Equations du mouvement pour des particules relativistes dans un champ électromagnétique externe en relativité d'échelle

Marie-Noëlle Célérier[*] — Laurent Nottale[**]

Laboratoire Univers et Théories (LUTH)
Observatoire de Paris, CNRS, Université Paris-Diderot
5 place Jules Janssen F-92195 Meudon Cedex

[*] *marie-noelle.celerier@obspm.fr*

[**] *laurent.nottale@obspm.fr*

RÉSUMÉ. *L'équation de Klein-Gordon et celle de Dirac sont les équations du mouvement de particules relativistes de spin respectivement nul (particules dites scalaires) et 1/2 (électron/positron). En relativité d'échelle et pour une particule libre, l'équation de Dirac se déduit de celle de Klein-Gordon par une simple opération de passage à la racine carrée dans un formalisme mathématique bi-quaternionique justifié par les principes premiers de la théorie. Ceci n'est plus vrai lorsqu'un champ électromagnétique extérieur intervient. Si l'on cherche a retrouver l'équation de Dirac électromagnétique selon une méthode analogue à celle employée lorsque ce champ est absent, on obtient un terme supplémentaire qui est l'équivalent relativiste du terme de couplage spin-champ magnétique rencontré dans l'équation de Pauli pour une particule de spin 1/2 non relativiste. Il existe cependant une méthode pour retrouver la forme standard de l'équation de Dirac électromagnétique, sans terme supplémentaire, en modifiant la manière d'appliquer les deux covariances, quantique et d'échelle (de jauge), à l'oeuvre ici. Sans entrer dans les détails techniques, nous montrons ici comment ces résultats suggèrent que cette dernière méthode repose sur des racines plus profondes de la théorie de relativité d'échelle, en ce qu'elle inclue naturellement le couplage spin-charge.*

ABSTRACT. *Klein-Gordon and Dirac equations are the motion equations for relativistic particles with spin 0 (so-called scalar particles) and 1/2 (electron/positron) respectively. For a free particle, the Dirac equation is derived from the Klein-Gordon equation by taking its square root in a bi-quaternionic formalism fully justified by the first principles of the scale relativity theory. This is no more true when an external electro-magnetic field comes into play. If one tries to derive*

Premières Rencontres d'Avignon (2007-2009) autour de la Relativité d'Échelle
Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5, pages 19 à 26

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

the electro-magnetic Dirac equation in a manner analogous to the one used when this field is absent, one obtains an additional term which is the relativistic analogue of the spin-magnetic field coupling term encountered in the Pauli equation, valid for a non-relativistic particle with spin 1/2. There is however a method to recover the standard form of the electro-magnetic Dirac equation, with no additional term, which amounts modifying the way both covariances involved here, quantum covariance and scale (i.e. gauge) covariance, are implemented. Without going into technical details, it will be shown how these results suggest this last method is based on more profound roots of the scale relativity theory since it encompasses naturally the spin-charge coupling.

MOTS-CLÉS : *Relativité d'Echelle, équation de Klein-Gordon, équation de Dirac, champ électro-magnétique.*

KEYWORDS: *Scale Relativity, Klein-Gordon equation, Dirac equation, electro-magnetic field.*

---

1. Introduction

La relativité d'échelle permet de fonder les postulats (Nottale et Célérier, 2007) et les équations du mouvement (Nottale, 1993, 1996, Célérier et Nottale, 2003, 2004, 2006) de la mécanique quantique, ainsi que les théories de jauge de la physique des particules (Nottale et al, 2006) et en particulier l'électromagnétisme (Nottale, 1996, 2003), en leur donnant une interprétation géométrique dans le cadre d'un espace-temps fractal.

Les dédoublements successifs des vitesses dûs à l'abandon de l'hypothèse de différentiabilité permettent d'obtenir les équations du mouvement comme équations géodésiques de cet espace-temps fractal, mettant ainsi en oeuvre la covariance quantique.

Ont été ainsi démontrées successivement : l'équation de Schrödinger (Nottale, 1993), qui s'applique aux particules non-relativistes, celle de Klein-Gordon libre (Nottale, 1996) celle de Dirac libre (Célérier et Nottale, 2003, 2004) et enfin celle de Pauli (Célérier et Nottale, 2006) qui est la limite non-relativiste de l'équation de Dirac et reproduit le comportement d'une particule de spin 1/2, un électron par exemple, non-relativiste. Nous reviendrons plus en détail sur les deux équations qui nous intéressent ici, Klein-Gordon et Dirac, dans la suite de cet article.

Par ailleurs, le principe de relativité appliqué aux échelles implique que celle d'une structure interne sur une géodésique fractale est modifiée lors d'un déplacement dans l'espace-temps et réciproquement. Cette propriété permet de construire le champ électromagnétique et la charge électrique tout en leur donnant un sens physique, mettant ainsi en oeuvre la covariance d'échelle.

2. Covariance quantique et covariance d'échelle

Rappelons qu'en relativité d'échelle la covariance quantique est mise en application par l'utilisation d'un opérateur vitesse covariant, $\widehat{\mathcal{V}^\mu}$. Sous l'effet d'une première brisure de symétrie, celle de $\mathrm{d}s \leftrightarrow -\mathrm{d}s$, cet opérateur devient complexe. Lorsque l'on ajoute les brisures de symétries $\mathrm{d}x^\mu \leftrightarrow -\mathrm{d}x^\mu$ et $x^\mu \leftrightarrow -x^\mu$, on obtient un opérateur bi-quaternionique.

Ces opérateurs, qu'ils soient complexe ou bi-quaternionique, sont utilisés pour écrire les équations du mouvement des particules libres sous la forme géodésique

$$\frac{\widehat{\mathrm{d}}}{\mathrm{d}s}\mathcal{V}_\nu = \widehat{\mathcal{V}^\mu}\partial_\mu \mathcal{V}_\nu = 0. \qquad [1]$$

Un opérateur vitesse complexe injecté dans l'équation ci-dessus permet de retrouver l'équation de Klein-Gordon libre standard (Nottale, 1996). Rappelons que celle-ci s'applique au mouvement d'une particule relativiste sans spin non soumise à un champ extérieur. Avec un opérateur vitesse bi-quaternionique, on obtient une équation de type Klein-Gordon bi-quaternionique. L'équation de Dirac libre s'en déduit comme sa ra-

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

cine carrée (Célérier et Nottale, 2003, 2004). Elle est applicable à une particule relativiste de spin 1/2, tels l'électron et son anti-particule, le positron, non soumise à un champ extérieur. Ces deux particules sont, en mécanique quantique standard, représentées par un seul objet, le bi-spineur, qui a toutes les propriétés mathématiques d'un bi-quaternion. On voit donc que le formalisme de la relativité d'échelle est parfaitement adapté pour reproduire les phénomènes observés en physique microscopique.

Dans le cadre de l'électromagnétisme, la relativité d'échelle permet d'identifier les transformations de jauge, de nature jusqu'ici incomprise, avec les transformations d'échelles globales, $\varrho = \lambda/\epsilon \to \varrho' = \lambda/\epsilon'$, dans "l'espace des échelles". Elle permet également de retrouver, en lui donnant une interprétation géométrique sous forme de dérivée covariante d'échelle, la forme habituelle de la dérivée covariante de l'électrodynamique quantique, à savoir,

$$D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}(e/\hbar c)A_\mu. \qquad [2]$$

Les charges, enfin, émergent naturellement en tant que quantités conservées dans les transformations d'échelle.

Jusqu'ici, donc, tout va bien pour la relativité d'échelle.

3. Là où les choses se corsent

Nous souhaitons retrouver à présent, toujours avec les principes premiers de la relativité d'échelle, les deux équations, Klein-Gordon et Dirac, mais pour des particules soumises à un champ électromagnétique externe. L'idée qui vient en premier à l'esprit est de combiner les deux outils, dérivée covariante d'échelle (QED) et opérateur vitesse covariant quantique, en écrivant l'équation géodésique covariante forte :

$$\widehat{\mathcal{V}^\mu} D_\mu \mathcal{V}_\nu = 0. \qquad [3]$$

On obtient effectivement, en intégrant cette équation, l'équation de Klein-Gordon habituelle pour une particule relativiste sans spin dans un champ électromagnétique externe.

Fiers de ce succès, nous espérions alors pouvoir retrouver l'équation de Dirac électromagnétique en appliquant à l'identique la méthode qui réussit si bien pour le cas des particules libres, à savoir extraire la racine carrée d'une équation de type Klein-Gordon électromagnétique bi-quaternionique.

Très exactement, nous avions montré dans (Célérier et Nottale, 2003, 2004) qu'une équation de type Klein-Gordon libre bi-quaternionique équivaut à appliquer deux fois de suite à la fonction d'onde la partie temporelle de l'équation de Dirac et à l'égaliser ensuite à sa partie spatiale élevée au carré.

Or, ceci n'est plus le cas lorsqu'un champ électromagnétique entre en jeu. Un terme supplémentaire fait alors son apparition et nous avons montré qu'il correspond au couplage entre le moment magnétique intrinsèque ou spin de l'électron (positron) et le champ magnétique. Ce terme est l'analogue relativiste de celui impliquant le moment magnétique de l'électron dans l'équation de Pauli.

La conclusion est que cette méthode est inadaptée et qu'il convient d'en utiliser une autre.

4. Méthode correcte

Au lieu de mettre en oeuvre de manière brutale une covariance forte comme dans la méthode précédente, on va utiliser successivement les deux outils, covariance quantique et covariance d'échelle, comme en mécanique quantique standard.

On applique tout d'abord la covariance quantique et on obtient les équations de Klein-Gordon et Dirac libres comme précédemment. Puis, on remplace dans ces équations la dérivée ordinaire, ∂_μ, par sa partie "inertielle" covariante d'échelle, D_μ.

On obtient alors l'équation de Dirac électromagnétique sous sa forme habituelle, où le couplage spin-champ magnétique n'apparaît pas de manière explicite.

5. Discussion

On a vu que l'équation géodésique uniquement covariante quantique donne l'équation de Dirac libre. En ajoutant la covariance d'échelle directement au niveau de l'équation géodésique, on obtient un terme supplémentaire de couplage du spin au champ magnétique.

L'explication est la suivante. En relativité d'échelle le spin provient directement de la fractalité de l'espace-temps, alors que les charges, issues des transformations dans l'espace des échelles (dilatations et contractions), ne sont que des conséquences indirectes de cette fractalité. L'influence de la fractalité à travers le spin est la plus fondamentale et doit donc être appliquée en premier, indépendamment de celle du champ.

5.1. *Spin*

Le spin est une propriété quantique intrinsèque des particules, composante du moment cinétique total qui est lui-même une constante du mouvement. Il ne prend que des valeurs entières ou demi-entières de $\hbar$.

En relativité d'échelle, le spin 1/2 peut avoir deux interprétations différentes. La première consiste à considérer ce spin comme une "charge quantique" de l'électron (ou du positron). Dans ce cas, un terme de couplage de cette charge au champ extérieur apparaît explicitement dans les équations. Cette interprétation correspond à la manière

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

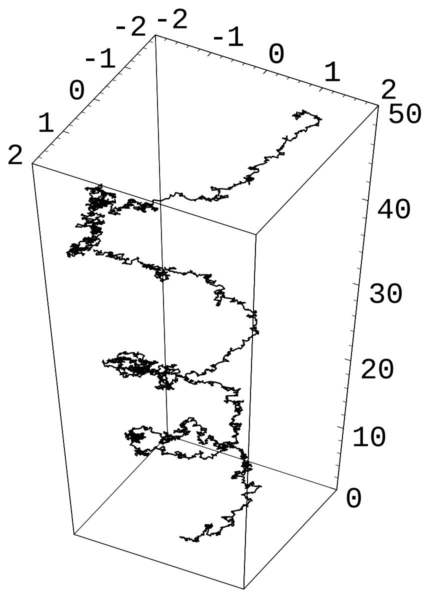

Figure 1. *Géodésique spinorielle typique ($D_F = 2$) dans un espace fractal. Réalisation choisie parmi une infinité de réalisations possibles.*

dont il émerge lorsque la première méthode fortement covariante est utilisée pour obtenir les équations du mouvement.

Le spin peut par ailleurs être considéré comme directement lié à la géométrie fractale de l'espace-temps. Dans ce cas, son couplage au champ électromagnétique est implicite et il n'y a pas de terme supplémentaire dans l'équation de Dirac qui retrouve sa forme standard, comme avec la seconde méthode. Cette interprétation a été illustrée par des simulations numériques (Célérier et Nottale, 2006) permettant de visualiser la forme typiquement spinorielle de certaines géodésiques au sein d'un espace fractal (Fig. 1).

5.2. *Charge électrique*

En raison du principe de relativité d'échelle, les variables d'échelles sont fonctions explicites des coordonnées de l'espace-temps. Ceci implique, lors d'un déplacement dans cet espace-temps, l'apparition d'un changement d'intervalle d'échelle dû à la géométrie fractale, qui s'écrit

$$\delta \ln \varrho = \ (1/q)\ A_\mu\ \mathrm{d}x^\mu, \qquad [4]$$

où q est la charge électrique (active) et A_μ définit le champ électromagnétique.

On démontre que la charge électrique passive e est égale à la charge électrique active q (Nottale et al, 2006, Nottale, 2003).

La charge électrique, propriété de l'électron issue des transformations d'échelle, est donc de nature moins fondamentale que le spin, lui-même composante d'une intégrale première du mouvement.

6. Conclusion

Nous avons vu que la nature interne du spin, intrinsèquement liée à la géométrie fractale de l'espace-temps, est d'un certain point de vue plus fondamentale que celle des charges, qui découlent également de cette fractalité, mais moins directement (car ce sont, dans le cadre de la relativité d'échelle, des quantités conservatives liées aux variations de la géométrie fractale).

Ceci commande l'ordre d'application des deux covariances associées (via les dérivées covariantes correspondantes) pour retrouver l'équation de Dirac électromagnétique standard :

1) le spin,

2) la charge électrique.

Une telle double covariance, l'une fabriquant les effets quantiques, l'autre le champ électromagnétique, est nouvelle en physique. La question du caractère faible ou fort d'une telle covariance se pose ainsi également de manière originale. Rappelons que la covariance forte correspond à la possibilité d'écrire une équation du mouvement “du vide", de type inertielle, sans contribution dans le membre de droite (c'est-à-dire sans intervention d'un champ externe). De ce point de vue, les deux covariances qui se combinent dans le cas étudié sont bien toutes deux de type fort. Mais la dérivation de l'équation de Klein-Gordon électromagnétique avait fait intervenir une nouvelle situation de covariance qu'on pourrait qualifier de “super-forte", au sens où leur combinaison pouvait se faire indistinctement dans les deux sens.

Cette covariance super-forte, qui peut s'appliquer correctement pour obtenir l'équation de Klein-Gordon électromagnétique parce que cette équation ne fait pas intervenir le spin, doit faire place à une cascade de deux covariances fortes dans le cas de l'équation de Dirac où le spin est présent.

Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5

7. Bibliographie

Célérier M.N. & Nottale L., 2003, A scale-relativistic derivation of the Dirac equation. *Electromagnetic Phenomena*, T. 3, N.1 (9), 83.

Célérier M.N. & Nottale L., 2004, Quantum-classical transition in scale relativity. *J. Phys.* **A 37**, 931-955.

Célérier M.N. & Nottale L., 2006, The Pauli equation in scale relativity. *J. Phys. A : Math. Gen.*, **39**, 12565-12585.

Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore, 333 p.

Nottale L., 1996, Scale Relativity and Fractal Space-Time : Application to Quantum Physics, Cosmology and Chaotic systems. *Chaos, Solitons & Fractals*, **7**, 877-938.

Nottale L., 2003, Theory of Electron in Scale Relativity. *Electromagnetic Phenomena*, T. 3, N.1 (9), 24.

Nottale L., Célérier M.N. & Lehner T., 2006, Non-Abelian gauge field theories in scale relativity. *J. Math. Phys.* **47**, 032303, 1-19.

Nottale L. & Célérier M.N., 2007, Derivation of the postulates of quantum mechanics form the first principles of scale relativity. *J. Phys. A : Math. Theor.* **40**, 14471-14498.