
Analyse en relativité d'échelle du bassin versant du Gardon (Gard, France)

Étude de la variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude et de l'échelle

Laurent Nottale¹, Philippe Martin², Maxime Forriez²

1. LUTH, UMR 8102 CNRS, Observatoire de Paris-Meudon et Université Paris 7,
5 place Janssen, 92195 Meudon Cedex

laurent.nottale@obspm.fr

2. Université d'Avignon, UMR ESPACE 6012 du CNRS, 74 rue L. Pasteur, Case 17,
84029 Avignon Cedex

philippe.martin@univ-avignon.fr, maxime.forriez@etd.
univ-avignon.fr

ABSTRACT. Level curves higher than 100 m of the Gardon basin are analysed using scale relativity tools. These curves depend explicitly on scale (box counting method) and altitude. This dependence is solution of a partial derivative equation (in terms of scale and position). Then the descriptions in terms of scale invariance (constant fractal dimension D_F) are generalized to scale covariance (variable D_F , transition from scale-dependent to scale-independent regimes). This method accounts for the parabolic variation of D_F in function of altitude. Hence, when $D_F = 1$, the derived altitude is -120 m, which is precisely the Wurmian regressive level.

RÉSUMÉ. Des courbes de niveau (> 100 m) du Gardon sont analysées avec les outils de la relativité d'échelle. Ces courbes dépendent explicitement de l'échelle (méthode de comptage de boîtes) et de l'altitude. Cette dépendance est solution d'une équation aux dérivées partielles (en échelle et en position). Les descriptions en termes d'invariance d'échelle (dimension fractale D_F constante) sont ainsi généralisées en « covariance d'échelle » (D_F variable ; transitions entre régimes dépendant et indépendant de l'échelle). Cette méthode rend compte de la variation parabolique des D_F en fonction de l'altitude. Ainsi lorsque $D_F = 1$, l'altitude calculée est de -120 m, ce qui est le niveau régressif wurmien.

KEYWORDS: scales, relativity, geography, fractals, catchment basin.

MOTS-CLÉS: échelles, relativité, géographie, fractals, bassin versant.

DOI:10.3166/RIG.22.103-134 © 2012 Lavoisier

1. Introduction

Traditionnellement, la géomorphologie a pour projet de comprendre l'origine des reliefs déployés à la surface de la Terre (ou d'autres planètes) qu'ils soient continentaux ou marins. Pour ce faire, elle utilise essentiellement une approche chronologique fondée sur des pas de temps qui sont ceux de la géologie (géomorphologie structurale), des changements climatiques (géomorphologie climatique) et de la cinétique des réactions chimiques et/ou physiques (géomorphologie dynamique), voire ceux de l'histoire (dynamique anthropique, géoarchéologie).

Sans être totalement absente, l'approche spatiale (morphométrie, analyse spatiale) est aujourd'hui secondaire du simple fait que les causalités explicatives des reliefs ne sont pas pensées comme, explicitement, spatiales, et encore moins comme étant scalaires et géométriques, mais comme étant liées aux forces analysées en géodynamique interne (mouvement tectonique) et à celles mesurables dans le cadre de la géodynamique externe (érosion). Or ces causalités qui renvoient les déterminants de structures spatiales dans des sciences connexes à la géographie, rendent caduc son projet et la vide pour partie de son utilité, ce qui a conduit historiquement, et fort logiquement de ce point de vue, au basculement progressif de pans entiers de la géographie physique en sciences de la Terre. Or la logique fondamentale de ces disciplines (de la géologie en particulier) est celle du temps et pas celle de l'espace. Par conséquent, elles ne peuvent prendre en compte les questions essentielles de la géographie qui sont celles du « où », du « pourquoi là », de savoir pourquoi il y a quelque chose de particulier et pas rien de spécifique ici, des rapports de position et des rapports scalaires. Dans cette perspective, la difficulté est de faire exister la géographie et son projet en montrant qu'il est possible d'établir un discours scientifique sur ces questions en développant un cadre théorique et formel d'essence géométrique décrivant les rapports de position et les rapports scalaires – desquels découlent les autres questions – de l'interface terrestre, c'est-à-dire les formes.

La difficulté principale est donc de rendre compte formellement, dans le cadre d'une épistémologie positiviste et réaliste, de l'irrégularité fort variable des reliefs, c'est-à-dire de leur(s) logique(s) géométrique(s). Or cela passe par une compréhension profonde des rapports scalaires constitutifs de ces reliefs pour des raisons méthodologiques et de modélisation. Cette intelligibilité ne peut être que géométrique et doit donc s'inscrire dans un cadre conceptuel adapté qui est d'une part celui de la géométrie fractale et d'autre part celui de la relativité d'échelle (Nottale, 1993, 2011). Cette façon de voir les choses postule donc, qu'à côté des causes matérielles et efficaces explicatives des reliefs nous devons aussi penser une causalité structurelle de nature formelle, ce qui nécessite d'une part d'explorer les rapports scalaires puis, d'autre part, de ressaisir ces situations expérimentales dans le cadre d'une théorie déductive principielle.

La mesure de la terre est aussi ancienne que la géographie, et la morphométrie, appliquée aux formes du relief, n'est certainement pas une idée neuve. Ainsi trouve-t-on sous la plume d'H. Baulig en 1959 la remarque suivante : « [...] on peut aussi,

dans une certaine mesure, exprimer mathématiquement les propriétés d'une figure irrégulière en la comparant à une figure idéale convenablement choisie [...]. La différence entre ces longueurs, ou mieux leur rapport sera un indice d'irrégularité [...] » (p. 386), qui nous montre que l'idée de mesure fait partie du corpus des géomorphologues et que la mesure n'est pour eux que relative (rapport). Nous en voulons pour preuve le fait qu'H. Baulig ajoute : « Pour une surface, la figure de référence pourra être un polygone, un cercle, une ellipse. Pour un volume, un prisme, une sphère, un cône, un demi-cylindre concave ou convexe » (1959, p. 386). Cette énumération de figures euclidiennes souligne le problème conceptuel auquel ont dû faire face les géomorphologues pendant des années. L'élément de référence ne peut évidemment pas être une forme régulière dont les limites sont des courbes observables. B. Mandelbrot l'a souvent répété lorsqu'il a « installé » l'idée de fractalité en science : « les nuages ne sont pas des sphères, les montagnes ne sont pas des cônes » (in Gleick, 1991, p. 126-127). Il manque donc, évidemment, au texte d'H. Baulig, le concept de fractalité bien qu'il aurait peut-être pu utiliser celui d'homothétie, au moins métaphoriquement, et donc sortir d'une vision monoscalaire qui sous-tend ses propos. C'est ainsi l'idée qu'une forme doit être comparée à elle-même (ou à une manifestation « dégradée » d'elle-même), mais à une autre échelle, qui fait défaut dans l'article d'H. Baulig et qui soutient toute la géométrie fractale, qui est à la base de toute approche formelle des morphologies et de la morphogénèse. En conséquence, ce qui est important ce n'est pas tant la forme en elle-même, la forme perçue, mais les rapports scalaires entre les manifestations à telle ou telle échelle, de telle ou telle morphologie qui peut, de surcroît, ne pas être significative au sens où elle serait reconnaissable, car associée par un sens à une signification, à un niveau de compréhension phénoménologique. C'est donc bien la possibilité de bâtir une autre géomorphologie, différente de celle évoquée en introduction que nous postulons ici. Ce faisant nous retrouvons une injonction poppérienne : « Tout accroissement de la clarté est une valeur intellectuelle par lui-même. Une plus grande exactitude, ou précision n'a en revanche qu'une valeur pragmatique comme moyen pour une fin déterminée [...]. La fécondité est le résultat non de la précision, mais la capacité de voir de nouveaux problèmes là où on n'en voyait pas auparavant, et leur trouver de nouvelles solutions » (Popper, 1989, p. 31-32).

Au cours des dernières années, ceci est devenu possible en s'appuyant sur la formalisation apportée par la géométrie fractale. Il est clair aujourd'hui que les reliefs sont des fractals (Mandelbrot, 1967 ; Evans, 1972 ; Rodriguez-Iturbe et Rinaldo, 1997 ; Turcotte, 1997 ; Evans et coll., 2003 ; Pelletier, 2008), tout comme le sont les réseaux de drainage (extension des lois de Horton). Dans ce phylum et à la suite de travaux exploratoires réalisés dans le sud de la France sur le massif karstique de la Sainte-Baume (Martin, 1991, 2000a et b), sur le Mont-Aigoual et les Cévennes (Martin, 2004, 2008, Martin *et al.*, 2008), dans le Lodévois (Martin, 2007a) et sur les Grands-Causse (Martin, 2008), il nous est apparu que l'étude formelle des reliefs devait aussi, et peut-être surtout, être envisagée dans le cadre d'une théorie d'essence fractale qui permette de proposer une explication spatiale et surtout scalaire des morphologies. L'objectif est donc ici de montrer que l'on peut envisager une géomorphologie théorique en se basant sur une description géométrique des reliefs, et

d'ailleurs de bien d'autres types de formes géographiques, ce qui permet en outre de proposer une base formelle commune à la géographie physique et à la géographie humaine spatiale et scalaire (Martin, 2004, 2008). Il y a là un point méthodologique et épistémologique fondamental qui s'initie dans une réflexion sur l'espace.

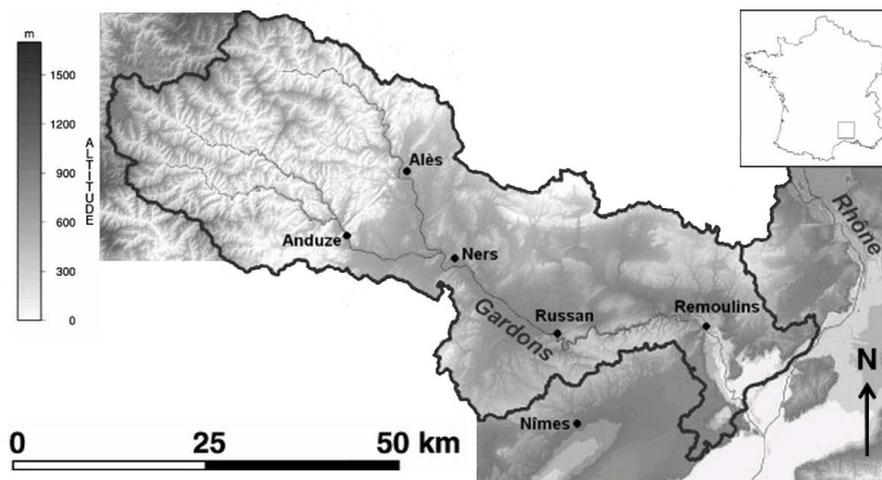


Figure 1. Modèle numérique du bassin versant du Gardon. L'étude concerne la portée du bassin versant située en amont du fossé d'Alès (entre les villes de Ners, Anduze et Alès et orienté NE-SW)

À la suite de travaux exploratoires de géomorphologie théorique ci-dessus évoqués, il est apparu que l'étude de l'organisation fractale des reliefs devait être envisagée aussi, et peut-être surtout, dans le cadre d'unités hydrogéomorphologiques qui ont un sens au regard des questions de dégradation de l'énergie.

Ces unités correspondent évidemment aux bassins versants superficiels (sauf en domaine karstique) constitués d'une part de surfaces qui « versent » vers un exutoire (quel qu'il soit : confluence, mer) et d'autre part d'un réseau de drainage arborescent dont la fonction est d'acheminer l'eau précipitée, hors du bassin (Moussa et Boquillon, 1993 ; Forriez, 2010 ; Forriez *et al.*, 2011), c'est-à-dire au niveau de la borne inférieure du potentiel de glyptogenèse matérialisée, au mieux, par l'océan mondial. Ce réseau dendritique, traduction directe de l'érosion linéaire, est à l'origine de l'irrégularité perceptible du relief et cela sur une large gamme d'échelles.

Dans ces conditions, il convenait de trouver un bassin versant où l'imperméabilité du substrat soit forte et où l'érosion linéaire ait pu s'exercer avec vigueur, ce qui nécessite tant une hauteur de chute notable qu'un apport d'eau non négligeable et une distance à la mer, faible.

Appuyé sur le rebord sud-est du massif métamorphique des Cévennes, entre le Mont-Aigoual plus au sud et le Mont-Lozère plus au nord, le bassin versant du Gardon (Gard) est apparu comme le bon objet d'étude pour cette investigation, d'autant qu'il

reçoit d'importantes précipitations, en particulier à l'automne et au printemps, et qu'il a, comme la Cèze ou l'Hérault, des sources qui sont peu éloignées de son niveau de base représenté par la Méditerranée, *via* une confluence très basse avec le Rhône, peu en amont de la Camargue (Figure 1).

Cela étant, si sa partie située en amont du fossé oligocène d'Alès n'est quasiment développée que sur des roches de socle et est en pente forte, la partie aval se déploie, elle, au niveau des plateaux des garrigues de Nîmes essentiellement composés de calcaires urgoniens fortement karstifiés, et selon des pentes de talwegs infiniment plus faibles.

Ne souhaitant pas, dans ce travail, aborder la question des logiques morphologiques spécifiques des karsts, nous avons choisi de limiter notre investigation à la partie du bassin versant dont l'altitude est supérieure à 100 m, ce qui correspond géographiquement au sous-bassin situé en amont du fossé d'Alès.

À partir de ces choix, et même s'ils sont géographiquement réducteurs, apparaît tout de même une grande difficulté. Sur quelle(s) information(s) baser l'approche géométrique que nous souhaitons développer? Il est clair que nous ne pouvons prendre toutes les informations disponibles sur cet objet géomorphologique sous peine de submersion et d'incompréhension finale. L'idée centrale que nous avons suivie, que l'on retrouve dans le choix d'un bassin versant – zone en érosion par définition – a été que notre attention doit être focalisée sur la conséquence des relations qui existent entre le ou les flux et la ou les forme(s) ; les flux générant les formes (érosion *ls*), les formes modulant les flux (effet de filtrage, transformation du signal pluie en signal débit) (Martin, 2003a et b, 2004).

Ce premier niveau de déconstruction de l'objet bassin versant peut être suivi d'un second. Qu'est-ce qu'une forme si ce n'est, en géomorphologie, un ensemble de variations d'altitudes distribuées spatialement de façon spécifiquement, c'est-à-dire passibles d'une analyse spatiale *ss* (rapports de position)? Dès lors, si on déconstruit encore l'objet quelle est la modalité de représentation (partielle) d'une forme? C'est évidemment de passer d'un objet à 3 dimensions (voire 4 si on introduit le temps) à un objet à 2 dimensions, donc de faire des coupes. Celles-ci peuvent être faites à latitudes ou longitudes (ou selon toutes autres orientations d'ailleurs, constantes ou non) et dans ce cas c'est l'altitude qui varie. Cela correspond à la classique coupe topographique. Mais nous pouvons aussi réaliser des coupes à altitudes constantes, ce qui correspond à des courbes de niveau pour lesquelles il y a bien correspondance entre leur « irrégularité » et les morphologies qu'elles décrivent certes partiellement.

Sur ces bases, nous avons été amenés à travailler sur des coupes calculées à partir d'un modèle numérique de terrain de l'Institut géographique national (IGN) disponible au pas de 50 m (Figure 2).

Ce bassin a donc été, comme tout relief peut l'être, découpé selon des plans horizontaux, espacés de 50 m, dont l'intersection avec le relief constituera les ensembles étudiés que l'on appelle couramment des courbes de niveau. Si dans le dessin de chaque courbe la valeur de l'altitude n'est pas apparente, rien ne nous empêche de

comparer les dessins de courbes dont les altitudes varient de 50 en 50 m par exemple. Ce faisant nous pouvons la réintroduire en relation avec les résultats de l'analyse fractale des courbes et donc retrouver par là la dynamique puisque celle-ci est largement tributaire de l'énergie potentielle de position, laquelle correspond à l'altitude.

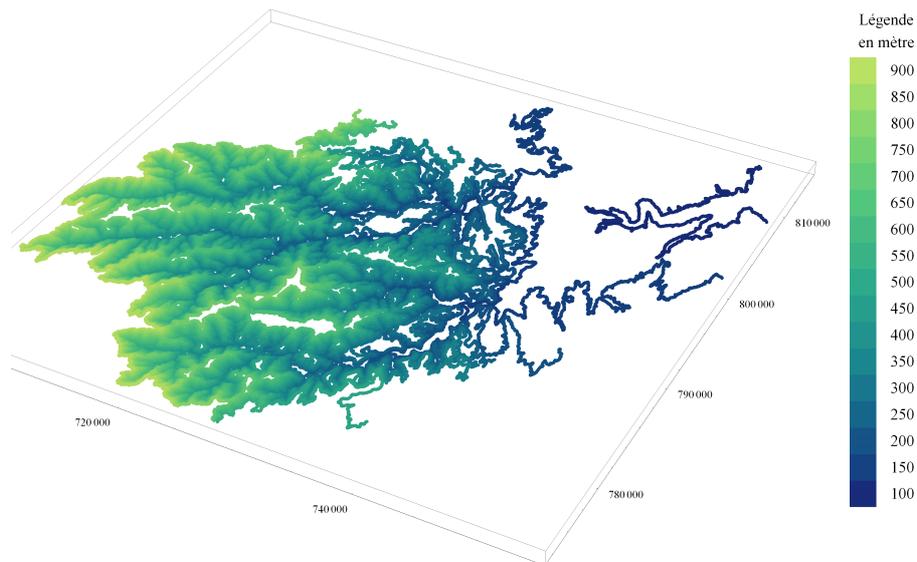


Figure 2. Haut bassin versant du Gardon : variation, en fonction de l'altitude, des courbes de niveau calculées à partir d'un modèle numérique de terrain avec un pas de 50 m

Ces courbes de niveau, limitées à chaque extrémité par la ligne de partage des eaux (crête topographique formant interfluve entre deux unités hydrologiques) et donc de longueurs, à vol d'oiseau, sont variables suivant l'altitude (distances plus courtes dans les parties hautes et basses que dans les parties médianes), car les bassins versants ont souvent en plan la forme d'une lemniscate de Bernoulli. Elles peuvent être analysées dans le cadre d'une approche fractale simple (comptage de boîtes, Figure 3). Dans cette technique, on compte le nombre de boîtes occupées par au moins un pixel en faisant varier la taille des boîtes. Pour des tailles de boîtes égales respectivement à $r = \{1, 2, 4, 8, 16\}$, on trouve pour une courbe ordinaire (une parabole Figure 3) des nombres de boîtes occupées $N(r) = \{18, 9, 4, 2, 1\}$, c'est-à-dire comme attendu $N(r) \sim r^{-1}$, ce qui correspond à une dimension égale à la dimension topologique $D_T = 1$ de la courbe. Par contre, on trouve pour la courbe fractale (haut de la Figure 3) des valeurs beaucoup plus grandes, $N(r) = \{64, 25, 9, 3, 1\}$, qui varient comme $N(r) \sim r^{-3/2}$. C'est bien le comportement attendu pour cette courbe fractale dont le générateur est formé de $p = 8$ segments de longueur $1/q = 1/4$ et dont la dimension fractale est donc $D_F = \log p / \log q = 3/2$, supérieure à sa dimension topologique $D_T = 1$.

Cette méthode établit formellement un rapport entre une information (N_1) obtenue à une échelle ε_1 (taille ε_1 des boîtes – carrés, pavés – de la grille couvrant l’objet courbe de niveau) et une autre information (N_2) obtenue à une échelle ε_2 . Cette information N est le nombre de boîtes occupées par au moins un pixel. Ces derniers, obtenus par rasterisation de la courbe de niveau, doivent au mieux correspondre au pas du MNT, ici de 50 m. Ceci signifie qu’en dessous de cette résolution, toute information est moyennée, donc il n’est pas possible d’y chercher de structures géométriques. Mais ceci signifie aussi que la taille du côté de la plus petite boîte (carrée) doit être au moins de 50 m et que le rapport ci-dessus indiqué, devant être établi entre deux échelles, ne peut être calculé qu’entre une information N_1 obtenue à une échelle de 50 m et une information N_2 obtenue à une échelle de 100 m. En d’autres termes la dimension fractale (autre façon de nommer le rapport ci-dessus évoqué) ne peut être connue que pour une échelle au moins égale à 2 fois la valeur du pas des données.

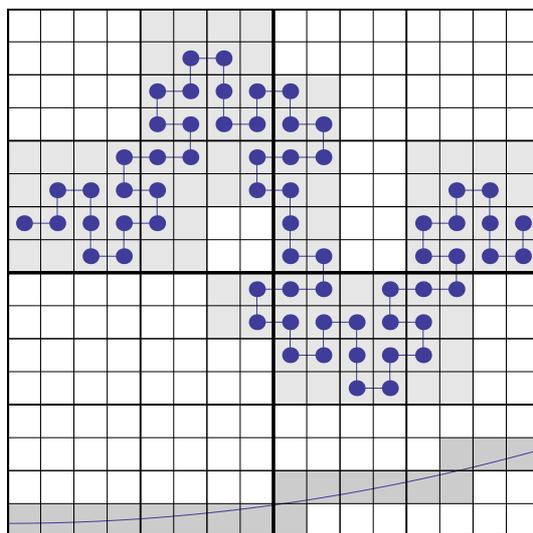


Figure 3. Illustration de la technique du comptage de boîtes sur une courbe fractale (haut) et sur une courbe non fractale (bas)

Cela étant posé, il convient de se demander comment varie ce taux. C’est ce que formalise la relativité d’échelle (Nottale, 1993, 2011, Martin *et al.*, soumis) dans un cadre déductif.

Pour clore ces remarques introductives rappelons que dans des travaux antérieurs (Martin, 2006, 2007b, Martin *et al.*, 2008), une telle analyse géométrique sur les courbes de niveau a mis en évidence une double variation de la dimension fractale, en fonction de l’altitude d’une part et de l’échelle elle-même d’autre part. Dans le présent article nous poursuivons l’analyse de ces données d’observation dans le cadre plus formel de la relativité d’échelle (Nottale, 1993, 1998, 2011).

Dans celle-ci, des variables caractérisant l'échelle d'observation sont introduites de manière explicite. La dépendance, en fonction de ces variables d'échelle, des différentes quantités étudiées, est alors décrite par des équations aux dérivées partielles. Dans le cas considéré de double dépendance, en fonction de la position (ici l'altitude h) et de l'échelle ε , mesurée par son logarithme $\ln(\varepsilon/\lambda)$, on a donc affaire à un double calcul différentiel en $\partial/\partial x$ et $\partial/\partial \ln \varepsilon$ (Nottale, 2002)¹.

Considérons en effet une variable fractale, comme le nombre N compté dans un comptage de boîte (ou la longueur L mesurée sur une courbe fractale, pour laquelle tout ce qui suit s'applique aussi), la plus simple équation différentielle possible consiste précisément à expliciter le caractère constant de la dimension fractale, sous la forme :

$$\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varepsilon} = -D_F, \quad (1)$$

c'est-à-dire,

$$\frac{\partial N}{\partial \ln \varepsilon} = -D_F N, \quad (2)$$

dont la solution s'écrit :

$$N = N_0 \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D_F}. \quad (3)$$

Dans le cas d'un comptage de boîtes, la variable d'échelle est la taille de la boîte, $\varepsilon = r$. On reconnaît dans cette expression la dépendance standard en loi de puissance attendue pour une distribution fractale de dimension fractale D_F . Ainsi les solutions de telles équations différentielles d'échelle permettent, pour les plus simples d'entre elles, de retrouver le comportement fractal standard auto-similaire à dimension fractale constante, tout en le déduisant d'un niveau plus profond de description.

Mais l'approche différentielle permet aussi de mettre en évidence des comportements plus généraux. Une première généralisation naturelle d'une telle équation consiste à prendre en compte une translation possible sur la longueur $L(x, \ln \varepsilon)$ ou un changement d'origine pour le compte du nombre de boîtes. Ceci revient à remplacer dans les équations ci-dessus N par $N - N_0$, c'est-à-dire à y rajouter un terme constant :

$$\frac{\partial N}{\partial \ln \varepsilon} = a - D_F N, \quad (4)$$

avec $a = D_F N_0$. La solution s'écrit :

$$N = N_0 \left\{ 1 + \left(\frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^{D_F} \right\}. \quad (5)$$

1. Nous adoptons ici une notation simplifiée. Strictement, il faudrait introduire une échelle de référence λ et toujours écrire la variable d'échelle comme $\ln(\varepsilon/\lambda)$ (ce qui est précisément une manifestation de la relativité des échelles). Mais, quand λ est une échelle constante, celle-ci n'intervient pas dans l'élément différentiel d'échelle $d \ln(\varepsilon/\lambda)$ qui peut donc être écrit $d \ln \varepsilon$.

Elle décrit un comportement fractal (dépendant d'échelle) à certaines échelles et non fractal (indépendant d'échelle) à d'autres, avec une transition de l'un à l'autre régime autour de l'échelle de transition λ . On peut aussi pousser plus loin le développement limité du membre de droite, sous la forme $a + bN + cN^2 + \dots$. Les solutions décrivent alors des régimes fractals et non fractals multiples séparés par des échelles de transition différentes.

Une autre généralisation, particulièrement appropriée aux applications en géographie, consiste à prendre en compte des équations différentielles du second ordre. Dans le cas le plus simple, on considère que l'invariant, au lieu d'être la dimension fractale D_F , définie comme dérivée du premier ordre, est la dérivée du deuxième ordre, c'est-à-dire :

$$\frac{\partial^2 \ln N}{(\partial \ln \varepsilon)^2} = A. \quad (6)$$

La solution de cette équation s'écrit, par un choix adéquat des constantes d'intégration,

$$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} A \left(\ln \frac{\lambda}{\varepsilon} \right)^2. \quad (7)$$

L'échelle λ est ici définie comme celle de l'extremum de la parabole obtenue, et N_0 comme la valeur de N pour cet extremum. La dimension fractale effective, pour cette loi d'échelle généralisée, devient alors variable de manière linéaire en fonction du logarithme de l'échelle :

$$D_F = -\frac{\partial \ln N}{\partial \ln \varepsilon} = A \ln \frac{\lambda}{\varepsilon}. \quad (8)$$

Cette dépendance monotone entre la dimension fractale et la variable d'échelle logarithmique $\ln(\lambda/\varepsilon)$ permet de prendre comme variable principale la dimension fractale elle-même, que nous appellerons $D_F = \tau$ dans ce nouveau rôle. L'intérêt d'un tel renversement est qu'en analogie avec les lois du mouvement, τ est alors comme un « temps d'échelle » et $\ln(\lambda/\varepsilon)$ comme une « vitesse d'échelle ». On peut alors écrire une équation du deuxième ordre analogue à l'équation de la dynamique du mouvement :

$$\frac{\partial^2 \ln N}{\partial \tau^2} = \gamma. \quad (9)$$

La quantité γ est, par analogie, une sorte d'« accélération d'échelle ». La solution est parabolique,

$$\ln \frac{N}{N_0} = \frac{1}{2} \gamma \tau^2, \quad (10)$$

et sachant que $\tau = A \ln(\lambda/\varepsilon)$, on constate que les deux formes de cette équation du deuxième ordre et leurs solutions sont équivalentes, *via* la relation $A \times \gamma = 1$.

Le présent article a pour but de comparer les données d'observation concernant le bassin versant du Gardon, dont une première analyse a déjà montré la variabilité de la dimension fractale, à ces modèles simples de dimension fractale variable : transition fractal / non fractal et/ou accélération d'échelle.

2. Variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude

Avant de passer à l'analyse de la variation en fonction de l'échelle des dimensions fractales des courbes de niveau mesurées sur le bassin versant du Gardon, puis à une analyse couplée en échelle et position (altitude), nous allons tout d'abord reprendre l'analyse de leur simple dépendance en altitude et en tirer quelques conséquences.

2.1. Méthode de comptage de boîtes

La méthode d'analyse fractale utilisée est un comptage de boîtes. On compte le nombre de boîtes qui couvrent un ensemble de points (de dimension topologique $D_T = 0$) et l'on obtient, dans le cas d'une dimension fractale constante D_B , un nombre de points

$$N(r) = N_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^{D_B} \quad (11)$$

pour des boîtes de taille r que l'on fait varier.

Cette méthode ne distingue pas une poussière de points (de dimension topologique $D_T = 0$) d'une courbe (dimension topologique $D_T = 1$). Cependant, pour une courbe située dans un plan comme c'est le cas des courbes de niveau analysées ici, on s'attend à ce que $1 < D_B < 2$.

Néanmoins, on obtient en fait une dimension fractale variable en fonction de l'échelle (cette variation a été appelée « courbure » par Ph. Martin (2004)). Cette définition devient alors insuffisante, et doit être redéfinie de manière locale.

La dimension fractale $D_B = 1$ correspond à une absence de structuration en échelles (non-fractalité) que l'on retrouve géomorphologiquement sur de vastes étendues dans la forme idéalisée de la plaine et bien plus localement dans les lambeaux de surface d'aplanissement (témoins d'un ancien état pénéplané, ici la surface anti-triasique) portés en altitude, et donc aux deux extrémités orographiques des reliefs (toutefois, ce dispositif géomorphologique n'est pas le seul possible).

2.2. Dimension fractale moyenne en fonction de l'altitude

Les analyses précédentes ont donné les résultats suivants (Martin, 2006, 2007b Figure 4) :

$$D_B = -(9,26 \pm 0,74) \times 10^{-7} h^2 + (7,94 \pm 0,76) \times 10^{-4} h + (1,128 \pm 0,017), \quad (12)$$

et

$$D_{BA} = -(1,74 \pm 0,13) \times 10^{-6} h^2 + (1,59 \pm 0,13) \times 10^{-3} h + (1,166 \pm 0,029), \quad (13)$$

où h est l'altitude en m, D_B la dimension fractale « moyenne » définie sur la gamme d'échelles médiane, et D_{BA} la dimension fractale asymptotique aux petites échelles (géographiques). On a rajouté ici les barres d'erreur statistiques (correspondant à un écart-type 1σ) sur les paramètres de l'ajustement.

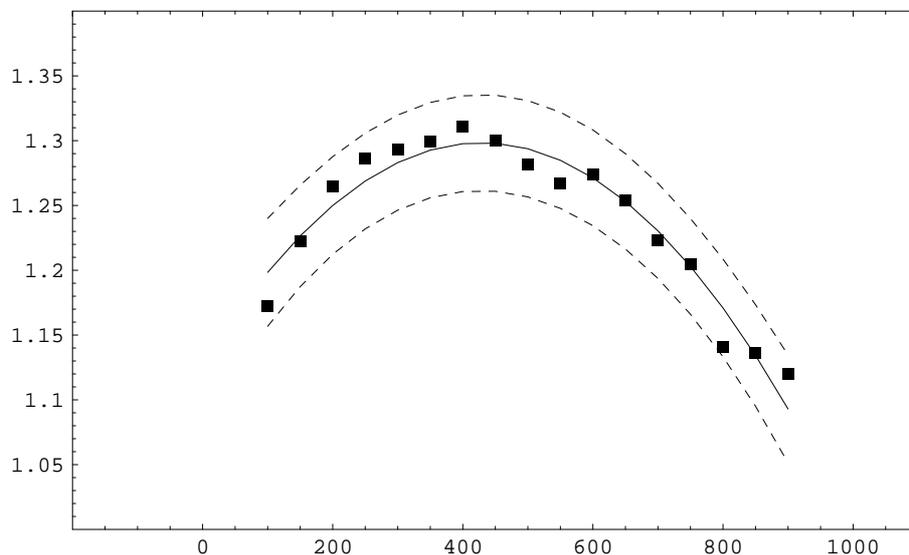


Figure 4. Comparaison des valeurs de la dimension fractale moyenne D_B , mesurées sur des courbes de niveaux successives (altitudes h de 100 m à 900 m), à leur ajustement par une fonction parabolique $D_B(h)$. Les pointillés donnent l'intervalle de confiance à 95 % de l'ajustement

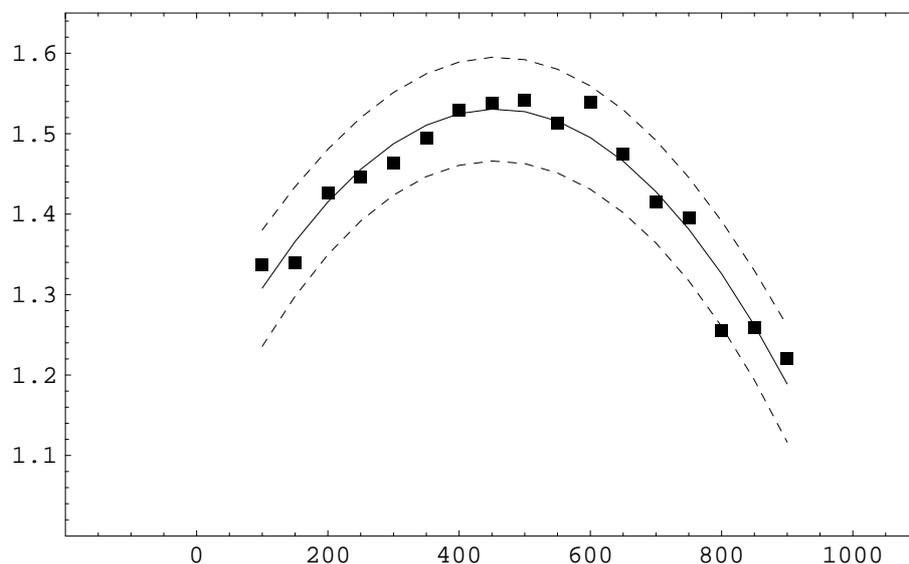


Figure 5. Comparaison des valeurs de la dimension fractale asymptotique D_{BA} , mesurées sur des courbes de niveau successives (altitudes h de 100 m à 900 m), à leur ajustement par une fonction parabolique $D_{BA}(h)$. Les pointillés donnent l'intervalle de confiance à 95 % de l'ajustement

2.3. Altitudes critiques

Avec ces valeurs, on trouve que

* $D_B = 1$ pour $h_1 = -(139 \pm 45)$ m et $h_2 = (996 \pm 41)$ m, et

* $D_{BA} = 1$ pour $h_1 = -(94 \pm 42)$ m et $h_2 = (1008 \pm 39)$ m,

où les barres d'erreur sont déterminées à partir de l'intervalle de confiance à 95 % (voir Figure 4 et Figure 5). Les valeurs de h_1 et h_2 sont donc égales pour D_B et D_{BA} aux barres d'erreur près.

On trouve finalement

$$h_1 = -(117 \pm 30) \text{ m}, \quad h_2 = (1002 \pm 28) \text{ m}. \quad (14)$$

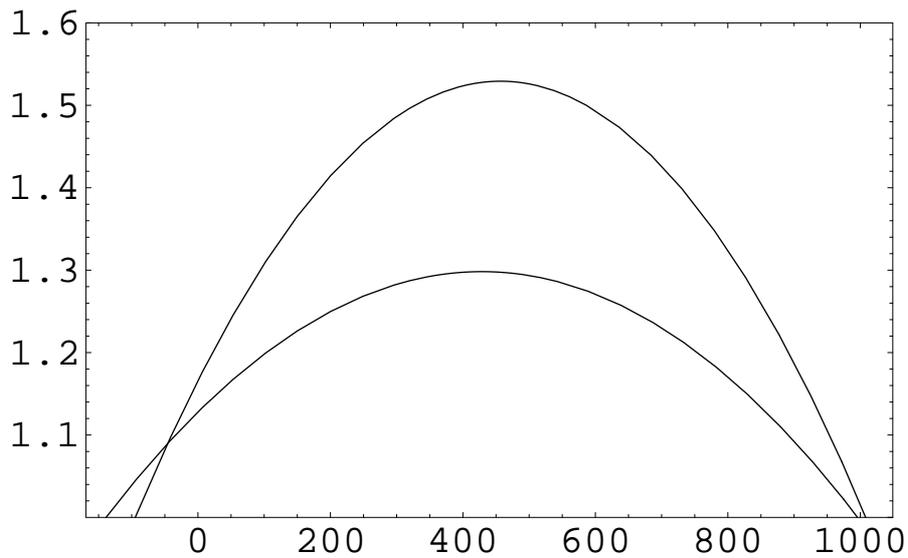


Figure 6. Ajustements des dimensions fractales moyenne $D_B(h)$ et asymptotique $D_{BA}(h)$ extrapolés au-delà du domaine mesuré $h = 100-900$ m. La dimension $D_B = 1$ (non-fractalité) est obtenue dans les deux cas pour les mêmes altitudes de ≈ -120 m et ≈ 1000 m (aux barres d'erreur près)

2.4. Compréhension théorique de la loi parabolique en h

À partir de ce fait, on peut « prévoir » deux des trois coefficients des courbes paraboliques ci-dessus et comprendre les relations entre leurs coefficients (ceux en h et h^2 sont dans un rapport 2 entre D_B et D_{BA}).

En effet, l'hypothèse de continuité, sous-jacente à l'hypothèse que la variation de $D(h)$ peut être décrite par une équation différentielle en fonction de h , et les deux contraintes $D = 1$ pour $h = h_1$ et $h = h_2$ conduisent à écrire

$$\tau(h) = D(h) - 1 = F(h)(h - h_1)(h - h_2). \quad (15)$$

Dans le cas le plus simple, $F(h) = -g/2 = \text{cste}$. On a alors un modèle du type « gravité », où

$$D(h) = -\frac{1}{2} g h^2 + g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} \right) h + \left(1 - g \frac{h_1 h_2}{2} \right), \quad (16)$$

$$\frac{dD}{dh} = g \left(\frac{h_1 + h_2}{2} - h \right), \quad (17)$$

$$\frac{d^2 D}{dh^2} = -g, \quad (18)$$

avec $h_1 = -120$ m et $h_2 = 1000$ m.

Une autre possibilité serait que l'altitude h_0 pour laquelle la dimension fractale est maximale puisse être déterminée par des arguments physiques et géographiques. On verra effectivement dans la suite que cette altitude (autour de 450 m) semble être un invariant indépendant de l'échelle pour l'ensemble des données. Dans ce cas la relation s'écrit

$$D(h) = D_{\max} - \frac{1}{2} g (h - h_0)^2 \quad (19)$$

Cette altitude a l'avantage d'être donnée par les coefficients en h et h^2 et de ne pas dépendre du coefficient constant. Ainsi, si $D(h) = a + b h + c h^2$, on a $h_0 = -b/2c$.

En fonction des trois paramètres physiques / géographiques h_0 , h_1 et D_{\max} , g est alors donné par :

$$g = \frac{2(D_{\max} - 1)}{(h_1 - h_0)^2}. \quad (20)$$

Le dernier coefficient manquant n'est pas déterminé pour le moment mais seulement mesuré. Une telle détermination serait envisageable s'il devenait possible, dans le futur, d'avoir une estimation des dimensions fractales maximales (en fonction des caractéristiques des roches, de l'érosion, etc.). Une première estimation (provisoire) de ces dimensions fractales donne :

* $D_{B\max} = 1, 298$ à 429 m (ajustement) et $1,311$ à 400 m (données) ;

* $D_{BA\max} = 1, 529$ à 457 m (ajustement) et $1,541$ à 500 m (données).

3. Variation de la dimension fractale pour $h = \text{constante}$

Avant de passer à une analyse couplée de la variation de la dimension fractale en échelle et altitude, donnons un exemple de la manière dont elle varie en fonction de

l'échelle seule pour une altitude donnée. Un tel exemple est donné en Figure 7 pour la courbe de niveau d'altitude $h = 450$ m.

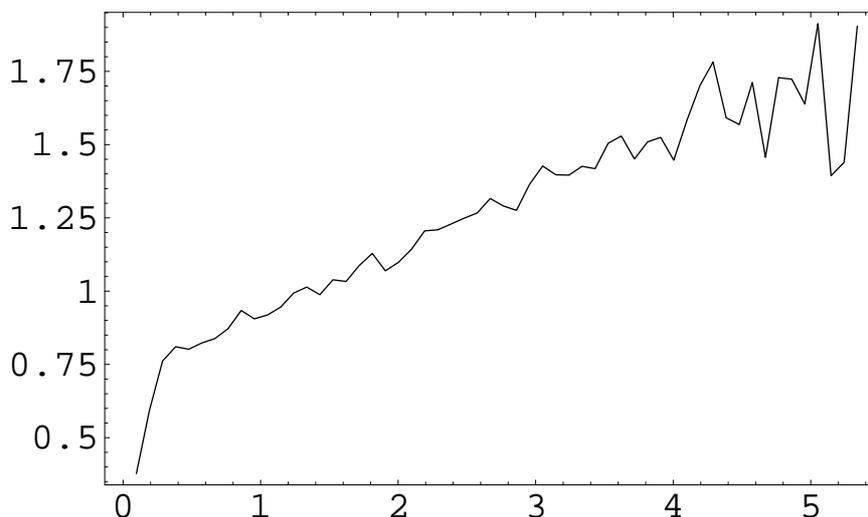


Figure 7. Exemple de variation de la dimension fractale locale $D_F = -d \ln N / d \ln r$ pour la courbe de niveau $h = 450$ m en fonction de $x = \ln r$ ($x = 0$ correspond à $r = 30$ m). Les valeurs de D_F inférieures à 1 pour $x < 1,32$ (taille de boîte $r \approx 100$ m, c'est-à-dire deux fois le pixel IGN) sont dues à un biais de petite taille

On voit que sa variation est forte en fonction de l'échelle et qu'aucune valeur constante n'est établie sur l'essentiel de l'intervalle d'échelle, sauf au-delà de $x \approx 4$, où une dimension asymptotique constante peut être définie, bien qu'à ces petites échelles géographiques les fluctuations deviennent néanmoins importantes. Les valeurs de la dimension fractale effective inférieures à 1 aux petites valeurs de r sont dues à un biais de petite taille de boîte : la courbe n'a en fait de sens qu'au-delà de $x = \ln r = 1,32$, qui correspond à une taille de boîte $r \approx 100$ m, c'est-à-dire environ deux fois le pixel IGN. La dimension fractale atteint sa valeur minimale possible $D_F = 1$ pour cette échelle. Cependant, on peut montrer (par exemple par une analyse de données à meilleure résolution) que l'effet de ce biais se poursuit (en décroissant) au-delà de cette échelle. Les résultats obtenus ici n'ont donc rien de définitif en ce qui concerne les grandes échelles géographiques.² Une analyse détaillée de ce biais sort du cadre du présent article et fera l'objet d'une publication future, ainsi que sa correction détaillée.

On peut alors faire un ajustement quadratique de la dimension fractale variable en fonction de l'échelle pour chacune des 17 lignes de niveau séparées de 50 m, de

2. Nous précisons systématiquement dans cet article « échelles géographiques » ou « échelles physiques », car le sens des expressions de « grande » et « petite » échelle est inversé entre les deux disciplines impliquées dans ce travail.

$h = 100$ m à $h = 900$ m. Pour chaque valeur de h , on ajuste $\ln N(x)$ par un polynôme du 3^e ordre, puis on dérive pour obtenir la dimension fractale variable (qui est donc quadratique en x). Les courbes correspondantes sont données en Figure 8.

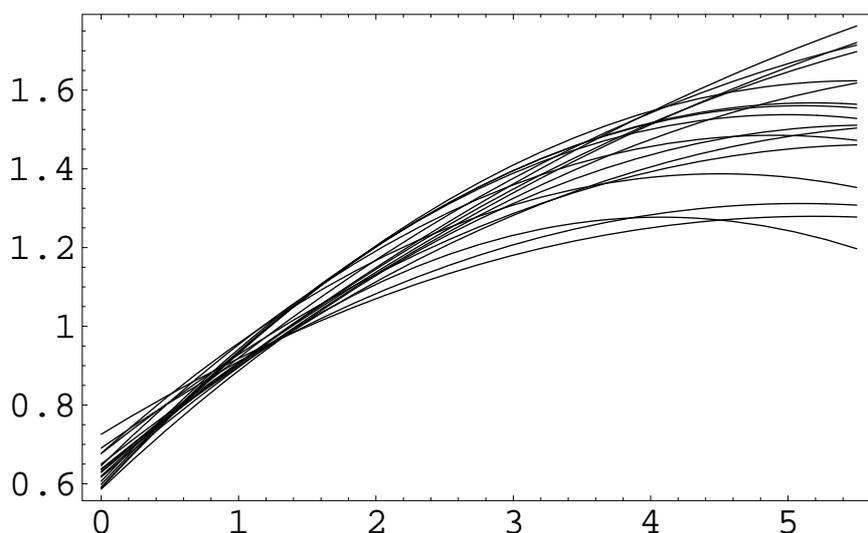


Figure 8. Courbes quadratiques donnant la variation de la dimension fractale D_F en fonction de l'échelle $x = \ln r$ ($x = 0$ correspond à $r = 30$ m) pour les 17 courbes de niveau (voir texte). Les valeurs de la dimension fractale tombent artificiellement sous $D_F = 1$ pour $x \lesssim 1,32$ en raison d'un biais de petite taille de boîte

On remarquera sur cette figure la variation systématique de la dimension fractale sur la plus grande partie de l'intervalle d'échelles, avec un écrasement sur les petites échelles géographiques (grandes échelles physiques) qui suggère l'existence d'une dimension asymptotique (elle-même variable avec l'altitude, comme nous l'avons vu précédemment).

4. Analyse couplée en échelle et altitude : ajustement polynomial

Pour tenter de rendre compte de la double variation de la dimension fractale, un ajustement polynomial des valeurs observées du compte du nombre de boîtes $\ln N(x, h)$ en fonction de l'échelle $x = \ln r$ et de l'altitude h a été effectué.

Il faut aller à un ordre important en $x = \ln r$, c'est-à-dire jusqu'à l'ordre 5 dans l'ajustement de $\ln N$ en x et h , et faire intervenir des termes en x^3 , $x^3 h$ et $x^3 h^2$ pour être à l'ordre 2 dans la dimension fractale qui en est la dérivée, $D_F(x, h) = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$. On trouve en effet que les termes en $\{1, h, h^2, x, x^2, x^3, hx^3, h^2x^3, h^3, h^4, hx\}$ sont tous significatifs.

On obtient le résultat de la Figure 10, où la dimension fractale semble ne plus dépendre de h aux petites tailles de boîte (mais voir Section 5), se déforme continu-

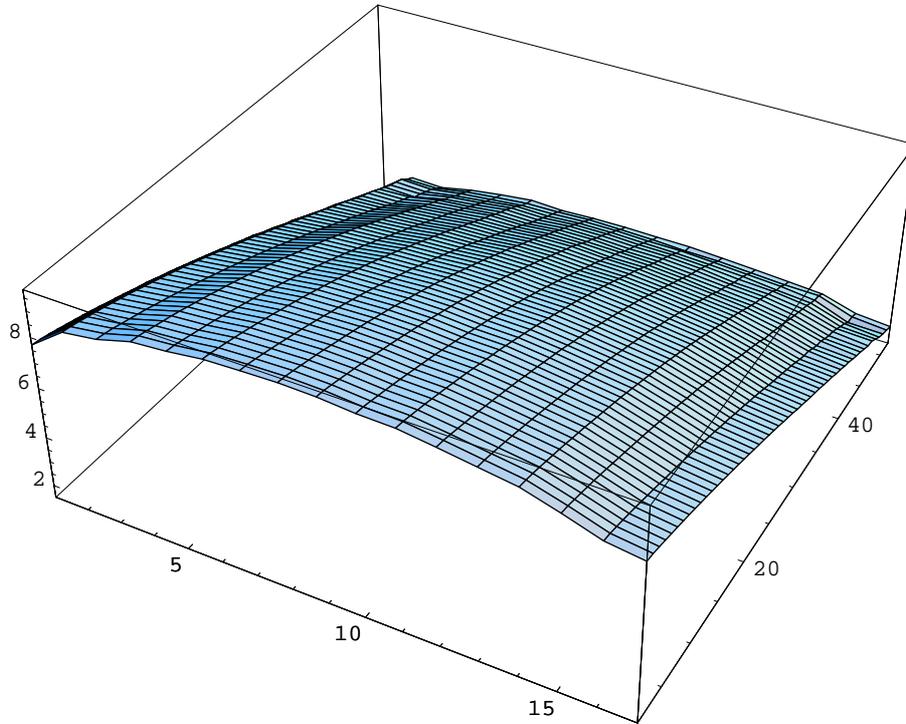


Figure 9. Valeurs mesurées de $\ln N$ en fonction de h (les valeurs de 1 à 17 correspondent à $h = 100$ m à $h = 900$ m avec des écarts de 50 m) et de $x = \ln(r/30m)$ (les valeurs indiquées sont celles de $10x$ pour $x = 0$ à $x = 5, 2$). Les données ont été ré-échantillonnées pour obtenir une grille régulière en h et x

ment vers une dépendance parabolique et s'écrase aux grandes valeurs de x . Ce résultat apporte une nouvelle confirmation de l'existence d'une dimension asymptotique D_{BA} (Martin, 2004).

La dimension fractale variable obtenue par ajustement des données $\ln N(x, h)$ (voir Figure 9) par un polynôme de degré 5 et dérivation s'écrit :

$$D_F(x, h) = 0,679 - 0,1097 h + 0,3243 x - 0,04746 x^2 + 0,09616 h x^2 - 0,09943 h^2 x^2, \quad (21)$$

où h est en km ($h = 0,1$ à $0,9$) et où, on le rappelle, les valeurs inférieures à 1 pour $x < 1,32$ ($r = 100$ m) ne sont pas réelles mais résultent d'un biais de petite taille de boîte. Dans cet ajustement, la variation de la dimension fractale est donc parabolique en h (voir Section 2) et en $x = \ln r$ (voir Section 3).

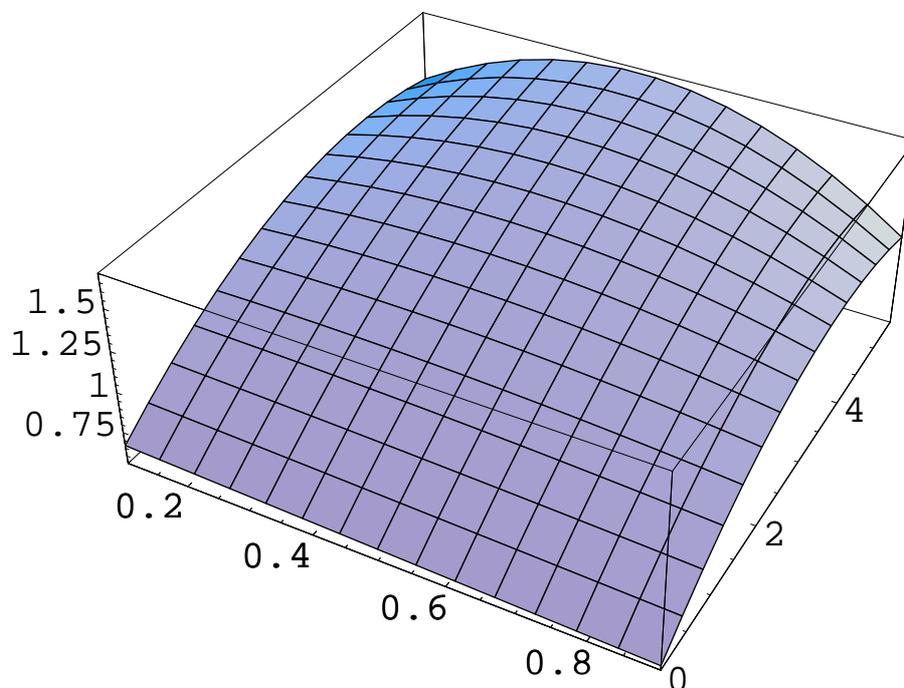


Figure 10. Ajustement de la dimension fractale en fonction de l'altitude $h=0,1$ à $0,9$ km) et de l'échelle $x = \ln r$, de $x = 0$ ($r = 30$ m) à $x = 5,5$ ($r = 7,34$ km). Les valeurs obtenues aux grandes échelles géographiques (x petits) sont sous-estimées car affectées par un biais de petite taille qui n'a pas été corrigé ici

5. Analyse couplée en échelle et altitude : transition fractal / non fractal

L'analyse précédente met bien en évidence la double variation de la dimension fractale, parabolique en h et croissante en $x = \ln r$ vers une éventuelle dimension asymptotique, mais ne permet pas de trancher entre un effet de transition fractal / non-fractal ou un effet d'« accélération d'échelle ». Les ajustements polynomiaux utilisés jusqu'à maintenant présupposent une interprétation plutôt du type « dynamique d'échelle » de la variation en fonction de l'échelle, mais celle-ci doit pouvoir être mise à l'épreuve, ce qui va maintenant être fait.

Un inconvénient des données d'origine est qu'elles sont régulièrement espacées en h mais pas en $x = \ln r$. Elles ont alors été interpolées de manière à obtenir une grille régulière également en $\ln r$ (de 0,1 à 5,2 par intervalles de 0,1). Ceci permet de faire des coupes en $\ln r = \text{cst}$, et d'étudier la dépendance en h dans chacune de ces coupes et sa variation d'une échelle à la suivante. On constate (Figure 9 et Figure 11) que la dépendance parabolique de $\ln N$ en fonction de h se maintient quelle que soit

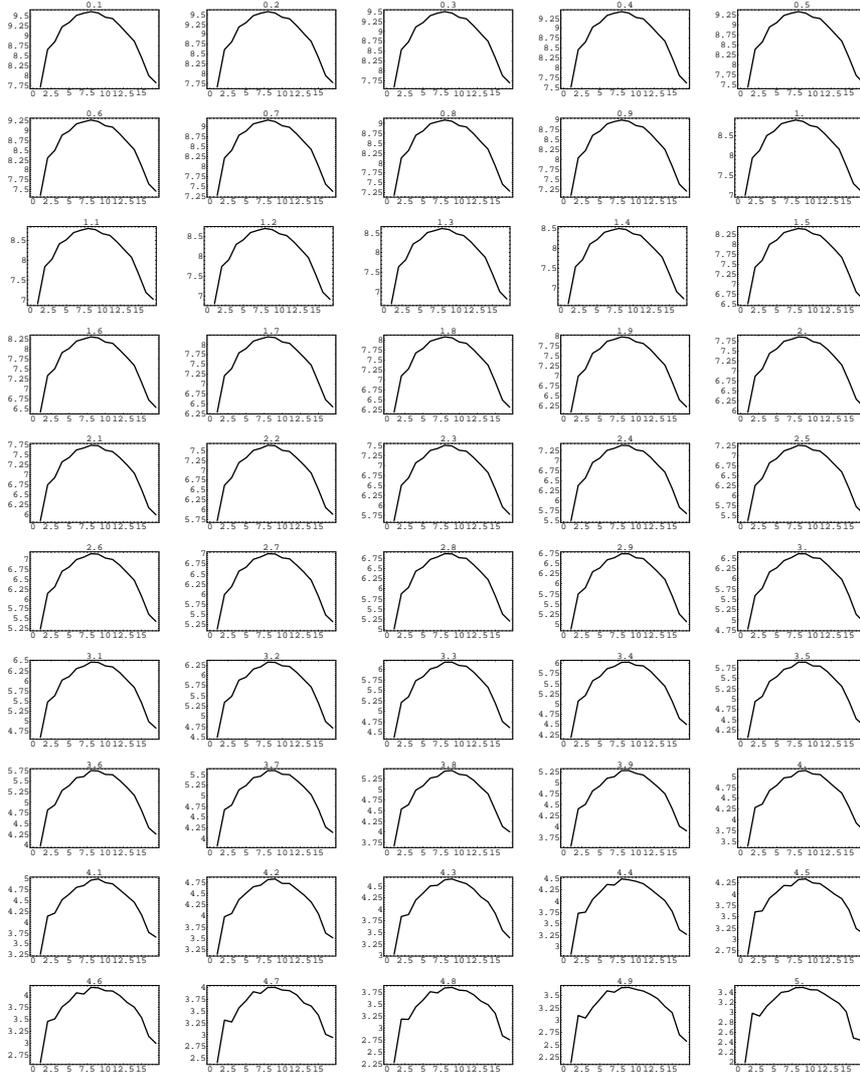


Figure 11. Valeurs de $\ln N$ en fonction de h pour $x = \ln r = 0,1$ à $5,0$ (coupes en x de la figure 9). L'altitude h est repérée par un indice j qui varie de 1 à 17 pour $h = 100$ à 900 m par incrément de 50 m

l'échelle, d'une manière remarquablement stable. Il est à noter que l'amplitude de la variation a été normalisée Figure 11, car la parabole s'écrase en fait aux petites échelles géographiques, comme il apparaît clairement Figure 9. Sachant que la dimension fractale est donnée par la dérivée partielle de cette fonction $\ln N(x, h)$ par rapport à x ($D_F(x, h) = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$), la dépendance parabolique en h est donc commune à $\ln N(x, h)$ et $D_F(x, h)$. Ce résultat corrige et améliore l'ajustement provisoire obtenu en Figure 10, dans lequel celle-ci semblait disparaître aux grandes échelles géographiques (petites valeurs de $x = \ln r$).

Ces 52 courbes ont été ajustées individuellement par des paraboles en h ,

$$\ln N(h) = a(x_i) + b(x_i)h + c(x_i)h^2, \quad (22)$$

pour $x_i = 0, 1$ à $5,2$, par intervalle de $0,1$. Les 52 ajustements ont fourni des valeurs numériques pour les trois coefficients $a(x)$, $b(x)$ et $c(x)$. La variation observée de ces valeurs en fonction de $x = \ln r$ est donnée Figure 12.

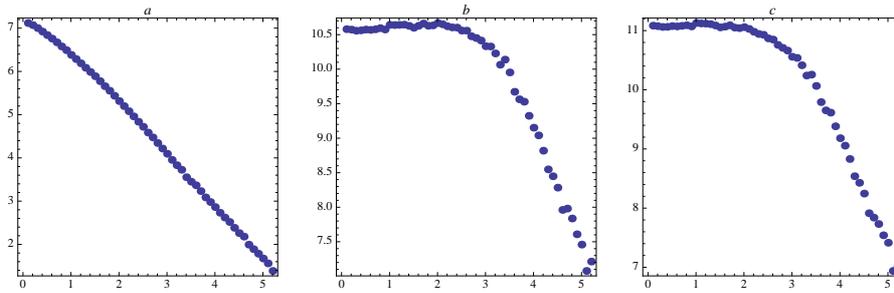


Figure 12. Variation en fonction de $\ln(r/30 \text{ m}) = 0,1$ à $5,2$ des trois coefficients de l'ajustement parabolique de $\ln N(h)$. Les barres d'erreur sur chaque point sont à peu près constantes et valent respectivement $0,13$ (a), $0,58$ (b) et $0,57$ (c)

Le résultat est remarquable :

– Le coefficient $a(x)$ varie régulièrement en fonction de l'échelle $x = \ln r$, ce qui justifie pour lui les ajustements polynomiaux précédents. Un ajustement de $a(x)$ à l'ordre 3 donne (avec un coefficient de corrélation $\rho = 0,9999$) :

$$a(x) = (7,215 \pm 0,011) - (0,67 \pm 0,02)x - (0,173 \pm 0,007)x^2 + (0,017 \pm 0,001)x^3. \quad (23)$$

– Mais il n'en est pas de même des deux coefficients $b(x)$ et $c(x)$ respectivement en facteur de h et h^2 . Leur variation est typique d'un régime de transition fractal / non fractal. Ils montrent en effet deux régimes très clairs, l'un constant, donc indépendant de l'échelle, de $x = 1,3$ à $x \approx 2,5$ (l'intervalle 0 à $1,3$ est exclu de l'analyse car biaisé, comme on l'a déjà fait remarquer), l'autre linéaire, donc correspondant à une dimension fractale constante, de $x \approx 3,5$ à $x \approx 5,2$, avec une transition continue qui les relie.

5.1. Étude séparée des deux régimes

5.1.1. Grandes échelles géographiques : $\ln r = 0$ à 2

Dans cette zone, la dimension fractale ne dépend que du coefficient a car les coefficients b et c sont constants. Elle est donc quasi indépendante de h , ce qui est logique géomorphologiquement puisque, à ces échelles correspondant à des objets et des processus très locaux, la dynamique fondamentale n'est plus la glyptogenèse qui varie en fonction de l'altitude, mais un ensemble de processus d'altération sur versants qui varient en fonction de la lithologie, de l'exposition, du couvert végétal, etc., autant de facteurs qui sont dans le cas du haut bassin du Gardon assez semblables de bas en haut.

La dimension fractale prend une valeur moyenne $D_F = 1$ dans cette zone :

$$\ln r = 0,1 - 2,2 : D_F = 0,986 \pm 0,016$$

$$\ln r = 0,5 - 1,9 : D_F = 1,005 \pm 0,011$$

Ceci est en accord avec le fait que le pixel réel (IGN) est en $x = \ln r = 0,51$ ($r = 50$ m) et que la définition d'une dimension locale correcte nécessite un intervalle de lissage de l'ordre de $\Delta \ln r \approx 2 \times 0,8$. Ceci rend compte partiellement du fait que la dimension fractale locale prend sa valeur minimale 1 (*i.e.*, non fractal) en $x = \ln r = 1,3$ ($r \approx 100$ m). On obtient dans cette zone :

$$\ln N = (7,37 \pm 0,13) - (1,00 \pm 0,02) x + (10,60 \pm 0,12) h - (11,10 \pm 0,12) h^2, \quad (24)$$

$$D_F = 1,00 \pm 0,02. \quad (25)$$

Mais ces résultats restent soumis à caution tant que le biais de petite taille n'est pas pleinement corrigé. Cette correction conduit en fait à une transition graduelle vers $D_F \approx 1$ (Nottale *et al.*, en préparation).

Le pic de cette relation parabolique est en $h_0 = 477$ m. Cette valeur décrit une géométrie globale du bassin versant (qui peut être liée à une courbure au sens géométrique du terme, mais aussi à ses limites) indépendante de la fractalité (puisque $D_F = 1$, ce qui correspond bien à une indépendance d'échelle).

5.1.2. Petites échelles géographiques : $\ln r = 3,1$ à 5,2

Dans cette zone le comportement des trois coefficients est linéaire avec une bonne approximation (Figures 12 et 13), on obtient sur l'intervalle 3,1-5,2 :

$$\begin{aligned} \ln N = & [(7,679 \pm 0,026) - (1,204 \pm 0,006) x] \\ & + [(15,46 \pm 0,15) - (1,599 \pm 0,036) x] h \\ & - [(16,17 \pm 0,14) - (1,764 \pm 0,034) x] h^2, \end{aligned} \quad (26)$$

c'est-à-dire

$$\ln N = (7,679 + 15,464 h - 16,170 h^2) - (1,204 + 1,599 h - 1,764 h^2) x \quad (27)$$

Pour la partie indépendante d'échelle de cette relation (géométrie globale), on obtient un pic en $h_0 = 478$ m, en tout point identique à celui du régime non fractal des grandes échelles géographiques. Cette géométrie globale sous-jacente est un invariant indépendant de l'échelle (valable pour toutes les échelles).

À cette approximation près, on a une dimension fractale constante en fonction de l'échelle dans cette zone de petites échelles géographiques, mais dépendante de h . Ces résultats valident complètement l'introduction d'une dimension fractale asymptotique par Ph. Martin (2004). On trouve :

$$D_A = (1,204 \pm 0,006) + (1,599 \pm 0,036)h - (1,764 \pm 0,034)h^2, \quad (28)$$

que l'on peut factoriser sous la forme :

$$D_A = 1 + 1,764(h + 0,113)(1,020 - h). \quad (29)$$

où h est en km.

Ce résultat est remarquable, car il confirme ceux obtenus sur D_B et D_{BA} : les altitudes pour lesquelles $D = 1$ sont (-113 ± 4) m et (1020 ± 27) m. L'altitude du maximum est $h_0 = 453$ m. On obtient les mêmes résultats aux barres d'erreur près en prenant un intervalle plus restreint $x = \ln r = 3,4-5,2$.

Pour $h_0 = 453$ m, la relation ci-dessus pour la dimension fractale asymptotique donne une valeur maximale $D_A = 1,57$, en excellent accord avec les estimations obtenues dans des publications précédentes (Martin, 2007b).

En ce qui concerne le terme indépendant de $x = \ln r$ dans $\ln N$, il est également parabolique et pourrait décrire une forme globale indépendamment de l'échelle. On notera que les trois relations paraboliques obtenues dans les deux régimes culminent respectivement en des valeurs proches de l'altitude du maximum, $h_0 = 477$ m, 478 m (géométrie globale) et 453 m (dimension fractale), en accord avec la Figure 11 qui montre que h_0 ne dépend pas (ou peu) de l'échelle.

5.2. Ajustement global par une loi de transition « relative d'échelle »

La théorie de la relativité d'échelle peut maintenant être utilisée pour franchir un pas supplémentaire et comparer l'ensemble de la variation des coefficients $b(x)$ et $c(x)$ aux types de lois d'échelle qu'elle obtient comme solutions d'équations différentielles d'échelle. Ce ne sont alors plus seulement les comportements asymptotiques de grande et petite échelle qu'on va éprouver, mais l'ensemble des échelles et en particulier l'intervalle d'échelle (qui est le plus étendu) sur lequel se produit la transition fractal / non fractal.

Nous avons vu dans l'introduction qu'une telle transition est décrite simplement, dans le cas où la dépendance d'échelle est obtenue vers les petites valeurs de $x = \ln r$, par une équation différentielle du type $\partial y / \partial \ln r = a + by$. Le cas, manifesté ici, d'une transition inverse vers la fractalité aux grandes valeurs de x (petites échelles

géographiques, *i.e.* grandes échelles physiques) s'en déduit aisément par une simple inversion $y \rightarrow 1/y$, ce qui correspond à l'élément symétrique (opposé) en logarithme, c'est-à-dire à la transformation $\ln y \rightarrow -\ln y$.

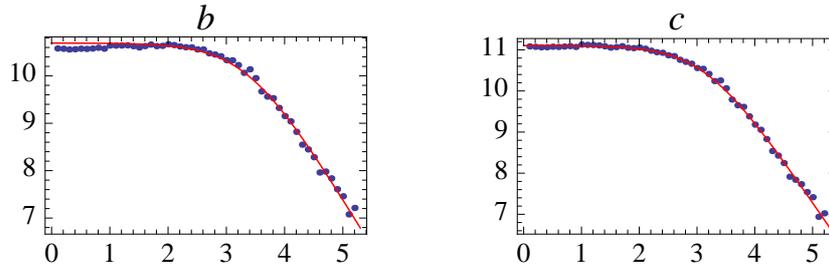


Figure 13. Ajustement par moindres carrés d'une loi de transition fractal / non fractal (voir texte) sur les deux coefficients $b(x)$ (gauche) et $-c(x)$ (droite) de la loi $\ln N = a(x) + b(x)h + c(x)h^2$

Ceci nous amène finalement à tenter, pour les coefficients $b(x)$ et $c(x)$, un ajustement par une loi de transition fractal / non fractal du type

$$\ln \frac{y}{y_0} = -\ln \left\{ 1 + \left(\frac{r}{r_0} \right)^\alpha \right\} \tag{30}$$

c'est-à-dire, avec $x = \ln r$,

$$\ln y = \ln y_0 - \ln \left(1 + e^{\alpha(x-x_0)} \right). \tag{31}$$

Une telle loi décrit bien une transition d'un régime fractal aux grandes échelles physiques (petites échelles géographiques) vers une indépendance d'échelle aux petites échelles physiques. En effet, quand $r \gg r_0$, on a $(r/r_0)^\alpha \gg 1$ et la loi ci-dessus s'écrit $y = y_1 r^{-\alpha}$, alors que quand $r \ll r_0$, on a $(r/r_0)^\alpha \ll 1$ et donc $y = y_0$.

Appliquée aux coefficients de la loi parabolique $b(x)$ (en h) et $c(x)$ (en h^2), on obtient deux ajustements (par moindres carrés) très hautement statistiquement significatifs (voir Figure 13) :

$$b(x) = 10,693 - \ln\{1 + e^{2,023(x-3,381)}\}, \quad (\rho = 0,9980, t_{st} = 103,6), \tag{32}$$

$$c(x) = -11,106 + \ln\{1 + e^{2,071(x-3,162)}\}, \quad (\rho = 0,9990, t_{st} = 163,2). \tag{33}$$

Les exposants α obtenus (qui ne sont pas ici des dimensions fractales, puisqu'ils ne caractérisent qu'une partie de la contribution) sont proches l'un de l'autre (et de la valeur critique 2). Les échelles de transition qui résultent de cet ajustement sont également proches sur les deux coefficients ($x = 3,16$, qui correspond à $r \sim 630$ m et $x = 3,38$, qui correspond à $r \sim 780$ m).

5.3. Ajustement global par une loi de transition : analyse complémentaire

L'ajustement ci-dessus est incomplet, car on a présupposé un coefficient 1 devant le terme en logarithme. Plutôt que d'ajuster séparément les deux coefficients $b(x)$ et $c(x)$, il peut être plus intéressant d'utiliser (en la validant) la quasi-invariance de l'altitude du maximum. On a vu en effet qu'on pouvait écrire une loi parabolique sous la forme

$$\ln N = a(x) + b(x)h + c(x)h^2 = c(x) [h - h_0(x)]^2 + d(x) \quad (34)$$

avec

$$h_0(x) = -\frac{b(x)}{2c(x)}, \quad d(x) = a(x) - \frac{b(x)^2}{4c(x)}. \quad (35)$$

L'avantage de cette approche est que les deux coefficients sont alors soumis à la même loi de transition (ce que suggère leur similitude sur les figures).

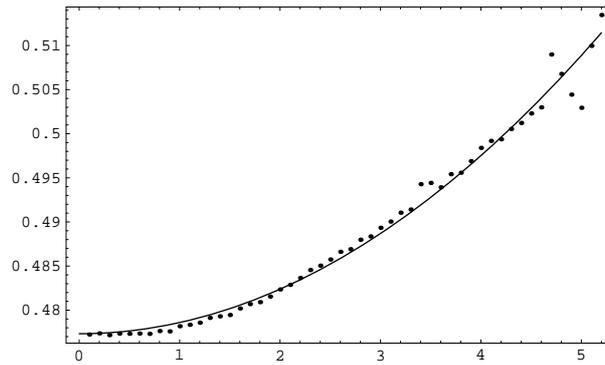


Figure 14. Variation de l'altitude h_0 (de 475 à 510 m) du maximum de $\ln N$, en fonction de l'échelle $x = \ln r$ et ajustement de cette variation par une loi quadratique

La figure 14 donne les valeurs de h_0 en fonction de $x = \ln r$. Ce résultat confirme sa quasi-invariance : $h_0(x)$ varie continument sur l'intervalle d'échelle $x = 0$ à 5,2 de moins de 40 m (entre 477 m et 513 m), avec une moyenne $\langle h_0 \rangle = 489$ m. Un ajustement quadratique de cette variation donne (en km) :

$$h_0(x) = (0,4773 \pm 0,0003) + (0,00126 \pm 0,00002) x^2. \quad (36)$$

Noter qu'une interprétation plus correcte de cette variation pourrait être une variation linéaire à partir du pixel minimal effectif 100 m ($\ln r = 1,32$) pour lequel $D = 1$ et une valeur constante pour les valeurs plus petites de $\ln r$ (qui ne représentent pas en fait de l'information nouvelle). Les écarts entre ces deux interprétations sont négligeables.

On peut alors comparer la fonction $b(x) = -2h_0(x)c(x)$, qui s'écrit

$$b(x) = (0,9546 + 0,00252 x^2)(-11,106 + \ln\{1 + \exp[2,071(x - 3,162)]\}) \quad (37)$$

aux données. On obtient la figure 15. On constate que l'accord est devenu meilleur que par l'ajustement direct, en particulier aux petits $\ln r$ où la nouvelle fonction prévoit une légère croissance effectivement observée.

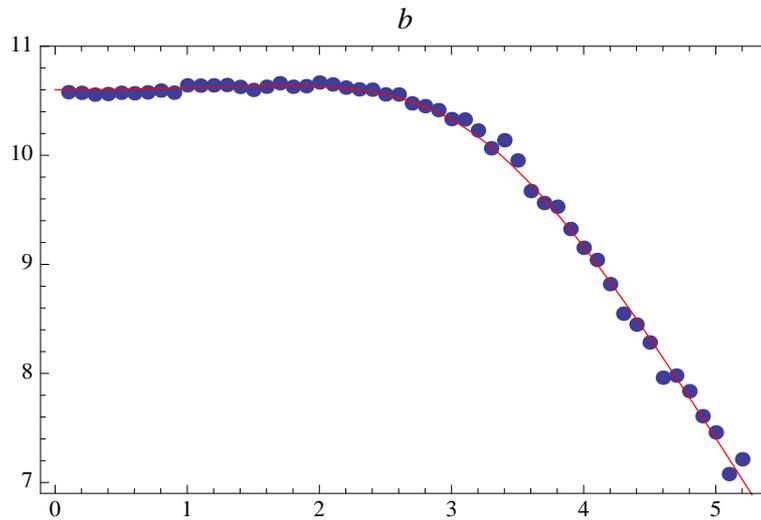


Figure 15. Ajustement du coefficient $b(x)$ déduit de la loi de transition établie pour le coefficient $c(x)$ (voir texte)

La relation $\ln N(x, h)$ est donc maintenant bien ajustée par la fonction :

$$\ln N(x, h) = (7,215 - 0,674x - 0,173x^2 + 0,0171x^3) + (\ln\{1 + \exp[2,071(x - 3,162)]\} - 11,106)h(h - 0,9546 - 0,00252x^2). \quad (38)$$

Elle est tracée en Figure 16 et se compare favorablement aux données d'origine (voir Figure 9).

La dimension fractale est ensuite donnée par la dérivée partielle de cette fonction, $D_F = -\partial \ln N(x, h) / \partial x$. Elle est tracée Figure 17 et peut être comparée au modèle polynomial de la figure 10. On constate une amélioration aux grandes valeurs de $x = \ln r$, le nouveau modèle rendant mieux compte de l'existence d'une dimension fractale constante asymptotique.

Cette loi peut paraître très complexe, mais elle est formée, comme on l'a vu, de divers éléments pour lesquels on peut individuellement envisager une explication :

- une contribution polynomiale à la variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle, obtenue en dérivant le premier terme $a(x)$ de $\ln N(x, h)$. On obtient : $0,674 + 0,346x - 0,0513x^2$. Cette contribution montre une variation totale de $\sim 0,2$, passant de 1,04 en $x = \ln r = 1,32$ ($r = 110$ m) à un maximum de 1,26, atteint pour $x = 3,37$ (ce qui est proche de l'échelle de transition fractal / non fractal sur les autres coefficients). Elle suggère l'existence d'une composante de « dynamique d'échelle »

qui s'ajoute à la transition fractal / non fractal (entre dépendance et indépendance d'échelle). Néanmoins une analyse plus poussée reste nécessaire pour trancher ce point, en particulier en ce qui concerne le terme quadratique $-0,0513 x^2$ qui décrit une légère décroissance de la dimension fractale aux tailles de boîte maximales (apparente sur la Figure 17). Celle-ci est vraisemblablement due à un biais de fenêtrage précisément lié à cette taille maximale accessible (celle du bassin versant du Gardon) comme semblent l'indiquer des simulations faites dans les mêmes conditions sur des modèles d'objets fractals mathématiques (Nottale, en préparation).

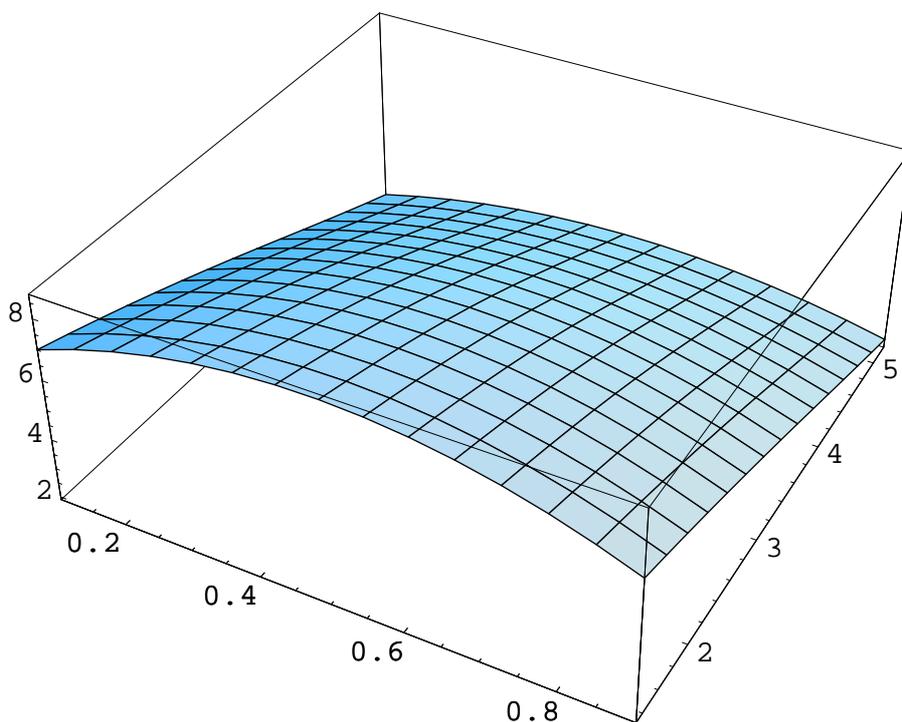


Figure 16. Tracé du modèle de transition fractal / non fractal ajusté sur $\ln N(h, x)$ (équation (38)), où h varie de 0,1 à 0,9 km et $x = \ln r$ de 1,32 ($r = 110$ m) à 5,2 ($r = 5,44$ km). À comparer aux résultats de mesures de la Figure 9

– une loi d'échelle asymptotique en loi de puissance avec un exposant $\alpha \approx 2$ pour les grandes valeurs de $x = \ln r$.

– une transition entre cette loi fractale à dimension constante et une indépendance d'échelle aux petites valeurs de $x = \ln r$. L'échelle centrale de cette transition correspond à une taille de boîte $r_0 = 0,63$ km. La loi de transition est donnée, à une constante près, par la relation

$$c(x) = \ln \left\{ 1 + \left(\frac{r}{0,63} \right)^{2,07} \right\}. \quad (39)$$

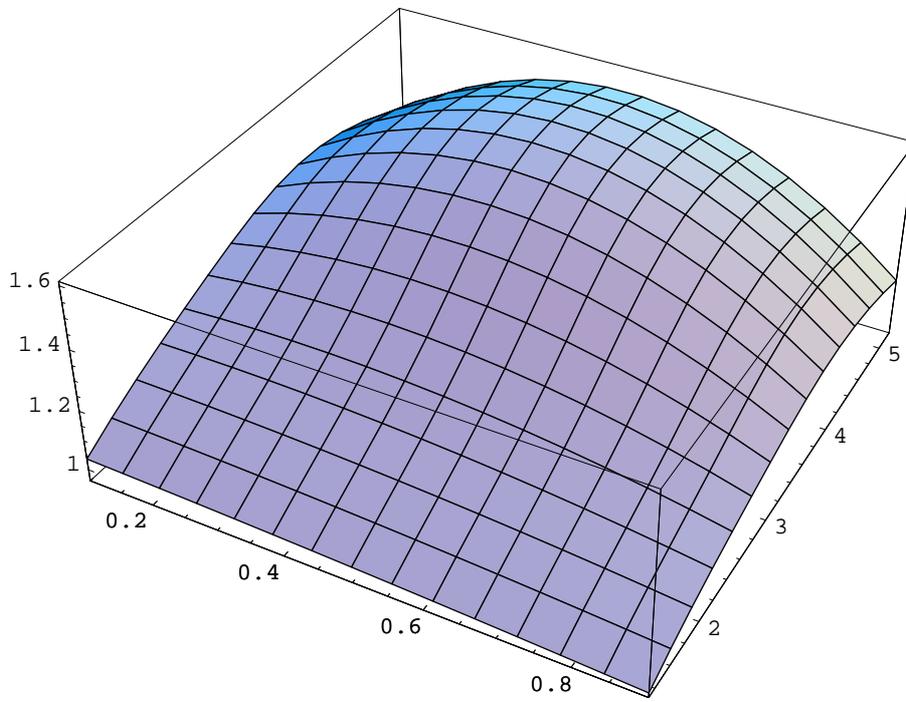


Figure 17. Tracé de la dimension fractale effective $D_F(x, h)$, pour $h = 0,1$ à $0,9$ km et $x = \ln r = 1,32$ à $5,20$ ($r = 110$ m à $5,44$ km), obtenue comme dérivée de l'ajustement de $\ln N(x, h)$ par un modèle de transition fractal / non fractal. D_F reste sous-estimée aux grandes échelles géographiques en raison du biais de petite taille

– une dépendance en h donnée par $h(h - 2h_0) + f(x)$ dépendant d'une fonction $h_0(x)$ qui varie relativement peu (de 475 à 510 m).

5.4. Compatibilité des deux ajustements

Il reste à résoudre un problème d'inconsistance apparente entre les ajustements. En effet, l'ajustement linéaire asymptotique (pour $x = 3,1 - 5,2$) a fourni une contribution à la dimension fractale asymptotique de pente $-(1,76 \pm 0,03)$ dans le terme en h^2 , alors que dans l'ajustement global, après développement, ce coefficient vaut $-2,07$.

La solution à ce problème est donnée Figure 18 (à comparer aux Figures 13 et 15), où on a poussé jusqu'à $x = 7$ le tracé de la loi ajustant $c(x)$ avec $\alpha = 2,07$ (en utilisant le même écart $\Delta \ln r = 0,1$ entre les points que pour les données). On y constate que la zone $x = 3,1-5,2$ est encore partiellement dans la transition et n'a pas atteint en fait le régime asymptotique de dimension fractale constante.

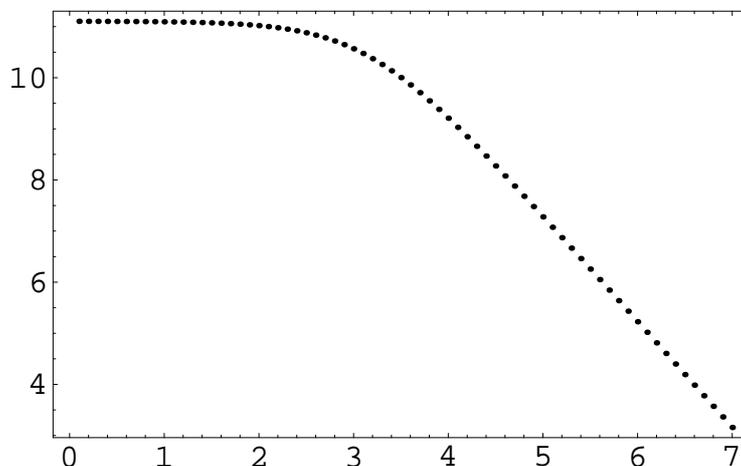


Figure 18. Variation attendue du coefficient $c(x)$ en fonction de l'échelle $x = \ln r$ pour une loi de transition fractal-non fractal. Le tracé a été poussé jusqu'à $x = 7$ de manière à mettre en évidence le petit écart résiduel de pente entre la zone accessible dans les données réelles (jusqu'à $x = 5,2$) et la pente asymptotique constante

On trouve pour cette zone un ajustement linéaire

$$-c(x) = (16,13 \pm 0,13) - (1,755 \pm 0,031)x, \quad (40)$$

ce qui signifie qu'on retrouve exactement la pente 1,76 de l'ajustement linéaire des données dans cette zone. Cette valeur n'est donc pas une vraie valeur asymptotique, mais une valeur intermédiaire. On s'en assure en faisant un ajustement dans la zone 5,3-7,0, ce qui donne

$$-c(x) = (17,615 \pm 0,004) - (2,0651 \pm 0,0007)x \quad (41)$$

où on obtient bien maintenant une valeur proche de 2,07. On retrouve une nouvelle fois un problème lié aux limitations de l'intervalle d'échelles disponible : il faudrait une échelle maximale environ 4 fois plus grande (ce qui correspondrait à environ 20 km) pour visualiser la valeur asymptotique des coefficients $b(x)$ et $c(x)$.

Cependant, en ce qui concerne la valeur de la dimension fractale asymptotique elle-même, celle-ci résulte d'une combinaison des différents coefficients et reste relativement peu affectée par ce petit écart : la valeur maximale $D_{FA} = 1,59 \pm 0,03$ (atteinte pour $h = 450-500$ m) se trouve donc confirmée (voir figure 17).

6. Conclusion et prospective

En conclusion, la présente analyse confirme et précise le comportement fractal généralisé obtenu précédemment sur le bassin versant du Gardon (Martin, 2006, 2007b,

Martin *et al.*, 2008). La dimension fractale y est fortement variable, aussi bien en fonction de l'altitude que de l'échelle elle-même.

La variation de la dimension fractale en fonction de l'altitude est systématiquement parabolique, ce qui s'explique aisément par la double contrainte $D_F = 1$ (relief lisse, non fractal) aux basses altitudes (niveau régressif de la Méditerranée au Wurm à environ -120 m) et au sommet (autour de 1000 m). Deux des trois coefficients de cette relation parabolique peuvent donc être « prédits » par cette approche.

La variation de la dimension fractale en fonction de l'échelle est très bien ajustée par un modèle de transition fractal / non fractal obtenu comme solution d'une équation différentielle d'échelle dans le cadre de la théorie de la relativité d'échelle.

Certains problèmes de biais liés à la nature des données et à la méthode d'analyse (comptage de boîtes) ont été considérés mais n'ont été que partiellement résolus. Une dimension fractale artificiellement inférieure à 1 (ce qui est interdit pour une courbe, dont la dimension topologique est 1) est obtenue pour les petites valeurs de $x = \ln r$. Ce biais a été partiellement corrigé en ne prenant en compte que les échelles supérieures à $\ln r = 1,32$, ce qui correspond à environ 100 m, soit 2 fois la taille du pixel IGN sur les données utilisées. Une analyse plus détaillée et une correction de ce biais feront l'objet d'un travail futur.

La croissance de la dimension fractale observée au-delà de cette limite est réelle. Par contre il manque des données de grandes échelles géographiques ($r < 100$ m) pour étudier de quelle manière se produit la transition vers $D_F = 1$. Une étude à venir utilisant des données à la résolution de 1 m et prenant en compte la correction du biais de petite taille de boîte permettra de trancher ce point.

L'écrasement de la variation de la dimension fractale aux grands $\ln r$ dans les données du Gardon a été confirmé comme réel. Le modèle de transition fractal / non fractal en rend compte en montrant que l'essentiel de la variation observée semble n'être rien d'autre que la transition continue vers un régime asymptotique (aux petites échelles géographiques) de dimension fractale constante. Le problème est que l'intervalle d'échelles sur lequel cette dimension constante est établie est assez étroit, étant limité par la taille maximale du bassin versant lui-même. Ce problème ne peut être dépassé dans ce cas, mais pourra l'être dans des études futures de reliefs plus étendus.

La légère re-décroissance de la dimension fractale aux plus grands $\ln r$ accessibles est vraisemblablement un biais, conséquence précisément de cet effet de fenêtre de petite échelle géographique (ou grandes échelles physiques).

Dans des travaux à venir, cette étude sera complétée par une détermination directe de la dimension fractale à partir des données – alors que dans la présente contribution, elle est déduite par dérivation de l'ajustement du comptage $\ln N(x, h)$. Une des questions en suspens qui sera alors abordée est celle de la détermination précise de la dimension fractale asymptotique maximale et de son éventuelle compréhension théorique. Elle est atteinte sur la CN450 pour laquelle on obtient $D_A = 1,584 \pm 0,010$

et la CN500 sur laquelle $D_A = 1,589 \pm 0,007$, en accord avec les autres déterminations. Une conjecture probable, pour laquelle plusieurs justifications seront apportées dans une prochaine publication, est qu'elle soit donnée par $D_F = \ln 3 / \ln 2 = 1,585$. Avec la détermination de cette valeur, les trois coefficients de la courbe parabolique qui décrit la variation de la dimension fractale asymptotique en fonction de l'altitude seront alors fixés.

De nombreuses autres études sont à envisager pour aller plus loin : relation au réseau hydrographique (Forriez *et al.*, 2011), déduction de ce réseau comme géodésiques de l'espace bidimensionnel, courbe et fractal qu'est un bassin versant, relation entre la courbure globale et les structures fractales, sachant que la fractalité d'un espace peut être décrite comme une courbure multi-échelle (Nottale 1993), calibration du comptage de boîte en dimension variable sur des modèles mathématiques d'objets fractals de propriétés connues, etc.

Sur le plan géographique, ce texte ouvre la voie à une géomorphologie théorique fondée sur la géométrie fractale qui est fondamentalement celle de la nature (Mandelbrot, 1975, 1982).

Tout en confirmant bien que le bassin versant est l'unité géographique conceptuelle qu'il faut considérer dans ce type d'analyse en raison de sa dimension fonctionnelle et des dynamiques morphogénétiques dont il est le siège, les paramètres identifiés montrent que certains d'entre eux peuvent avoir des valeurs qui dépendent (partiellement ?) des conditions énergétiques (élévation, masse d'eau), lithologiques (signature morphologique des roches) voire climatiques (formes climatiques) alors que l'organisation structurelle (transition fractal / non fractal, variation parabolique des valeurs des dimensions fractales de haut en bas, etc.) est vraisemblablement invariante. Cela définissant *de facto* un programme de recherches.

Bibliographie

Baulig H., 1959, Morphométrie, *Annales de géographie*, LXVIIIe année, n°369, p. 385-408.

Evans I. S., 1972, General geomorphometry, derivatives of altitude, and descriptive statistics. In : *Spatial analysis in geomorphology*, edited by R. Chorley, Harper & Row, Publishers, New York, p. 17-90.

Evans I. S., Dikau R., Tokunaga E., Ohmori H. et Hirano M. (edited by), 2003, *Concepts and Modelling in Geomorphology : International Perspectives*. Publié par : TERRAPUB, Tokyo.

Forriez M., 2010, *Caractérisation formelle des structures multi-échelles géographiques en relativité d'échelle. Exemples en géographie physique, géographie urbaine, géo-histoire et géographie du peuplement*. Thèse co-dirigée par L. Nottale et Ph. Martin et soutenue à l'Université d'Avignon et des Pays de Vaucluse (UAPV).

Forriez M., Martin Ph., Nottale., 2011, Comparaison entre la classification de Horton et la classification ascendante hiérarchique des confluences. Application au bassin amont des Gardons, in *Mobilité des formes et surface terrestre ; Des changements passés aux changements actuels* sous la direction de M. J. Penven, H. Regnaud et D. Mercier. Coll. Espace et territoire, Presses universitaires de Rennes, p. 55-67 et [http ://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/99/01/PDF/JJG-Forriez-Martin-Nottale-2009.pdf](http://hal.archives-ouvertes.fr/docs/00/41/99/01/PDF/JJG-Forriez-Martin-Nottale-2009.pdf)

Gleick J., 1989, *La théorie du chaos. Vers une nouvelle science*. Albin Michel éditeur, Paris, 424 p. Edition de poche coll. Champs, 1991.

Mandelbrot B., 1967, How long is the coast of Britain ? Statistical self-similarity and fractional dimension. In : *Classics on fractals*, edited by G. E. Edgar, 1993, Addison-Wesley publishing company, Reading, Massachusetts, USA, p. 351-358.

Mandelbrot B., 1975, *Les Objets Fractals*, Flammarion, Paris.

Mandelbrot B., 1982, *The fractal geometry of nature*, Freeman, San Francisco.

Martin Ph., 1991, *Hydromorphologie des géosystèmes karstiques des versants nord et ouest de la Sainte Baume (B. du Rh., Var ; France). Etude hydrologique, hydrochimique et de vulnérabilité à la pollution*. Thèse Université d'Aix Marseille II, 412 p., 291 Figure, 68 tab. [http ://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm](http://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm)

Martin Ph., 2000a, Quelle est la dimension du massif karstique de la Sainte Baume ? Eléments pour une théorie spatiale et fractale du karst. *Karstologia*, n°35, p.13-26.

Martin Ph., 2000b, Forme et rugosité des surfaces karstiques. Conséquences pour une théorie spatiale et fractale de l'interface terrestre. *Karstologia*, n°36, p.1-16.

Martin Ph., 2003a, Construire un objet géographique. Recherche d'une éthodologie. In : *Objets et indicateurs géographiques* sous la direction de J. Maby, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 42-88, 13 Figure, 1 graphe. Texte en ligne sur les sites : [http ://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm](http://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm)

Martin Ph., 2003b, Objectivation des formes en géographie et calculs d'indicateurs fractals. Exemples karstiques. In : *Objets et indicateurs géographiques* sous la direction de J. Maby, Collection Actes Avignon n°5, Université d'Avignon et UMR ESPACE 6012 du CNRS éditeurs, p. 153-268, 13 Figure, 1 graphe. Texte en ligne sur les sites : [http ://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm](http://www.geo.univ-avignon.fr/Personnel/MartinP.htm)

Martin Ph., 2004, *Modélisation fractale et structurelle des formes en géographie. Réflexion développée à partir d'exemples karstiques*. Habilitation à diriger les recherches. Université d'Avignon et des Pays du Vaucluse, tome 1, 173 p., tome 2, 314 p., tome 3, 176 p., 1 carte coul. ht.

Martin Ph., 2006, Logiques fractales et spatiales des reliefs du sud-est du Massif Central (France). Eléments pour une théorie structurelle et formelle en géomorphologie. 21^e Réunion des Sciences de la Terre, Dijon, décembre 2006, livre des résumés, Université de Bourgogne éditeur, p.181.

Martin Ph., 2007a, Caractérisation fractale du relief du Lodévois après extraction de tendances topographiques générales. *Revue internationale de géomatique. Informations géographiques. Structuration, extraction et utilisation*, sous la direction de Ch. Weber et P. Gançarski, Lavoisier-Hermès éditeur, vol. 17, n°3-4, Paris, p. 391-414.

Martin Ph., 2007b, Développement scalaire plus ou moins ample aux différentes altitudes du bassin versant du Gardon. Recherche de la grande échelle de coupure portant localement la transition fractal→non fractal. Livre des contributions au workshop : *La Théorie de la Relativité d'Echelle. Une base commune à une vision structurelle du monde ?* 1^{er} Workshop TRE Avignon les 6 et 7 décembre 2007, 3 Figure, p. 64-65.

Martin Ph., 2008, Approche fractale des Grands Causses (Massif Central, France). Structure spatiale de la relation existant entre l'altitude et la dimension fractale de courbes de niveau covariantes. Actes des Journées de l'Association Française de Karstologie de Sion (Suisse), Université de Lausanne organisateur, Coll. EDYTEM - *Cahiers de Géographie*, n° 7, p. 93-108.

Martin Ph., Forriez M., Nottale L., 2008, Modélisations fractales du relief et du réseau de drainage des Cévennes méditerranéennes entre l'Aigoual et le mont Lozère. Application au bassin versant du Gardon (France). 7^e Journées d'étude de l'Office Hydro Météorologique - Cévennes Vivarais. Résumé étendu, http://ltheln21.hmg.inpg.fr/OHM-CV/P007_JE.php

Martin Ph., Nottale L., Forriez M., soumis, Structures multi-échelles en géographie. Apports de la relativité d'échelle. Rencontres interdisciplinaires sur les systèmes complexes naturels et artificiels de Rochebrune, 16-22 janvier 2011 : *Echelles et modélisations multi-niveaux*. Sous la direction de D. Pumain, Editions Chemins de Traverse, Paris.

Nottale L., 1993, *Fractal Space-Time and Microphysics : Towards a Theory of Scale Relativity*, World Scientific, Singapore.

Nottale L., 1997, in *Scale invariance and beyond*, Proceedings of Les Houches School, B. Dubrulle, F. Graner & D. Sornette eds., (EDP Sciences, Les Ullis/Springer-Verlag, Berlin, New York), p. 249.

Nottale L., 1998, *La relativité dans tous ses états*, Hachette, Paris.

Nottale L., Chaline J. & Grou P., 2000, *Les arbres de l'évolution : Univers, Vie, Sociétés*, Hachette, Paris, 379 p.

Nottale L., 2002, in *Lois d'Echelle, Fractales et Ondelettes*, Traité IC2, eds. P. Abry, P. Gonçalvès et J. Levy Vehel, (Hermès Lavoisier), Vol. 2, Chap. 7, p. 233.

Nottale L., Chaline J. & Grou P., 2009, *Des fleurs pour Schrödinger : la relativité d'échelle et ses applications*, Ellipses, Paris.

Nottale L., 2011, *Scale Relativity and Fractal Space-Time : A New Approach to Unifying Relativity and Quantum Mechanics*, Imperial College Press, London.

Pelletier J., 2008, *Quantitative modeling of earth surface processes*. Cambridge University Press.

Popper K., 1989, *La quête inachevée*. Coll. Agora, Pocket, Calmann-Lévy éditeur, Paris.

Rodriguez-Iturbe I, Rinaldo A., 1997, *Fractal river basins. Chance and self-organisation*. Cambridge University Press editor.

Turcotte D., 1997, *Fractals and chaos in geology and geophysics*. Cambridge University Press editor, second edition.