
Structuration des systèmes planétaires solaire et extrasolaires en relativité d'échelle

Comparaison aux données d'observation

Laurent Nottale

*LUTH, UMR 8102 CNRS, Observatoire de Paris-Meudon et Université Paris 7
5 place Janssen 92190 Meudon
laurent.nottale@obspm.fr*

RÉSUMÉ. L'application des méthodes de la relativité d'échelle à la théorie de la formation des systèmes planétaires (Nottale 1993, chap. 7.2) a permis, avant la découverte des premières planètes extrasolaires, de faire des prédictions théoriques concernant l'existence de structures universelles dans ces systèmes. En particulier, on s'attend à voir ceux-ci structurés de manière hiérarchique en sous-systèmes dans lesquels il existe des pics de probabilité dans la distribution des demi-grands axes des orbites planétaires qui suivent une loi en n^2 (où n est entier). La comparaison de cette loi avec les sous-systèmes solaires interne (planètes telluriques) et externe (planètes joviennes) a permis de rendre compte des distances des planètes existantes, mais aussi de prévoir l'existence de zones nouvelles de probabilité, à $0.043 \text{ UA}/M_{\odot}$ et $0.17 \text{ UA}/M_{\odot}$ aux petites distances intramercurielles, à 55 UA , 70 UA , etc... pour les objets transplutoniens, ainsi que de nouveaux niveaux de structuration plus lointains qui sont aujourd'hui validés par les observations nouvelles, en particulier des objets distants de la ceinture de Kuiper. En ce qui concerne les planètes extrasolaires, l'accord entre les pics prévus théoriquement et les structures observées dans les données atteint maintenant un haut niveau de signification statistique (la probabilité d'obtenir un tel accord par hasard est de 10^{-7} pour plus de 300 planètes). En particulier le pic de probabilité correspondant au niveau fondamental à $0.043 \text{ UA}/M_{\odot}$, dans lequel les premières exoplanètes ont été découvertes à partir de 1995, est réalisé aujourd'hui par plus de 80 objets. On conclura par une étude particulière du système de 3 planètes autour du pulsar PSR1257+12, pour lequel l'accord entre les positions prédites (utilisant la loi de conservation du centre de gravité) et les positions observées atteint une précision relative de quelques 10^{-5} .

ABSTRACT. The application of scale relativity methods to the theory of planetary system formation (Nottale 1993, chap. 7.2) has allowed us, before the discovery of the first extrasolar systems,

*Premières Rencontres d'Avignon (2007-2009) autour de la Relativité d'Échelle
Sous la direction de L. Nottale et Ph. Martin – ISBN : 2-910545-07-5, pages 40 à 57*

to make theoretical predictions about the existence of universal structuring in these systems. In particular, one expects to see them hierarchically structured in terms of sub-systems in which the semi-major axis distribution show probability peaks according to a n^2 law (where n is integer). A comparison of this law with the inner and outer solar sub-systems has allowed to account for the distances of the existing planets, but also to theoretically predict the existence of new high probability zones, at $0.043 \text{ AU}/M_{\odot}$ and $0.17 \text{ AU}/M_{\odot}$ for small intramercurial distances, at 55 AU , 70 AU , etc... for transplutonian objects, and of more distant new structuring levels which are now validated by new observations, in particular of distant objects in the Kuiper belt. Concerning extrasolar planets, the agreement between the theoretically predicted peaks and the structures observed in the data now reaches a high level of statistical agreement (the probability to obtain such an agreement by chance is 10^{-7} for more than 300 planets). In particular, the probability peak which corresponds to the fundamental level at $0.043 \text{ AU}/M_{\odot}$, in which the first exoplanets have been discovered in 1995, is now achieved by more than 80 exoplanets. We conclude by a specific study of the system of 3 planets around the pulsar PSR1257+12, for which the agreement between the predicted positions (using the law of conservation of the center of gravity) and the observed ones reaches a relative agreement as small as some 10^{-5} .

MOTS-CLÉS : relativité, échelles, astrophysique, planétologie

KEYWORDS: relativity, scales, astrophysics, planetology

1. Introduction

L'approche de la relativité d'échelle a permis, au début des années 1990, d'apporter des éléments nouveaux au domaine de la formation des structures gravitationnelles. L'argument général est le suivant (Nottale 1993, 1996, Nottale et al. 1997, 2000, 2011). Prenons le cas d'une nébuleuse protoplanétaire autour d'une étoile, formée d'un très grand nombre de "planétésimaux". Sur une courte échelle de temps, chacun de ces petits corps suit une portion d'orbite képlérienne, caractérisée par des éléments orbitaux (demi-grand axe, excentricité, inclinaison, obliquité, etc...) qui sont eux-mêmes liés à des quantités conservatives (aussi appelées intégrales premières) comme l'énergie, le moment angulaire ou le vecteur de Runge-Lenz. Mais dès que l'on considère une échelle de temps plus grande, le petit corps est soumis à de nombreuses déviations gravitationnelles dues aux rencontres avec les autres planétésimaux. Sa trajectoire devient chaotique, et au-delà d'un certain horizon temporel de prédictibilité, grand devant le temps de libre parcours moyen (qui est lui-même variable en fonction de l'évolution du processus de formation), devient caractérisée par un mouvement brownien. Il n'y a alors plus d'éléments orbitaux bien déterminés, mais seulement une distribution statistique de possibilités.

Les trois conditions sous lesquelles l'équation fondamentale de la dynamique prend la forme, après changement de variables et intégration, d'une équation de Schrödinger généralisée sont alors réalisées :

(1) infinité de trajectoires possibles, caractérisable par un champ de vitesse dépendant du temps et de l'espace, mais aussi de l'échelle (au lieu d'une vitesse unique dépendant du temps de la représentation déterministe usuelle),

(2) fractalité de chacune de ces trajectoires potentielles, la dimension fractale étant celle du mouvement brownien ($D_F = 2$),

(3) enfin, dédoublement fondamental des vitesses, dû à l'irréversibilité qui apparaît au niveau de la nouvelle dépendance explicite en fonction des petits éléments temporels dt (qui ne doit pas être confondue avec celle sur le temps t).

C'est le cas tout particulièrement des disques protoplanétaires. On est donc amené à appliquer cette méthode descriptive au mouvement des planétésimaux dans un tel disque.

L'équation fondamentale de la dynamique qui décrit un tel mouvement peut alors se transformer en une équation de Schrödinger généralisée, qui n'est plus fondée sur la constante de Planck \hbar , mais sur le paramètre $2m\mathcal{D}$ qui en tient lieu dans cette situation "macroquantique", où \mathcal{D} caractérise l'amplitude des fluctuations fractales et où m est la masse inerte du corps considéré.

Dans cette équation de Schrödinger, le potentiel dominant est le potentiel képlérien de l'étoile centrale, $\phi = -GMm/r$, où M est la masse de l'étoile. Quand au paramètre \mathcal{D} , sa forme peut être déterminée à partir des contraintes physiques (principe d'équivalence et invariance de jauge) qui s'appliquent à cette équation de Schrödinger

gravitationnelle macroscopique (Nottale 1996, Agnese et Festa 1997). Ces contraintes amène à l'écrire sous la forme $\mathcal{D} = GM/2w$, où la constante w , spécifique du système ou sous-système considéré, a la dimension d'une vitesse. En exprimant cette vitesse caractéristique en fonction de la vitesse de la lumière sous la forme $w = \alpha_G c$, on peut faire apparaître, comme l'ont proposé Agnese et Festa (1997), une constante de couplage gravitationnelle α_G qui a un statut en partie semblable, pour chaque sous-système auquel elle s'applique, à celui de la constante de structure fine de l'électromagnétisme.

La résolution de l'équation de Schrödinger fondée sur un tel paramètre fournit des fonctions d'onde dont le carré du module donne la densité de probabilité attendue pour la distribution des corps dont on a ainsi décrit le mouvement. Cette distribution n'est pas plate, mais montre au contraire des pics de probabilité correspondant à des valeurs particulières des quantités conservatives comme l'énergie, le moment angulaire ou le vecteur de Runge-Lenz. Ainsi le disque initial est amené à s'organiser en sous-structures (Nottale 1996). Les planètes qui se formeront ensuite à partir de ces structures auront (une fois que le système se sera stabilisé, agrandissant ainsi l'horizon de prédictibilité) des éléments orbitaux plus probables qui pourront être calculés en fonction de ces quantités conservatives (qui sont donc communes aux deux régimes, classique et macroquantique).

On prédit ainsi que les demi-grands axes doivent montrer des pics de probabilité pour des valeurs (Nottale 1993)

$$a_n = \frac{GM}{w^2} n^2 \quad [1]$$

où n est un entier, et que les excentricités sont elles-mêmes appelées à montrer des valeurs préférentielles données par (Da Rocha et Nottale 2003) :

$$e_{kn} = \frac{k}{n} \quad [2]$$

où k est un entier qui peut varier entre 0 et $n - 1$ ($k = 0$ correspondant à des orbites circulaires).

Les prédictions théoriques de cette nouvelle approche de la formation des systèmes planétaires ont pu être comparées de manière très satisfaisante dès le début des années 1990 (Nottale 1993, 1994) aux données d'observation en ce qui concerne notre propre système solaire. Elles ont également permis de faire des prédictions "en aveugle" de structures du système solaire qui n'avaient pas encore été observées à l'époque (système intra mercuriel, ceinture de Kuiper, pics de distribution des obliquités et inclinaisons de planètes et satellites) qui ont pu être validées depuis. De plus, l'universalité de l'approche utilisée impliquait dès cette époque la prédiction de structures pour les systèmes planétaires extrasolaires, dont aucun n'avait encore été découvert. L'observation de tels systèmes autour d'étoiles de type solaire à partir de 1995 a permis là aussi de valider ces prédictions.

Un des points important qui font différer la description macroquantique gravitationnelle de la mécanique quantique standard est l'invariance d'échelle fondamentale

de la gravitation (remarquée déjà il y a deux siècles par Laplace). On a vu ainsi que la constante \mathcal{D} n'avait rien d'universel, contrairement à la constante de Planck qui structure à elle seule le domaine quantique microscopique (des particules élémentaires aux atomes et aux molécules). Elle dépend ainsi de la masse de l'étoile centrale M , mais même après prise en compte de cette dépendance, la constante résiduelle w (ou de manière équivalente la constante de couplage gravitationnelle $\alpha_G = w/c$), n'a pas de raison non plus de prendre une valeur universelle, mais peut différer d'un sous-système à un autre. Par contre, sachant que pour un même système planétaire présent autour d'une étoile donnée, les différents sous-systèmes devront être raccordés entre eux (par exemple, le système solaire interne est le niveau fondamental du système externe), on s'attend à ce que les différentes valeurs de la constante w pour les différents sous-systèmes soient entre elles dans des rapports entiers (Nottale 1996).

Dans la présente contribution, nous comparons les prédictions théoriques qui ont pu être faites "en aveugle" au début des années 90 avant même la découverte des objets concernés (petits corps de la ceinture de Kuiper et planètes extrasolaires) aux données d'observation récentes.

2. Système solaire

2.1. Sous-systèmes interne et externe

La prédiction théorique d'une distribution des demi-grands axes suivant deux lois en n^2 raccordées entre elles pour les sous-systèmes solaires internes et externes a été validée par les données d'observation.

Le sous-système interne (Mercure, Venus, la Terre et Mars ainsi que les petites planètes les plus massives de la ceinture entre Mars et Jupiter) est structuré suivant une constante $w_i = 144.7$ km/s. Comme il est lui-même le niveau fondamental du sous-système externe (Jupiter, Saturne, Uranus et Neptune, suivi par les objets de la ceinture de Kuiper commençant avec Pluton) et que son pic de probabilité coïncide avec la Terre qui est en $n_i = 5$, la constante structurant le système externe doit être donnée par $w_e = w_i/5$, ce qui est bien le cas.

Un tel modèle de formation par fragmentation hiérarchique permet, de plus, d'obtenir une compréhension de la distribution des masses des planètes des systèmes internes et externes (Nottale et al 1997). Partant de la masse de Jupiter qui domine fortement toutes les autres notre système solaire est presque un système double Soleil-Jupiter), dont la valeur et la distance sont contingentes (le pic de densité du disque initial varie d'un système planétaire à un autre) les rapports de masse des autres planètes sur celle de Jupiter peuvent être estimées de manière satisfaisante à partir de la fragmentation des orbitales schrödingériennes (Nottale et al. 1997).

2.2. Structures intra-mercurielles

Une des conséquences intéressantes de la nouvelle approche est sa capacité à faire des prédictions de structures non encore observées. Un des domaines ouverts de ce point de vue dans notre propre système solaire est la zone intra-mercurielle (distances inférieures à 0.4 UA : l'unité astronomique, UA, est la distance Terre-Soleil, soit 149.5 millions de kilomètres). Etant donné que Mercure correspond à l'état $n_i = 3$, et non pas au niveau fondamental, deux pics de probabilité supplémentaires sont attendus à proximité du Soleil, le niveau fondamental à 0.043 UA et le second niveau à 0.17 UA.

En ce qui concerne le premier, des observations systématiques en infrarouge de pics de poussière précisément à cette valeur de 0.043 UA (formant vraisemblablement des structures transitoires) au moment d'éclipses viennent soutenir son existence (Da Rocha et Nottale 2003). Quant au second niveau, des arguments dynamiques concernant les astéroïdes géocroiseurs (Evans et Tabachnik 1999) indiquent l'existence possible d'un anneau de petits corps autour du soleil entre 0.15 et 0.20 UA.

On peut aller plus loin et poursuivre le modèle de formation par fragmentation hiérarchique vers les petites échelles. Or, à partir de la constante du système solaire interne $w_i = 144.7 \pm 0.7$ km/s, on peut anticiper l'existence d'une nouvelle constante qui sera à nouveau dans un rapport entier avec celle-ci. Il est alors remarquable que la vitesse képlérienne au niveau du rayon du Soleil soit de 437.1 km/s, très proche de $w_i = 435$ km/s (ce qui correspond à une distance de 0.00465 UA). Ceci mène à la conjecture raisonnable, qu'en dernier recours, ce soit sur le rayon du Soleil lui-même que se construisent l'ensemble des structures et sous structures du système planétaire qui l'entoure. Ceci irait dans le sens des modèles standard de formation, dans lesquels l'étoile se forme d'abord, puis le système planétaire dans le potentiel képlérien créé par elle. De plus, que le Soleil lui-même puisse être décrit en partie par l'approche relativiste d'échelle, n'est pas inattendu : les équations qui régissent sa structure interne sont des équations hydrodynamiques du même type que la forme hydrodynamique de l'équation de Schrödinger macroquantique, à part le potentiel quantique additionnel. L'apparition d'une telle énergie potentielle supplémentaire à partir de la fractalité des trajectoires des particules internes au Soleil n'est pas exclue. On retrouverait alors les résultats de la théorie standard, avec en plus la possibilité de pics de probabilité pour les valeurs possibles du rayon des étoiles.

2.3. Structures trans-neptuniennes : la ceinture de Kuiper

En 1994, avant la découverte des objets de la ceinture de Kuiper et des exoplanètes, les développements et les prédictions théoriques utilisant les méthodes de la relativité d'échelle permettaient déjà d'écrire :

“Nous pouvons espérer que d'autres systèmes planétaires [que le nôtre] soient découverts dans les années à venir, et que des informations nouvelles soient obtenues dans le système solaire très lointain (ceinture de Kuiper, nuage cométaire de Oort, ...). A cet égard notre théorie est ré-

futable, car elle fait des prédictions précises concernant de telles observations dans un futur proche : on s'attend à ce que des [grandeurs] observables telles que la distribution des excentricités, de la masse, du moment angulaire, des positions préférentielles des planètes et astéroïdes, [...] soient dans ce cadre de travail des structures universelles partagées par tous les systèmes planétaires.”

Depuis, de nombreux objets ont été découverts dans la ceinture de Kuiper, qui ont changé notre vue du système solaire lointain – au point que Pluton a perdu son statut de planète principale, devenant une des planètes naines de cette ceinture – et permis de valider certaines de ces prédictions théoriques.

La première prédiction qui a pu être effectuée (Nottale 1993) consistait à prolonger la loi en n^2 du système solaire externe au-delà de Neptune ($n_e = 5$). Le pic suivant ($n_e = 6$) à 40 UA correspond à la distance de Pluton mais aussi à l'essentiel des objets de la ceinture de Kuiper (KBOs). Au-delà, il existe des objets d'orbites plus excentriques de la ceinture de Kuiper diffusée (SKBOs), dont le pic principal des demi-grands axes est à 55 UA, précisément la valeur prédite pour le pic de probabilité en $n_e = 7$ (Nottale 1993, 1994). Le pic suivant est prédit à 70 UA, alors que la planète naine Eris, dont la masse supérieure à celle de Pluton a contribué à changer la nomenclature, a été découverte avec un demi-grand axe de 68 UA, valeur pour laquelle la distribution observée montre également un pic (Figure 1). Noter que dans cette analyse, de même que pour les objets de la ceinture entre Mars et Jupiter, il faut aussi tenir compte des trous (et des pics) provoqués dans la distribution par les résonances orbitales avec les grandes planètes, en particulier Neptune. L'accord entre les pics observés et les pics prévus se maintient depuis les premières observations et atteint aujourd'hui un haut niveau de signification statistique (la probabilité d'obtenir un tel résultat par hasard est de 2×10^{-4}).

Encore au-delà, c'est un nouveau niveau hiérarchique d'organisation du système solaire qui se présente. En effet, si l'on considère maintenant la population des SKBOs distants, on peut considérer leur pic principal à 55 UA ($n_e = 7$ du point de vue du système solaire externe) comme nouveau niveau fondamental. A partir de ce niveau $n_{SKB} = 1$, une nouvelle loi de distance en n^2 est attendue, qui permet de prédire pour les demi-grands axes d'objets très distants des valeurs préférentielles 228, 513, 912, 1425, 2052 UA, etc.. (Galopeau et al 2004). Une nouvelle fois, les données d'observation sont venues valider cette prédiction de manière remarquable. En particulier, la découverte en 2004 de la planète naine Sedna à une distance de 500 UA a été une première manifestation du pic $n_{SKB} = 3$, mais elle avait été en fait précédée par la découverte d'objets autour de 220 UA correspondant à $n_{SKB} = 2$. Aujourd'hui ces pics sont remplis par plusieurs objets, et un premier objet autour de 1000 UA correspondant à $n_{SKB} = 4$ (2006 SQ372) vient d'être découvert (Figure 2).

Ainsi, depuis les sungrazers ($w = 9 \times 144$ km/s), en passant par le sous-système intramercuriel ($w = 3 \times 144$ km/s), puis le sous-système interne des planètes telluriques se poursuivant dans la ceinture entre Mars et Jupiter ($w = 144$ km/s), puis le sous-système externe des planètes géantes se poursuivant dans la ceinture

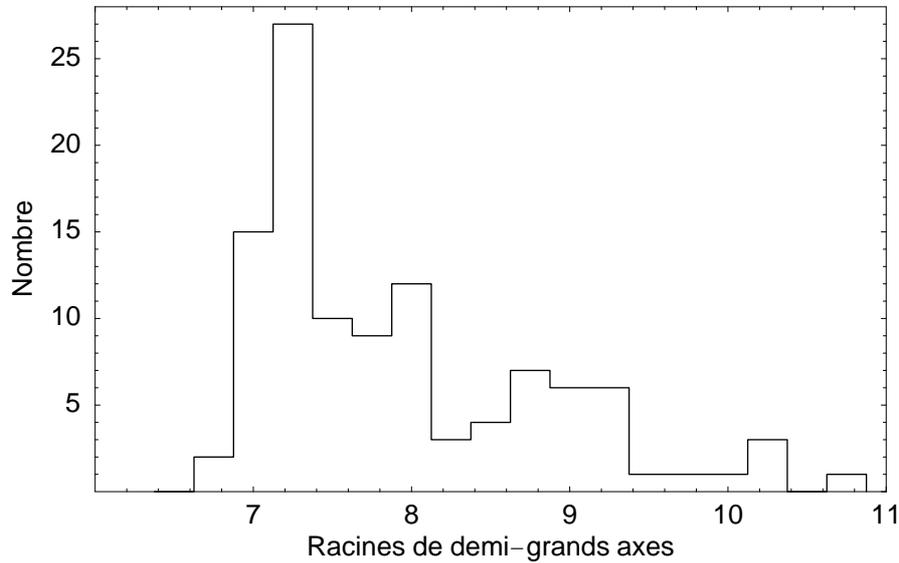


Figure 1. Distribution observées (données Septembre 2009, IAU Minor Planet Center) des racines carrées des demi-grands axes ($\sqrt{a}/1.115$) des orbites des objets de la ceinture de Kuiper diffusée (SKBOs), comparée aux prédictions théoriques des pics de probabilité (nombres entiers de 7 à 11) du système solaire externe.

de Kuiper ($w = 144/5$ km/s), et enfin les objets de la ceinture de Kuiper distante ($w = 144/(5 \times 7)$ km/s), ce sont cinq niveaux de structuration hiérarchique emboîtés les uns dans les autres qui peuvent être identifiés dans notre système solaire, tous suivant une loi en n^2 . Les rapports d'échelle entre les constantes de structure de ces niveaux sont respectivement de 3, 3, 5 et 7, ce qui signifie que les rapports d'échelle de distance sont au carré, soit 9, 9, 25, et 49. Autrement dit, entre les plus petites structures des comètes "sungrazers" et les plus grandes des SKBOs distants, c'est un facteur de l'ordre de 100.000 qui se manifeste dans l'organisation de notre propre système solaire.

3. Systèmes planétaires extrasolaires

La découverte depuis 1995 de systèmes planétaires autour d'étoiles autres que le soleil a permis de mettre à l'épreuve de manière remarquable les prédictions théoriques de l'approche relativiste d'échelle à la formation de ces systèmes.

En particulier, une des conséquences majeures de l'application aux planètes du système solaire interne de la loi en n^2 prédite pour les demi-grands axes a été, comme

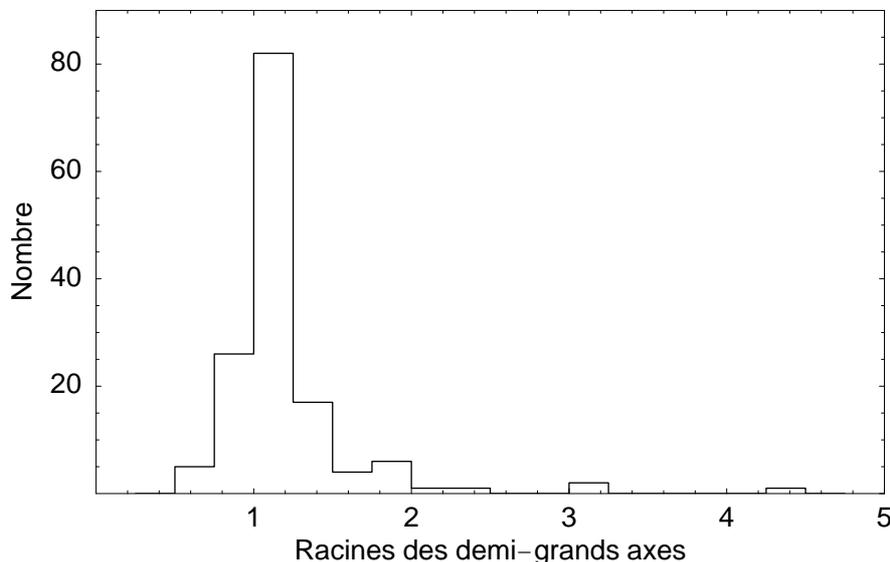


Figure 2. *Distribution observée (données Septembre 2009, IAU Minor Planet Center) des valeurs des racines carrées des demi-grands axes ramenés au pic principal $\sqrt{a/55}$ (en UA), pour les objets de la ceinture de Kuiper diffusée. La théorie prévoit des pics de densité pour des valeurs entières de la variable, ce que les observations confirment.*

nous l'avons vu, le fait que Mercure correspondait à $n_i = 3$, et que deux pics de probabilité supplémentaires étaient donc attendus à $0.043 \text{ UA}/M_*$ et $0.17 \text{ UA}/M_*$.

Dans notre propre système planétaire, la distribution de la matière est telle que seule une faible masse peut venir éventuellement actualiser ces pics de probabilité (passant ainsi d'une densité de probabilité à une densité de matière). Malgré ce fait (contingent), nous avons apporté des indices d'existence possible de ces pics à travers des petits corps et des poussières transitoires. Mais le pic de matière de notre système à la distance de Jupiter n'a pas de raison d'être universel. On peut ainsi s'attendre à ce que ces deux pics de probabilité, marginaux dans notre propre système, soient par contre réalisés dans d'autres systèmes, tout particulièrement le niveau fondamental à $0.043 \text{ UA}/M_\odot$ (Nottale 1993, 1994).

Il est ainsi remarquable que les premières planètes découvertes, en particulier la première, 51 Peg (par Mayor et Queloz en 1995), l'aient été précisément à cette distance (Nottale 1996, Nottale et al 2000). Dans les données récentes (Fig. 3), qui concernent plus de 300 exoplanètes, ce sont plus de 70 planètes qui s'accumulent maintenant dans ce pic fondamental (Nottale 2009).

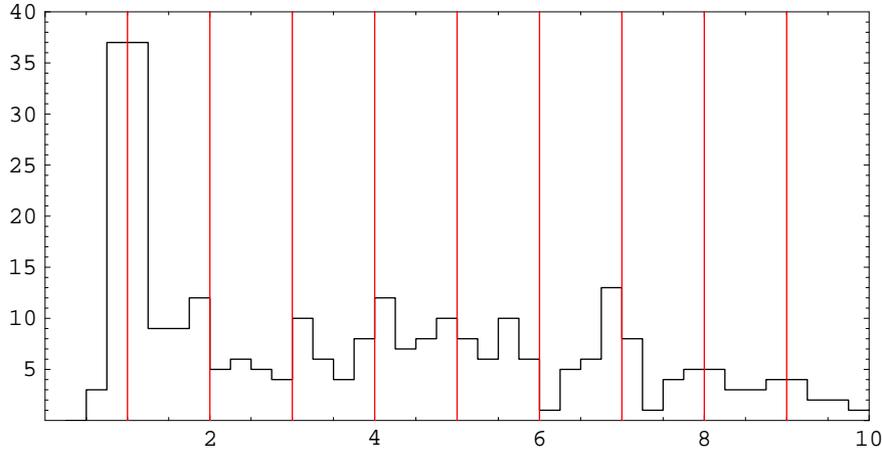


Figure 3. Distribution observée des demi-grands axes des orbites des planètes du système solaire interne et des planètes extrasolaires, comparée à la prédiction théorique de pics de probabilités pour des valeurs entières de la variable $4.83(a/M)^{1/2}$ (lignes verticales), où a est le demi-grand axe et M la masse de l'étoile (données 2008, 301 planètes, Schneider 2009). Le pic principal en $n = 1$ (niveau fondamental prédit à $0.043 \text{ UA}/M_{\odot}$), contient en tout 74 planètes. La probabilité d'obtenir un tel accord par hasard, calculée en comparant le nombre de planètes dans les pics et dans les creux, est égale à 10^{-7} (équivalent de 5σ).

De telles planètes, appelées “Jupiters chauds” du fait de leur masse et de leur proximité à leur étoile, ne se forment sans doute pas si près mais plus loin de l'étoile et migrent ensuite du fait de l'interaction avec le disque protoplanétaire. Une telle variation des demi-grands axes (et donc de l'énergie), était considérée comme interdite avant la découverte de ces objets qui a depuis imposé ces théories de “migration”. Le modèle de formation relativiste d'échelle participe clairement de ce type de théories, puisqu'il est précisément fondé sur l'interaction gravitationnelle entre les différents constituants du disque protoplanétaire et sur la perte d'éléments orbitaux déterministes. Le problème des modèles de migration classiques est néanmoins qu'on ne voit pas ce qui empêche les planètes de migrer jusqu'à tomber éventuellement sur l'étoile, ni pourquoi elles s'accumuleraient dans des zones précises ainsi qu'observées. Par contre, dans le cadre d'une migration contrainte par une équation de Schrödinger gravitationnelle, celle-ci se fait en accord avec les pics de probabilité de la loi en n^2 .

Le nombre d'exoplanètes est aujourd'hui suffisant pour effectuer une analyse par spectre de puissance de leur distribution. Cette méthode d'analyse (Fig. 4), qui permet de détecter des périodicités dans une distribution de points, confirme le résultat obtenu à partir de l'analyse directe de la distribution des demi-grands axes des exoplanètes. La très courte période de ces structures (en terme de la variable $4.83\sqrt{a/M}$, où a

et M sont en unités du système solaire – UA et masse solaire) exclut qu'elle soit une conséquence des biais éventuels de la distribution observée, qui impliquent des fluctuations à de plus grandes échelles. Une analyse détaillée de ce point sera présentée dans une publication à venir.

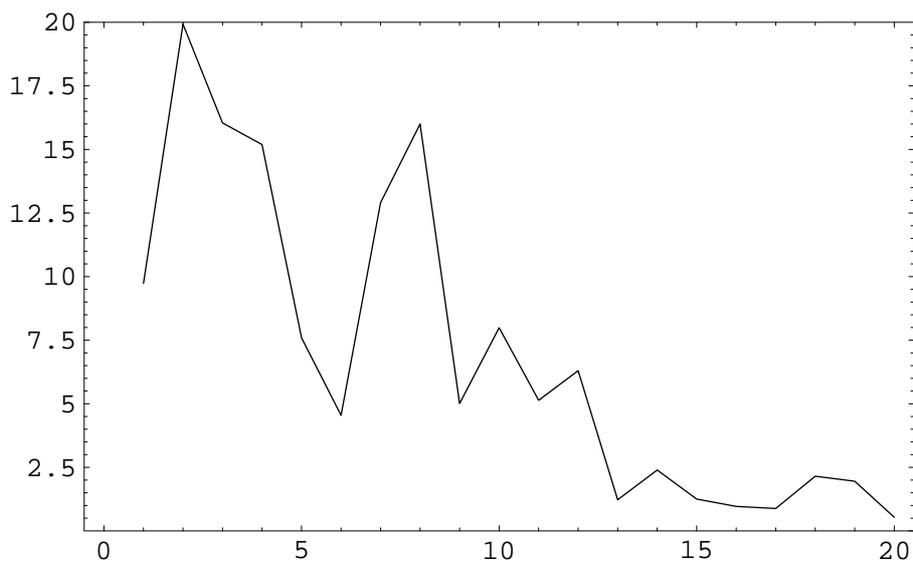


Figure 4. Spectre de puissance de la distribution observée des racines carrées des demi-grands axes des exoplanètes (normalisées à la masse de leur étoile), sur l'intervalle $4.83\sqrt{a/M} = 0.7$ à 8.7 (données 2008, 301 planètes, Schneider 2009). On trouve un pic hautement significatif en $k = 8$ (puissance $p = 16$, ce qui, pour un pic prévu à l'avance comme c'est le cas ici, correspond à une probabilité de 1.1×10^{-7}). Ce pic du spectre de puissance indique que la variable varie avec une périodicité de 1 (voir Fig. 3), ainsi qu'on s'y attend théoriquement.

4. Système d'exoplanètes autour du pulsar PSR 1257+12

Un système de trois planètes a été découvert par Wolszczan (1992, 1994) autour du pulsar PSR B1257+12. Ce système, bien que son étoile ne soit pas de type solaire, mérite une étude particulière. En effet, ces planètes résultent sans doute d'un disque secondaire formé autour de l'étoile à neutron après l'explosion de la supernova qui lui a donné naissance. L'approche relativiste d'échelle s'applique tout aussi bien à cette situation (Nottale 1996, 1998). Il s'agit même d'un cas d'école, car la très petite masse des planètes (quelques masses terrestres pour les deux principales et la masse de la lune pour la troisième), implique que l'approximation utilisée, où l'on n'a tenu compte que du potentiel de l'étoile mais pas de l'auto-potentiel du disque, est très bien

vérifiée dans ce cas. Les effets mutuels entre les sous-structures du disque, puis entre les planètes qui se sont formées à partir de ces sous-structures, seront donc minimales (ces derniers ont d'ailleurs pu être observés à leur valeur prévue), et l'on peut ainsi s'attendre, si le modèle est correct, à un accord entre prédiction théorique et observations de grande précision.

Grâce à ces propriétés, on peut pousser plus loin le modèle de formation et définir de manière plus précise les valeurs possibles attendues des éléments orbitaux des planètes. La loi en n^2 correspond aux pics de probabilité des distributions de densité, et s'applique ainsi en moyenne même quand il y a des perturbations à ajouter à ce modèle simple, ce qui est le cas des systèmes étudiés jusqu'ici. Par contre, dans le cas où une planète se forme à partir d'un ensemble de planétésimaux qui remplissent une orbitale donnée, sans perturbation importante excédentaire, la loi de conservation du centre de gravité implique une correction à la loi de distance en n^2 , car les distributions ne sont pas symétriques. La moyenne de la distribution, dans le cas d'excentricité nulle, est en $n^2 + n/2$, c'est-à-dire $n^2(1 + 1/2n)$, ce qui donne par exemple une correction de 10% pour $n = 5$.

La comparaison avec les valeurs observées des demi-grands axes donne effectivement des résultats remarquables par leur précision (Nottale 1996, 1998). L'accord avec la loi en n^2 est déjà extrêmement satisfaisant : les trois planètes A, B et C correspondent respectivement à $n = 5, 7$ et 8 (Fig. 5), et les rapports de périodes observés donnent $(P_B/P_C)^{1/3} = 0.878$, à comparer à $7/8 = 0.875$ et $(P_A/P_C)^{1/3} = 0.636$ à comparer à $5/8 = 0.625$. L'accord est de l'ordre de 1% et même de 0.3% pour le couple BC.

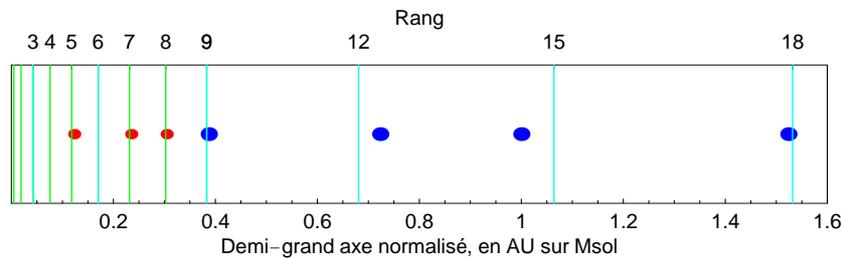


Figure 5. Système des trois planètes autour du pulsar PSR1257+12 (points rouges) comparé au système solaire interne (Mercure, Venus, Terre, et Mars, points bleus) et à la loi de distance en n^2 . On a porté les valeurs de a/M , où a est le demi-grand axe et M la masse de l'étoile, pour une masse du pulsar de $1.54 M_{\odot}$. La constante de structure du système solaire interne vaut 144 km/s et celle du système PSR1257+12 $3 \times 144 = 432 \text{ km/s}$, comme pour le système solaire intramercuriel. On a porté en haut de la figure les rangs des planètes calculés sur cette dernière base.

Mais si l'on passe à la loi en $n^2 + n/2$, la précision de l'accord devient étonnante. Les périodes mesurées par Konacki et Wolczzan (2003) étant $P_A = (25.262 \pm 0.003)$ jours, $P_B = (66.5419 \pm 0.0001)$ jours et $P_C = (98.2114 \pm 0.0002)$ jours, on trouve :
 $(P_B/P_C)^{1/3} = 0.8783$, à comparer à $(52.5/68)^{1/2} = 0.8786$,
 $(P_A/P_C)^{1/3} = 0.63597$, à comparer à $(27.5/68)^{1/2} = 0.63593$.

L'accord relatif est cette fois au niveau de 3×10^{-4} et de 6×10^{-5} (Fig. 6). Il est rare de trouver en astronomie une telle précision dans la comparaison entre prédiction théorique et données d'observation.

4.1. Amélioration de l'accord prédictions-observations

Un fait qui mérite d'être souligné est que, avec les valeurs mesurées des périodes jusqu'en 2003, l'accord était de quelques 10^{-4} pour les deux rapports. Mais une nouvelle détermination prenant en compte la continuation des observations, ainsi que les effets mutuels entre planètes B et C, a changé les périodes de manière importante (Konacki et al 2003). On aurait pu s'attendre à une dégradation de la précision avec un tel changement.

Bien au contraire, la précision sur le rapport BC est restée la même, mais celle sur le rapport AC a été améliorée d'un facteur 12 au point d'atteindre les barres d'erreur observationnelles. En effet, sur la base de la planète C supposée placée exactement en $n_C = 8$, les rapports de périodes observés conduisent à un rang effectif $n_A = 5.00028 \pm 0.00020$ pour la planète A (soit un écart relatif de 5×10^{-5}) et $n_B = 6.997 \pm 0.00001$ pour la planète B (les barres d'erreur viennent des incertitudes observationnelles sur les déterminations des périodes).

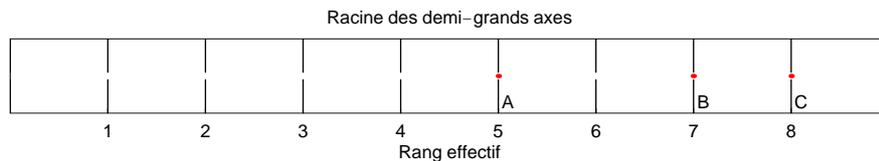


Figure 6. Comparaison entre les positions possibles prédites (traits) et les positions observées (points) des trois planètes autour du pulsar PSR 1257+12. On a porté ici le rang effectif donné par la solution de l'équation $a_n = (GM/w_0^2)(n^2 + n/2)$, loi obtenue par conservation du centre de gravité de la distribution de masse des "orbitales" de la nébuleuse protoplanétaire (ce qui revient pratiquement à la racine des demi-grands axes normalisés $-1/4$). L'accord entre prédictions théoriques et valeurs observées est si précis qu'il faudrait faire un zoom d'un facteur 1000 pour voir des écarts entre ces valeurs.

4.2. Effets mutuels de quasi-résonance

La prise en compte des effets mutuels des planètes B et C (qui sont déjà intervenus dans l'amélioration de la détermination des paramètres orbitaux par Konacki et Wolszczan 2003) permet d'améliorer encore ce résultat et de comparer les données à une nouvelle prédiction théorique (Nottale 2008, 2011).

En fait, ces effets sont de trois sortes : conjonction, précession et quasi-résonance, comme le montrent les équations du mouvement mutuel écrites par Malhotra (1993). Le rapport prédit par le modèle relativiste d'échelle des périodes des planètes C et B (pour $n = 8$ et 7) est de 1.474 et le rapport observé de 1.476, ce qui est proche de 1.5, et donc d'une résonance 3 : 2 dans laquelle les planètes se retrouvent dans la même configuration quand l'une fait deux tours et l'autre trois. En ce qui concerne les demi-grands axes, on peut montrer, aussi bien par une intégration numérique (Goździewski et al. 2005), qu'analytique (Nottale 2008), que les effets de précession et de quasi-résonance ne jouent aucun rôle, et qu'ils sont remarquablement stables sur le long terme. L'intégration analytique permet en effet d'établir l'existence de deux intégrales premières (relations conservatives) des équations du mouvement mutuel (sans les termes de conjonction) qui s'écrivent (Nottale 2008, 2011) :

$$3m_B a_B^{1/2} + 2m_C a_C^{1/2} = Q_a = \text{cst}, \quad [3]$$

$$m_B a_B^{1/2} e_B^2 + m_C a_C^{1/2} e_C^2 = Q_e = \text{cst}, \quad [4]$$

entre masses m , demi-grands axes a et excentricités e . Ces relations impliquent un fort couplage entre les deux planètes, en accord avec les résultats numériques de Goździewski et al. (2005). En particulier, leurs excentricités oscillent sur le long terme en exacte opposition.

4.3. Demi-grands axes

Puis il est possible d'intégrer analytiquement (Nottale 2008) les équations du mouvement en terme de relations entre demi-grands axes et excentricités. On trouve, pour de petites excentricités, ce qui est le cas des planètes autour de PSR1257+12 ($e_A = 0$, $e_B = 0.0186 \pm 0.0002$, $e_C = 0.0252 \pm 0.0003$)

$$\frac{a_B}{a_{B*}} = 1 - 2(e_B^2 + K e_C^2). \quad [5]$$

$$\frac{a_C}{a_{C*}} = 1 + \frac{3}{K} (e_B^2 + K e_C^2), \quad [6]$$

où a_{B*} et a_{C*} sont des valeurs de référence correspondant à $e_B = e_C = 0$ et où la constante K est donné par

$$K = \frac{m_C}{m_B} \sqrt{\frac{a_C}{a_B}}. \quad [7]$$

Elle vaut $K = 1.03 \pm 0.10$ dans le cas des planètes B et C et n'est rien d'autre que la quantité conservative du mouvement à long terme Q_e ci-dessus (Eq. 4) à une constante près. Ces formules généralisent le résultat incomplet de Rasio et al. (1993). Elles ont pour conséquence la stabilité des demi-grands axes des planètes B et C du point de vue du mouvement à long terme, les effets mutuels ne portant que sur les excentricités.

Cela justifie la comparaison entre les prédictions théoriques qui concernent, strictement, la période de formation du système planétaire, et les données d'observation, qui s'appliquent au système actuel (environ un milliard d'années après sa formation).

Il reste néanmoins à prendre en compte l'effet de conjonction qui correspond aux rapprochements réguliers des deux planètes. Celui-ci implique une légère fluctuation des rapports des demi-grands axes effectifs (Fig. 7). Ce rapport, qui vaut en moyenne 0.99916 fois la valeur prédite (52.5/68), peut ainsi atteindre 0.9995 à son maximum. On s'est donc encore rapproché d'un nouveau facteur 2 de la valeur théorique attendue à la fin de la période de formation (Nottale 2008, 2011).

Or, cette valeur théorique est elle-même caractérisée par une certaine largeur, qui est précisément de cet ordre, due aux relations de Heisenberg qui s'appliquent également dans l'approche gravitationnelle macroquantique de la relativité d'échelle. En effet, comme toute solution d'équations de type quantique, la valeur prédite de l'énergie (et donc du demi-grand axe qui s'en déduit quand le système est redevenu classique) est accompagnée d'une "largeur de raie" donnée par les échelles de temps caractéristiques des fluctuations des solutions. Celle-ci peut être estimée, dans un modèle de formation plus complet, à travers l'évolution des paquets d'onde qui vont se former dans le disque de manière préalable à la formation des planètes (Nottale 2010, en préparation). De plus, un tel modèle de paquets d'onde permet de justifier pleinement la loi finale en $n^2 + n/2$ pour les demi-grands axes. On trouve une largeur relative, traduite en terme du nombre quantique principal n , donnée par $\delta n_B/n_B = 2.5 \times 10^{-4}$, du même ordre de grandeur que l'écart résiduel entre prédiction théorique et valeur observationnelle, $\delta n_B/n_B = 2 \times 10^{-4}$. On arrive donc finalement à un accord très précis et satisfaisant entre modèle théorique et observations pour les demi-grands axes (et donc les périodes à travers la troisième loi de Kepler).

4.4. *Excentricités*

En ce qui concerne les excentricités, les effets de précession et de quasi-résonance impliquent une importante variation relative d'un facteur presque 3 : on trouve, aussi bien dans l'intégration numérique (Goździewski et al., 2005) qu'analytique (Nottale 2008) que les excentricités des deux planètes varient en opposition entre environ 0.0125 et 0.0285 sur une période d'à peu près 6.000 ans. Cela n'aurait donc pas de sens de prédire une valeur précise de l'excentricité. Par contre, on a vu qu'au sein de cette variation, il existe une quantité conservative $Q = e_B^2 + Ke_C^2$. Pour le système considéré, on trouve pour cet invariant $Q(\text{obs}) = 0.001005 \pm 0.000018$.

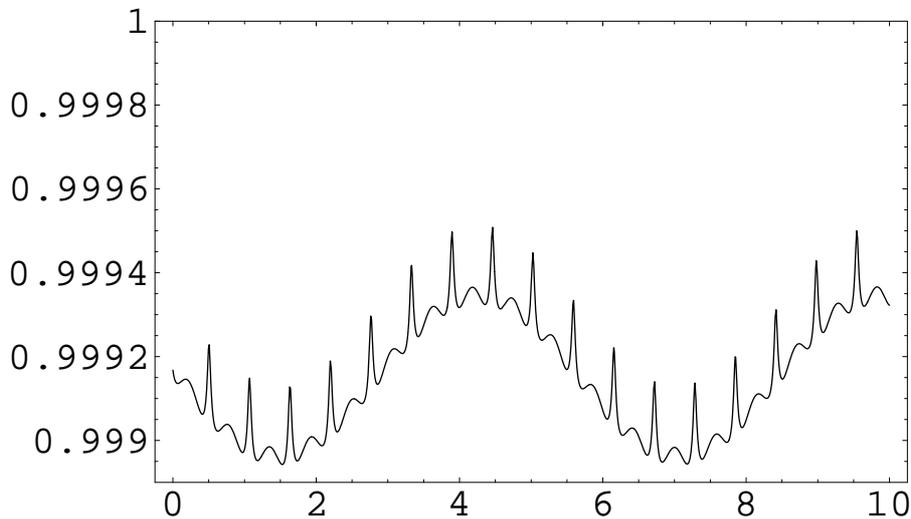


Figure 7. Variation périodique au cours du temps (tracée ici sur 10 ans) du rapport des demi-grands axes des planètes B et C du système planétaire autour de PSR 1257+12, rapporté au rapport prévu, $a_B/a_C = (n_B^2 + n_B/2)/(n_C^2 + n_C/2) = 52.5/68$ (pour $n_B = 7$ et $n_C = 8$). La valeur moyenne de ce rapport, prise ici comme condition initiale, est de 0.999168(2). On voit que la prise en compte de l'effet de conjonction implique que le système passe à 0.0005 de la valeur prévue d'après le modèle de formation (c'est-à-dire $68a_B/52.5a_C = 1$). L'écart résiduel, de 0.00025 sur les nombres quantiques, est de l'ordre de grandeur de la "largeur de raie" attendue d'après la prédiction théorique macroquantique.

Là encore, un modèle de formation plus poussé permet de rendre compte d'une telle valeur comme l'une de celles attendues à partir de l'existence d'un régime "schrödingerien" pendant cette formation. En effet, contrairement à la mécanique quantique standard, appliquée aux atomes, où la fonction d'onde ne décrit qu'une amplitude de probabilité de présence de l'électron, ici cette densité de probabilité s'applique de manière individuelle à un grand nombre de planétésimaux et se traduit donc en une densité de matière pour leur ensemble. Mais il faut alors ajouter les effets d'autogravitation qui impliquent une contraction des sous-structures du disque sur elles-mêmes.

De telles sous-structures doivent rester, après leur contraction, solutions d'une équation de Schrödinger tout en gardant la même valeur moyenne, ce qui se traduit par un facteur d'échelle entier sur la constante de structure et donc aussi sur les nombres quantiques (c'est une nouvelle manifestation de l'invariance d'échelle de la gravitation, combinée avec une théorie macroquantique). Le résultat est qu'on s'attend à voir les rangs $n_B = 7$ et $n_C = 8$ se transformer en $(n_B)_f = 7f$ et $(n_C)_f = 8f$, avec

f entier croissant au cours du temps (les orbitales correspondantes deviennent quasi-classiques et de plus en plus étroites relativement).

La valeur la plus probable pour les excentricités est 0, ce qui est vérifié en première approximation (elles valent 0.02 ± 0.0075). Mais on peut à un niveau de précision supérieur considérer le premier état excité, donné par $1/n$ (nous avons vu qu'on prévoyait des excentricités en k/n avec k entier), c'est à dire ici $1/7f$ et $1/8f$. Il est, à cet égard, intéressant de constater que pour $f = 6$, ce qui correspond précisément au début de séparation spatiale des orbitales, on trouve $Q(\text{pred}) = (1/42)^2 + K(1/48)^2 = 0.001017$, en bon accord avec la valeur observée 0.001005 ± 0.000018 aux incertitudes près. Une telle proposition, peut être mise à l'épreuve par des observations futures, puisqu'elle permet une estimation théorique des masses $m_C/m_B = 0.965 \pm 0.058$, plus précise que leur détermination actuelle.

Notons aussi que l'accord entre prédictions théoriques et observations s'étend à la constante de structure elle-même. En effet, en prenant pour masse du pulsar la masse standard 1.4 ± 0.1 masse solaire, on obtient pour cette constante $w = (2.96 \pm 0.07) \times 144$ km/s, c'est-à-dire une valeur qui englobe dans sa barre d'erreur la constante de structure "solaire" $w_\odot = 3 \times 144 = 432$ km/s. L'ensemble de ces résultats combinés atteint une très haute signification statistique : la probabilité de les obtenir par hasard est inférieure à 10^{-8} .

Ces résultats permettent enfin de faire des prédictions nouvelles sur la présence d'éventuelles planètes ou petits corps supplémentaires autour du pulsar (des objets de la taille d'astéroïdes pourraient être détectés grâce à la précision des mesures de sa fréquence). Par exemple, les périodes prédites pour $n = 1, 2$ et 3 sont respectivement de 0.322, 1.958 et 5.96 jours. Une détection marginale (avec une probabilité de 10^{-3}) d'une planète de 0.03 masse terrestre avec une période de 2.2 jours, qui pourrait s'accorder avec $n = 2$, a été proposée (Nottale 2006) à partir d'observations journalières de Wolszczan (2000) sur un mois au radio-télescope d'Arecibo.

5. Conclusion

Nous avons présenté dans cette contribution un certain nombre de mises à jour de la comparaison entre les données d'observations et les prédictions théoriques issues du modèle relativiste d'échelle de formation des systèmes planétaires. Trois effets principaux ont été ré-analysés, correspondant à trois prédictions théoriques faites "en aveugle", avant même non seulement l'identification des structures prédites, mais la découverte des objets eux-mêmes : la distribution des objets de la ceinture de Kuiper dans notre système solaire, celle des planètes extra-solaires autour de leurs étoiles, pour finir avec l'analyse de la structure détaillée du système de trois planètes autour du pulsar PSR1257+12. Dans tous les cas les données d'observation récentes confirment l'accord statistique entre structures prédites théoriquement et structures observées, de manière hautement significative et avec une signification statistique qui augmente au cours du temps.

6. Bibliographie

- Agnese A.G., Festa R., 1997, *Phys. Lett. A* **227**, 165.
- Da Rocha D. & Nottale, L., 2003, *Chaos, Solitons and Fractals*, 16, 565 (arXiv : astro-ph/0310036).
- Evans N.W. & Tabachnik S., 1999, *Nature* **399**, 41.
- Galopeau P., Nottale L., Ceccolini D., Da Rocha D., Schumacher G. & Tran-Minh N., 2004, in *Scientific Highlights 2004, Proceedings of the Journées de la SF2A*, Paris 14-18 June 2004, F. Combes, D. Barret, T. Contini, F. Meynadier & L. Pagani (eds.), EDP Sciences, p. 75.
- Gozdziewski K., Konacki M. & Wolszczan A., 2005, *Ap. J.* **619**, 1084.
- IAU Minor Planet Center, 2009, *List Of Centaurs and Scattered-Disk Objects*, <http://www.cfa.harvard.edu/iau/lists/Centaurs.html>
- Konacki M. & Wolszczan A., 2003, *Ap. J. Lett.* **591**, L147.
- Malhotra R., 1993, *Ap. J.* **407**, 266.
- Mayor M. & Queloz D., 1995, *Nature* **378**, 355.
- Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore.
- Nottale, L., 1994, in *Chaos and diffusion in Hamiltonian systems*, Proceedings of the fourth workshop in Astronomy and Astrophysics of Chamonix (France), 7-12 February 1994, Ed. D. Benest et C. Froeschlé, (Editions Frontières), pp. 173-198.
- Nottale, L., 1996, *Astron. Astrophys. Lett.* **315**, L9.
- Nottale, L., Schumacher, G., Gay, J., 1997, *Astron. Astrophys.* **322**, 1018.
- Nottale, L., 1998, *Chaos, Solitons and Fractals* **9**, 1043.
- Nottale, L., Schumacher, G., & Lefèvre, E.T., 2000, *Astron. Astrophys.*, **361**, 379.
- Nottale L., 2006, in "Workshop Pulsars, Théories et Observations", 16 et 17 Janvier 2006, Institut d'Astrophysique de Paris.
<http://lpce.cnrs-orleans.fr/~pulsar/PSRworkshop/Talks/L.Nottale.ppt>
- Nottale L., 2008, in "Workshop Pulsars, Théories et Observations", 24-26 Novembre 2008, Observatoire de Paris.
<http://lpce.cnrs-orleans.fr/~pulsar/PSRworkshop/workshop2008/Nottale.pdf>
- Nottale L., 2009, in Proceedings of First International Conference on the Evolution and Development of the Universe, 8 - 9 October 2008, ENS, Paris, France, *Foundations of Science* **15**, 101 (arXiv : 0812.3857).
- Nottale L., 2011, *Scale Relativity and Fractal Space-Time : a New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*, Imperial College Press, London, 762 p.
- Rasio F.A., Nicholson P.D., Shapiro S.L. & Teukolsky S.A., 1993, in "Planets around pulsars", *ASP Conference Series* **36**, 107.
- Schneider J., 2009, *The Extrasolar Planets Encyclopaedia*, <http://exoplanet.eu/catalog.php>
- Wolszczan A. & Frail D.A., 1992, *Nature* **355**, 145.
- Wolszczan A., 1994, *Science* **264**, 538.
- Wolszczan A., Hoffman I.M., Konacki M., Anderson S.B. & Xilouris K.M., 2000, *Ap. J. Lett.* **540**, L41.