t}{4m} \qquad \text{si} \qquad r > 2m \\ T = \pm\sqrt{1 - \dfrac{r}{2m}}\exp\dfrac{r}{4m}\mathrm{ch}\dfrac{t}{4m} \quad , \quad X = \pm\sqrt{1 - \dfrac{r}{2m}}\exp\dfrac{r}{4m}\mathrm{sh}\dfrac{t}{4m} \qquad \text{si} \qquad r < 2m \end{cases} \tag{6}$$

où on retient le signe + dans la moitié Nord-Ouest du plan (T, X), et le signe $-$ dans la moitié Sud-Est (voir figure in e.g. "Gravitation" de Misner-Thorne-Wheeler, p 834). Inversement r et t sont reliés à X et T par :

$$\left(\frac{r}{2m} - 1\right)\exp\frac{r}{2m} = X^2 - T^2 \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} \dfrac{t}{4m} = \mathrm{th}^{-1}\dfrac{T}{X} \qquad \text{si} \quad r > 2m \\ \dfrac{t}{4m} = \mathrm{coth}^{-1}\dfrac{T}{X} \quad \text{si} \quad r < 2m\,. \end{cases} \tag{7}$$

Ainsi donc le passage, dans l'espace-temps d'un trou noir, des coordonnées de Schwarzschild aux coordonnées de Kruskal est-il analogue au passage, dans l'espace-temps de Minkowski, des coordonnées de Rindler à celles, pseudo-cartésiennes, de Minkowski.

Considérons les surfaces $(\theta, \phi) = const.$. La singularité de courbure $r = 0$ est représentée dans le plan (T, X) par les *deux* hyperboles $T^2 - X^2 = 1$. De manière générale, toute courbe du plan (t, r) est représentée deux fois dans le plan (T, X). Ainsi les droites $r = Const. > 2m$ (trajectoires d'observateurs immobiles dans le système de coordonnées schwarzschildiennes) sont représentées par des hyperboles dans les cadrans Est et Ouest ; et les droites $r = Const. < 2m$ par des hyperboles dans les cadrans Nord et Sud (voir les figures p 835 du MTW). Quant à la singularité de coordonnée : $r = 2m$ elle est représentée par les deux droites $T = \pm X$. Enfin les droites $t = const.$ correspondent aux droites $T/X = Const.$ et les trajectoires des photons radiaux sont les lignes : $T = \pm X + Cte$ (la surface $r = 2m$ est donc du genre lumière). Dans ce diagramme de Kruskal la représentation graphique du phénomène de redshift décrit plus haut est particulièrement simple (voir figure p 835 et 848 du MTW.)

Développons l'analogie entre la correspondance $(t, r) \to (T, X)$ et celle entre les coordonnées de Rindler et de Minkowski. Les coordonnées de Schwarzschild se comparent à celles de Rindler. Un observateur en $r, \theta, \phi = Cte$ est comparable à un observateur accéléré de Rindler (ni l'un ni l'autre n'ont un mouvvement libre) et un observateur en chute libre vers le centre est l'analogue d'un observateur inertiel. Les mêmes remarques valent donc dans les deux cas. On retrouve le fait que l'observateur en chute libre sort de l'horizon de l'observateur lointain lorsqu'il franchit l'*horizon* $r = 2m$, et que les signaux qu'il lui envoie sont infiniment "redshiftés" (d'où le nom de "trou noir").

18. *Le diagramme de Penrose-Carter

Nous avons déjà indiqué l'utilité d'associer à un espace-temps physique "asymptotiquement plat", un espace-temps non physique *conformément* relié au précédent (c-à-d de métrique $\tilde{g}_{ij} = \Omega^2 g_{ij}$), qui ramène à distance finie les points à l'infini, et pour lequel la notion de platitude asymptotique a un sens précis.

Considérons d'abord (cf e.g. le Hawking and Ellis, chapter 5, ou le Stewart p. 118 et seq.) le cas simple de l'espace-temps de Minkowski en coordonnées sphériques : $ds^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Sigma^2$ avec $d\Sigma^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\phi^2$, $t \in [-\infty, +\infty]$, $r \in [0, \infty]$. Introduisons deux nouvelles coordonnées telles que : $t + r = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\Psi + \xi)$ et $t - r = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\Psi - \xi)$, avec $(\Psi + \xi) \in [-\pi, +\pi]$ et $(\Psi - \xi) \in [-\pi, +\pi]$). La condition $r > 0$ restreint ξ à être positif. On a alors (exercice : détailler le calcul) :

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2 \qquad \text{avec} \qquad d\tilde{s}^2 = -d\Psi^2 + d\xi^2 + \sin^2\xi d\Sigma^2 \quad \text{et} \quad \Omega^2 = \frac{1}{4\cos^2\frac{1}{2}(\Psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\Psi-\xi)}. \tag{1}$$

La métrique $d\tilde{s}^2$ est celle de l'univers statique d'Einstein, dont les sections spatiales sont des 3-sphères de rayon constant $\xi = 1$. Quant aux sections $(\theta, \phi) = Const.$ elles sont représentées par le diagramme "triangle" de *Penrose Carter* dont on trouvera une reprśentation graphique dans le Hawking and Ellis p 123.

Le diagramme de Penrose Carter de l'espace-temps de Schwarzschild s'obtient de manière analogue (cf le Hawking and Ellis, ou le MTW p. 918 et seq.). Considérons d'abord le cadran Est du diagramme de Kruskal ($X > 0$, $T + X > 0$ et $T - X < 0$). Faisons le même changement de coordonnées que précédemment : $(T, X) \to (\Psi, \xi)$ tel que $T + X = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\Psi + \xi)$ et $T - X = \mathrm{tg}\frac{1}{2}(\Psi - \xi)$. Les conditions sur X et T impliquent que $(\Psi + \xi) \in [0, +\pi]$, $(\Psi - \xi) \in [-\pi, 0]$ et $\xi > 0$. La métrique (17.5) s'écrit alors dans ce cadran :

$$ds^2 = \Omega^2 d\tilde{s}^2 \quad \text{avec} \quad d\tilde{s}^2 = -d\Psi^2 + d\xi^2 + r^2\Omega^{-2} d\Sigma^2 \quad \text{et} \quad \Omega^2 = \frac{32m^3}{r}\frac{e^{-r/2m}}{4\cos^2\frac{1}{2}(\Psi+\xi)\cos^2\frac{1}{2}(\Psi-\xi)}. \tag{2}$$

Les sections $(\theta, \phi) = const.$ de cette métrique sont représentées par le bloc Est compactifié du diagramme de Penrose-Carter (voir figure in e.g. le Hawking-Ellis p 154 ou dans le MTW p 920). Quant au bloc Ouest de Penrose-Carter du cadran Ouest, il s'obtient par changements de signe : $X \to -X$, $T \to -T$, $\Psi \to -\Psi$, $\xi \to -\xi$.

Considérons maintenant le cadran Nord ($T > 0$, $T + X > 0$, $T - X > 0$ et $T^2 - X^2 < 1$) et introduisons les coordonnées (Ψ, ξ) par les mêmes transformations que précédemment. Les sections $(\theta, \phi) = const.$ de cette métrique sont représentées par le bloc Nord compactifié du diagramme de Penrose-Carter, où la singularité de courbure $r = 0$ est du genre espace. Celui de la région Sud s'obtient par changements de signe.

Pour obtenir enfin le diagramme de Penrose-Carter de tout l'espace-temps de Kruskal (qui, rappelons-le représente *deux* fois l'espace-temps de Schwarzschild), il suffit de "recoller les blocs".

L'intérêt d'un tel diagramme est qu'il montre clairement la structure causale de l'espace-temps d'un trou noir de Schwarzschild. On voit en particulier que si le trou noir résulte du collapse d'une étoile, seule le blco Est est pertinent. On remarque aussi que comme le diagramme est symétrique par renversement du temps, on peut concevoir qu'une étoile émerge de l'horizon passé : le trou noir devient "trou blanc", une possibilité sur laquelle même les relativistes les plus imaginatifs restent discrets... Le diagramme complet quant à lui ne s'applique qu'à un trou noir éternel. Les trajectoires des rayons lumineux étant les cônes $\Psi = \pm\xi + Const.$ on voit cependant que les régions Nord et Sud ne peuvent pas communiquer.

19. Le pont d'Einstein-Rosen ou trou de ver

Nous avons vu que la géométrie des sections ($t = Const, \theta = \pi/2$), pour $r > 2m$ de la métrique de Schwarzschild en coordonnées schwarzschildiennes ($d\sigma^2 = dr^2(1-2m/r)^{-1} + r^2 d\phi^2$) était celle d'un paraboloïde d'équation $z^2 = 8m(r-2m)$ plongé dans un espace euclidien de métrique $dS^2 = dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$. Si l'on traite d'un trou noir et ne raccorde donc pas ce paraboloïde à une métrique intérieure alors (voir figure in e.g. le MTW p 837) on voit qu'il connecte *deux* régions asymptotiquement plates, un phénomène en accord avec les résultats du & précédent. Si l'on ne s'intéresse qu'à la topologie de cette surface, i.e. si l'on s'autorise à la déformer, on peut la transformer en un *trou de ver*, selon la terminologie de J.A.Wheeler (1962), dénommé aussi *pont d'Einstein Rosen* (1935) (cf le MTW p 37).

Une question qu'on peut alors se poser est (cf e.g. le Misner-Thorne-Wheeler p. 836 et seq.) : si l'on *identifie* les deux régions asymptotiques, est-il concevable q'un signal lumineux puisse se propager de A en B, deux points situés loin du trou noir dans une région quasi-minkowskienne de l'espace-temps, par deux routes différentes : l'une restant dans la région asymptotique, l'autre passant par le "trou de ver"? et est-il possible que la seconde soit plus rapide que la première, auquel cas on pourrait communiquer de A en B "plus vite que la lumière" ?

On sait, en regardant le diagramme de Penrose-Carter, que la réponse est négative : un photon (radial) émis loin du trou noir vers le trou noir dans le bloc Est, butera sur la singularité $r = 0$ du bloc Nord et ne pourra en aucun cas émerger dans la région Ouest. Un trou noir de Schwarzschild ne peut donc pas servir de "machine à remonter dans le temps" !

On peut aussi répondre à la question par un autre raisonnement, qui consiste à étudier comment le trou de ver, qui est une "photographie" de l'espace-temps à un instant t donné, évolue à mesure que le photon, envoyé par A à $t = 0$, s'en approche. Tant que le photon est à l'extérieur de l'horizon, la coordonnée t est régulière et le trou de ver est statique : le chemin parcouru par le photon est une courbe sur le paraboloïde (voir figure dans le MTW p 839). Mais au-delà, la géométrie de la section spatiale sur laquelle se propage le photon n'est plus celle d'un paraboloïde, car la signature de la métrique $d\sigma^2 = -dr^2/(2m/r - 1) + r^2 d\phi^2$ a changé, mais plutôt celle de la surface fermée $z^2 = 8m(2m - r)$ plongée dans l'espace pseudo-euclidien de métrique $dS^2 = -dz^2 + dr^2 + r^2 d\phi^2$. Le chemin parcouru par le photon à l'intérieur de l'horizon est une courbe sur cette surface, et l'on voit qu'elle aboutit (r décroît) à la singularité de courbure $r = 0$, en accord avec l'analyse précédente.

On peut également arriver au résultat en "filmant" le trou de ver non pas en temps t mais en temps T (qui a l'avantage d'être une coordonnée régulière partout). On montre alors (cf e.g. le MTW p. 839) que la gorge du trou de vers rétrécit jusqu'à disparaître au moment même où le photon l'atteint.

Energétique des trous noirs

20. Trous noirs de Kerr-Newmann

La solution à symétrie sphérique des équations d'Einstein, non plus dans le vide comme précédemment, mais en présence d'un champ électrique ($G_{ij} = 8\pi T_{ij}$ avec $T_{ij} = F_{ik}F_j{}^k - \frac{1}{4}F_{kl}F^{kl}$) est l'espace-temps de Reisner-Nordstróm (1919), dont la métrique, en coordonnées schwarzschildiennes, est :

$$ds^2 = -(1 - 2m/r + Q^2/r^2)dt^2 + \frac{dr^2}{1 - 2m/r + Q^2/r^2} + r^2 d\Sigma^2, \qquad (1)$$

où m est la masse du trou noir et Q sa charge.

Si $Q^2 > m^2$, la singularité de courbure $r = 0$ est "nue" : des particules issues de cette région, où les forces de gravitation divergent et où donc la physique est inconnnue, peuvent atteindre la région asymptotique ; si de tels objets existaient il serait impossible, dans le cadre actuel de la théorie, de prédire leur comportement. On suppose par conséquent (vœu pieux) qu'il n'en existe pas ; c'est l'hypothèse de *censure cosmique* (Penrose).

Si en revanche $Q^2 < m^2$, cet espace-temps représente un trou noir, possédant deux horizons, $r_\pm$, racines de $r^2 - 2mr + Q^2 = 0$. Comme dans la région $0 < r < r_-$ la signature est $(-,+,+,+)$ (de même qu'en $r > r_+$), la singularité de courbure $r = 0$ est du genre temps, et non du genre espace comme dans le cas de Schwarzschild. Ceci étant, on peut, comme dans le cas de l'espace-temps de Schwarzschild, introduire deux jeux de nouvelles coordonnées (un pour chaque horizon), analogues au jeu (T, X), dans lesquels la métrique est régulière en r_+ ou en r_-. On obtient ainsi un diagramme de Kruskal couvrant la région $r_+ < r < \infty$ et un autre couvrant la région $0 < r < r_-$. L'introduction de nouvelles coordonnées, analogues (Ψ, ξ), dans chacune des régions $r_+ < r < \infty$, $r_- < r < r_+$ et $0 < r < r_-$, permet enfin de construire les blocs du diagramme de Penrose-Carter. Un peu d'intuition (ou une étude du chapitre 5 du Hawking-Ellis, ou du MTW p. 921) montre qu'il y en a 3.

Pour enfin obtenir une représentation de tout l'espace-temps de Reisner-Nordström (soit encore son *extension analytique maximale*) il faut "coller" ces 3 blocs de sorte que toute géodésique aboutisse soit à l'infini soit à la singularité de courbure. On obtient un diagramme (Graves and Brill 1960, Carter 1966), voir la figure p 921 du MTW ou p 158 du Hawking-Ellis, où la région $0 < r < \infty$ est représentée une infinité de fois (et non plus seulement deux fois comme dans le diagramme de Penrose-Carter d'un trou noir de Schwarzschild). On voit également qu'une particule, émise loin du trou noir et tombant dedans, peut éviter la singularité et réémerger dans une autre région asymptotique. La question de savoir si ces régions asymptotiques peuvent être identifiées reste cependant indécise...

En 1963 Kerr et Kerr-Newmann obtenaient une nouvelle solution,à symétrie axiale, des équations d'Einstein en présence d'un champ électromagnétique. Dans les coordonnées dites de Boyer-Lindquist (1967), la métrique s'écrit :

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2}\left[dt - a\sin^2\theta\, d\phi\right]^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2}\left[(r^2 + a^2)d\phi - a\, dt\right]^2 + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \tag{2}$$

où $\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + Q^2$ et $\rho^2 \equiv r^2 + a^2\cos^2\theta$. Cette solution décrit un trou noir si $a^2 + Q^2 < m^2$, possédant comme celui de Reisner deux horizons, zéros de Δ. L'espace-temps possède aussi une singularité de courbure, du genre temps, en $\rho = 0$, c-à-d en $r = 0$ *avec* $\theta = \pi/2$: une telle singularité est dite *en anneau*. On trouvera le diagramme de Penrose-Carter correspondant (Carter 1968) p 165 du Hawking-Ellis.

Metrique de Kerr-Schild et obtention de la métrique de Kerr

Les équations d'Einstein sont non-linéaires. Il existe cependant une classe de métriques qui les linéarisent. Considérons en effet, dans un système de coordonnéees appropriées, les métriques de composantes

$$g_{ij} = \overline{g}_{ij} + l_{ij} \quad \text{avec} \quad l_{ij} = f(x^i)l_i l_j \tag{3}$$

où $\overline{g}_{ij}$ est une métrique, dans les coordonnées choisies, d'un espace-temps "de fond", connue, où $f(x^i)$ est une fonction a priori arbitraire et où le vecteur $l^i = \overline{g}^{ij}l_j$ est nul et géodésique, c.-à-d. tel que

$$\overline{g}_{ij}l^i l^j = 0 \quad , \quad l^j\overline{D}_j l^i = 0 \tag{4}$$

C'est un bon exercice de calculer le tenseur de Ricci de telles métriques. On trouve

$$R^i_j = \overline{R}^i_j - l^{ik}\overline{R}_{kj} + \overline{D}_k(\overline{g}^{il}\Delta^k_{jl}) \quad \text{où} \quad \Delta^i_{jk} = \frac{1}{2}(\overline{D}_j l^i_k + \overline{D}_k l^i_j - \overline{D}^i l_{jk}) \tag{5}$$

Cette expression (exacte) est linéaire dans la "perturbation" l_{ij}. Quant au scalaire de courbure il se réduit à

$$R = \overline{R} - l^{ij}\overline{R}_{ij} + \overline{D}_i V^i \quad \text{où} \quad V^i = l^i\overline{D}_j(fl^j) \tag{6}$$

Si donc on se donne une métrique de fond $\overline{g}_{ij}$ et le vecteur l^i associé, l'équation $R = 0$ donne la fonction f. La métrique g_{ij} est alors déterminée; reste à vérifier si elle est ou non solution des équations du vide, ie Ricci-plate : $R^i_j = 0$.

Par exemple prenons comme métrique de fond celle de Minkowski en coordonnées sphériques : $d\overline{s}^2 = -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2)$, et comme vecteur nul et géodésique : $l^i = (1, 1, 0, 0)$. La solution de $R = 0$ est alors : $f(r) = \frac{a+br}{r^2}$. On voit ensuite que $R^i_j = 0$ si $a = 0$. Ainsi l'élément de longueur cherché est-il (en posant $b = 2m$)

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \frac{4m}{r} dr\, dt + \left(1 + \frac{2m}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2) \tag{7}$$

ce qui n'est autre que la métrique de Schwarzschild (comme le changement de coordonnée $t \to t - t_0(r)$ avec $\frac{dt_0}{dr} = -\frac{2m}{r-2m}$ le montre explicitement).

Prenons maintenant comme métrique de fond celle de Minkowski en coordonnées sphéroïdales :

$$d\overline{s}^2 = -dt^2 + \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2} d\rho^2 + (\rho^2 + a^2\cos^2\theta)d\theta^2 + (\rho^2 + a^2)\sin^2\theta\, d\phi^2 \tag{8}$$

où a est une constante, et comme vecteur nul et géodésique

$$l^i = \left(1, \frac{\rho^2 + a^2\cos^2\theta}{\rho^2 + a^2}, 0, a\sin^2\theta\right) \tag{9}$$

L'équation $R = 0$ se résout facilement pour donner : $f = \frac{a(\theta)+b(\theta)\rho}{\rho^2+a^2\cos^2\theta}$. Il faut ensuite voir si la métrique trouvée est Ricci plate; la réponse est oui si $a(\theta) = 0$ et $b(\theta) = 2m$, c.-à-d. si

$$f = \frac{2m\rho}{\rho^2 + a^2\cos^2\theta} \tag{10}$$

C'est là la métrique de Kerr sous sa forme originale. On trouvera le changement de coordonnées qui la met sous la forme maintenant plus familière de Boyer-Lindquist dans, e.g. Gibbons et al., hep-th/0404008.

Loin du trou noir (r grand), les composantes du tenseur métrique (2) se réduisent à : $g_{ij} = \eta_{ij} + h_{ij}$ avec $h_{tt} = 2m/r$, $h_{tx} = 2may/r^3$, $h_{ty} = -2max/r^3$ et décrivent un objet de masse m, en rotation, son moment cinétique étant $J = ma$ comme on le verra lorsque nous étudierons la Mécanique Céleste relativiste.

Il est bon de noter qu'il n'existe pas de "solution intérieure" de Kerr, ie il n'existe pas de métrique solution des équations d'Einstein en présence de matière (d'équation d'état réaliste) qui puisse être raccordée à la métrique de Kerr (à l'exception de disques minces d'extension infinie).

Nous ne ferons ici que mentionner le problème de la stabilité des trous noirs. Si en effet les solutions de Schwarzschild, Reisner-Nordstrom et Kerr-Newmann étaient instables—c-à-d si les métriques $g_{ij} = g^{(0)}_{ij} + h_{ij}$, où $g^{(0)}_{ij}$ est la métrique du trou noir et h_{ij} une perturbation solution des équations d'Einstein linéarisées, divergent—alors l'intérêt astrophysique de ces solutions serait compromis... Heureusement il n'en est rien (cf e.g. Chandrasekhar *The mathematical Theory of Black Holes*), encore que le statut de la stabilité des horizons internes des trous noirs chargés ou en rotation soit toujours ouvert (Israel). Par ailleurs une série de théorèmes a permis de montrer que la solution de Kerr-Newmann était la seule solution des équations d'Einstein en présence d'un champ électromagnétique qui soit stationnaire, à symétrie axiale et asymptotiquement plate. C'est ce que J. Wheeler a appelé le "No Hair Theorem" : lorsqu'une étoile s'effondre en trou noir, elle perd tous ses "cheveux" c.-à-d. les paramètres qui la décrivent (sa composition chimique par exemple) pour n'être plus caractérisée à la fin que par sa masse, sa charge et son moment cinétique. Ainsi que le remarquèrent Beckenstein puis Hawking cette perte d'information doit pouvoir se traduire par une augmentation d'entropie (cf plus bas).

21. Ergorégions et processus de Penrose

Considérons une particule dans la métrique de Kerr (20.2) (on posera $Q = 0$ dans cette section). Comme elle ne dépend ni de t ni de ϕ, les composantes u_ϕ et u_t de la forme $u_i = g_{ij}u^j$, où $u^i = dx^i/ds$ est le vecteur tangent à la trajectoire, sont constantes. La métrique contenant le terme non diagonal $g_{t\phi}$, on a : $u^\phi = g^{\phi\phi}u_\phi + g^{\phi t}u_t$ et $u^t = g^{tt}u_t + g^{t\phi}u_\phi$. Si la particule est en chute radiale ($u_\phi = 0$), on a alors que :

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{u^\phi}{u^t} = \frac{g^{\phi t}}{g^{tt}} = \frac{2mra}{(r^2+a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2\theta} \tag{5.42}$$

où la dernière égalité s'obtient en inversant la métrique (41). Comme le second membre est positif, $d\phi/dt > 0$ et on voit que la particule est entraînée dans le sens de rotation du trou noir.

Considérons maintenant un photon dans un "plan" $\theta = const$, émis tangentiellement à un cercle de rayon r. Sa trajectoire est déterminée par : $ds^2 = g_{tt}dt^2 + 2g_{t\phi}dt\,d\phi + g_{\phi\phi}d\phi^2 = 0$ qui possède deux solutions, correspondant à des émissions prograde et rétrograde. On voit cependant que si r est tel que $g_{tt} = 0$, c-à-d si $r = r_0 = m - \sqrt{m - a^2\cos^2\theta}$ alors ces solutions sont : $d\phi/dt = 0$ et $d\phi/dt = -2g_{t\phi}/g_{\phi\phi} > 0$. Ainsi donc le photon rétrograde est-il si entraîné par la rotation du trou noir qu'il ne *peut pas* tourner dans le sens inverse du trou noir. Cette région comprise entre l'horizon r_+ et r_0 est l'*ergorégion* (Ruffini-Wheeler 1971).

Considérons enfin une particule de masse inertielle m_0. Son énergie est $E_0 = -m_0u_t \to -m_0\eta_{tt}u^t > 0$ à l'infini. Supposons qu'elle rentre dans l'ergorégion et s'y désintègre, sans perte d'énergie, en deux particules m_1 et m_2. On a donc : $E_0 = E_1 + E_2$ avec $E_{(a)} = -m_{(a)}u_t^{(a)} = -m_{(a)}(g_{tt}u^t_{(a)} + g_{t\phi}u^\phi_{(a)})$. Or $E_{(a)}$ n'est pas nécessairement positif dans l'ergorégion (cf plus bas). On peut donc concevoir le procesus suivant (Penrose 1969) : Supposons que la désintégration soit telle que la particule 1 ait une énergie négative, ce qui implique que $E_2 > E_0$, et qu'elle tombe dans le trou noir alors que la particule 2 est expulsée vers l'infini. L'énergie récupérée à l'infini est donc supérieure à l'énergie initiale, un bilan qui s'effectue au détriment du trou noir dont la masse et le moment angulaire décroissent. On voit ainsi le principe de l'extraction d'énergie d'un trou noir.

22. Masse irréductible et entropie d'un trou noir (Sous forme d'exercice)

a. Quelles sont les composantes du champ électromagnétique dans la métrique de Reisner-Nordström ?

b. Obtenez les équations du mouvement d'une particule de charge e dans la métrique de Reisner-Nordström sous la forme : $(dr/d\tau)^2 = (E - E_+)(E - E_-)$. Dessinez les "potentiels effectifs" $E_\pm(r)$.

c. A l'aide du diagramme obtenu en (b), interprétez une "particule" d'énergie $E < -1$ et de charge e dans le champ d'un trou noir chargé comme une "antiparticule" d'énergie $-E$ et de charge $-e$. Montrez alors qu'il existe un domaine d'énergie pour lequel des paires de particules et d'antiparticules peuvent être spontanément créées ("paradoxe de Klein"). Montrez que l'on peut ainsi extraire de l'énergie du trou noir. (Pour une desription de ce phénomène de "superradiance" voir e.g. le Schutz p.302 et seq.)

d. Montrez à partir du résultat précédent que la masse d'un trou noir chargé augmente toujours de $\delta M > E_\pm(r_+)$. Réécrivez cette inégalité sous la forme : $\delta M_{ir} > 0$ avec $M_{ir} = r_+/2$. (Christodoulou-Ruffini 1971) (On consultera utilement le Misner-Thorne-Wheeler p. 913 ou le Wald p. 326.)

e. Déduire de l'exercice précédent que l'énergie maximale que l'on peut extraire d'un trou noir chargé est : $M - M_{ir}$. Calculez $(M - M_{ir})/M$ pour un trou noir "extrême" : $Q = M$.

f. Reprendre les exercices (b-e) dans le cas d'un trou noir de Kerr.

g. Reprenez le raisonnement de Beckenstein et Hawking pour déduire des résultats précédents qu'une entropie peut être associée à un trou noir, et par conséquent une température. Comment Hawking (1974) a-t-il obtenu la valeur précise de cette température ?

ETOILES RELATIVISTES ET TROUS NOIRS

Fluides newtoniens auto-gravitants

Etoiles relativistes

Effondrement gravitationnel

Trou noir de Schwarzschild

Energétique des trous noirs