

# Relativité d'échelle, nondifférentiabilité et espace-temps fractal \*

Laurent Nottale

CNRS UMR 8631, DAEC, Observatoire de Paris-Meudon, F-92195 Meudon Cedex, France; E-mail: laurent.nottale@obspm.fr

## Abstract

Après avoir posé le concept de relativité d'échelle, on rappelle comment celui-ci s'impose comme principe premier contraignant la description d'un espace-temps non-différentiable. En effet, l'abandon de la différentiabilité implique, si l'on garde la continuité, une dépendance explicite des coordonnées en fonction des résolutions, autrement dit une géométrie fractale pour l'espace-temps. En conséquence, la description physique peut continuer à se faire avec des équations différentielles, à condition que celles-ci agissent également dans l'espace des échelles. Différents niveaux de descriptions des lois d'échelles physiquement possibles (invariantes puis covariantes d'échelle) sont alors proposés, depuis l'autosimilarité la plus simple jusqu'à des lois d'échelle non linéaires ("dynamique d'échelle"), en incluant les couplages échelle-mouvement qu'on identifie aux transformations de jauge. Nous concluons en rappelant comment les effets induits sur la dynamique par les structures internes nondifférentiables transforment la mécanique classique en une mécanique de type quantique, puis en évoquant quelques exemples d'application de cette approche.

Mots-clés: relativité d'échelle, covariance d'échelle, résolutions spatio-temporelles.

## 1 Introduction

La théorie de la relativité d'échelle [15] consiste à appliquer le principe de relativité aux transformations d'échelle (en particulier aux transformations des résolutions spatio-temporelles). Dans la formulation d'Einstein [7], le principe de relativité consiste à exiger que les lois de la nature soient valides dans tout système de coordonnées, quel que soit son état. Depuis Galilée, ce principe avait été appliqué aux états de position (origine et orientation des axes) et de

---

\*26-07-2001. Paru dans le traité IC2: Volume "Lois d'échelle, Fractales et Ondelettes", Vol.2, Chap. 7, sous la direction de P. Abry, P. Gonçalves et J. Lévy Véhel, (Hermès Lavoisier 2002), p. 233.

mouvement du système de coordonnées (vitesse, accélération), états qui ont la propriété de n'être jamais définissables de manière absolue, mais seulement de manière relative. L'état d'un système de référence ne peut être défini que par rapport à un autre repère.

Il en est de même en ce qui concerne les changements d'échelle. L'échelle d'un système ne peut être définie que par rapport à un autre système, et possède donc bien la propriété fondamentale de relativité: seuls des rapports d'échelle ont un sens, jamais une échelle absolue. Dans la nouvelle approche, on réinterprète les résolutions, non plus seulement comme propriété de l'appareil de mesure et/ou du système mesuré, mais comme propriété intrinsèque à l'espace-temps, caractérisant l'état d'échelle du référentiel au même titre que les vitesses caractérisent son état de mouvement. Le principe de relativité d'échelle consiste alors à demander que les lois fondamentales de la nature s'appliquent quel que soit l'état d'échelle du système de coordonnées.

Quelle est la motivation pour ajouter un tel principe premier à la physique fondamentale ? Il s'impose dès l'instant où l'on veut généraliser la description actuelle de l'espace et du temps. Celle-ci se cantonne en général à des variétés différentiables (même si des singularités sont possibles en certains points particuliers). Une voie de généralisation de la physique actuelle consiste donc à tenter d'abandonner l'hypothèse de différentiabilité des coordonnées spatio-temporelles. Comme on va le voir, la conséquence principale d'un tel abandon est que l'espace-temps devient fractal, au sens où il acquiert une dépendance explicite (qui va jusqu'à la divergence) en fonction des résolutions spatio-temporelles.

## 2 Abandon de l'hypothèse de différentiabilité de l'espace-temps

Si l'on analyse l'état de la physique fondée sur le principe de relativité jusqu'à Einstein, on constate que c'est l'ensemble de la physique classique, y compris la théorie de la gravitation à travers la relativité généralisée du mouvement, qui est fondée sur ce principe. La physique quantique, bien que compatible avec les relativités galiléenne et restreinte du mouvement, semble y échapper en ce qui concerne ses fondations. On peut alors se demander si une nouvelle généralisation de la relativité qui incluerait dans ses conséquences les effets quantiques (ou au moins certains d'entre eux) reste possible. Or généraliser la relativité, c'est généraliser les transformations envisageables entre systèmes de coordonnées, donc la définition de ce que sont les systèmes de référence possibles, et finalement les concepts d'espace et d'espace-temps. La relativité générale d'Einstein repose sur l'hypothèse que l'espace-temps est riemannien, c'est-à-dire descriptible par une variété au moins deux fois différentiable: autrement dit, on peut définir un continuum d'événements spatio-temporels, puis des vitesses qui sont leur dérivées, puis des accélérations par une nouvelle dérivation. Dans ce cadre, les équations d'Einstein sont les plus générales des équations les plus simples qui soient covariantes dans des transformations de coordonnées deux

fois différentiables.

De même que le passage de la relativité restreinte à la relativité généralisée est permise par un abandon d'hypothèse restrictive, (celle de la platitude de l'espace-temps à travers la prise en considération d'espaces-temps courbes), une nouvelle ouverture est alors possible par l'abandon de l'hypothèse de différentiabilité. Il s'agira de décrire un continuum spatio-temporel qui ne soit plus forcément partout différentiable.

### 3 Vers un espace-temps fractal

La deuxième étape de la construction consiste à récupérer un outil physico-mathématique qui pourrait sembler avoir été perdu dans une telle généralisation. L'outil essentiel de la physique, depuis Galilée, Leibniz et Newton, ce sont les équations différentielles. Abandonner l'hypothèse de la différentiabilité de l'espace-temps, donc des systèmes de coordonnées et des transformations entre ces systèmes, n'est-ce pas abandonner les équations différentielles ?

Ce problème crucial peut en fait être contourné grâce à l'intervention du concept de géométries fractales en physique de l'espace-temps. Par leur biais, on peut traiter de non-différentiabilité à l'aide d'équations différentielles.

#### 3.1 Dépendance explicite des coordonnées en fonction des résolutions spatio-temporelles

Cette possibilité résulte du théorème suivant [15] [17] [19], lui même conséquence d'un théorème de Lebesgue. On démontre qu'une courbe continue mais presque partout non dérivable possède une longueur dépendant explicitement de la résolution à laquelle on la considère, et tendant vers l'infini quand l'intervalle de résolution tend vers zéro. Autrement dit, une telle courbe est fractale au sens général donné par Mandelbrot à ce terme [10] [11]. Appliqué à un système de coordonnées d'un espace-temps non-différentiable, ce théorème implique une géométrie fractale pour cet espace-temps [24] [31] [8], aussi bien que pour le référentiel. De plus, c'est la dépendance en fonction des résolutions elle-même qui résoud le problème posé. Considérons en effet la définition de la dérivée, appliquée par exemple à une coordonnée (ce qui définit la vitesse):

$$v(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \left( \frac{x(t + dt) - x(t)}{dt} \right) \quad (1)$$

La non-différentiabilité est la non-existence de cette limite. Celle-ci étant de toutes façons physiquement inatteignable (l'atteindre effectivement nécessiterait une énergie infinie d'après la relation temps-énergie de Heisenberg), on redéfinit  $v$  comme  $v(t, dt)$ , fonction du temps  $t$  et de l'élément différentiel  $dt$  identifié à un intervalle de résolution, considéré comme nouvelle variable. La question n'est alors plus la description de ce qui se passe à la limite, mais bien du comportement de cette fonction au cours de zooms successifs sur l'intervalle  $dt$ .

### 3.2 De la continuité et la nondifférentiabilité à la fractalité

On démontre [15] [17][2] que la longueur  $\mathcal{L}$  d'une courbe continue et nulle part (ou presque nulle part) différentiable dépend explicitement de la résolution  $\varepsilon$  à laquelle on la considère, et, de plus, que  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  reste strictement croissante et  $\rightarrow \infty$  quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . En d'autres termes cette courbe est fractale (nous utiliserons le mot 'fractal' en ce sens général tout au long de ce chapitre).

Considérons en effet une courbe (que nous choisirons être une fonction  $f(x)$  pour simplifier) dans le plan euclidien, qui soit continue mais nulle part différentiable entre deux points  $A_0\{x_0, f(x_0)\}$  et  $A_\Omega\{x_\Omega, f(x_\Omega)\}$ . Comme  $f$  est non-différentiable, il existe un point  $A_1$  de coordonnées  $\{x_1, f(x_1)\}$  avec  $x_0 < x_1 < x_\Omega$ , tel que  $A_1$  n'est pas sur le segment  $A_0 A_\Omega$ . Donc la longueur totale  $\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}(A_0 A_1) + \mathcal{L}(A_1 A_\Omega) > \mathcal{L}_0 = \mathcal{L}(A_0 A_\Omega)$ . On peut maintenant itérer l'argument et trouver deux coordonnées  $x_{01}$  et  $x_{11}$  avec  $x_0 < x_{01} < x_1$  et  $x_1 < x_{11} < x_\Omega$ , telles que  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}(A_0 A_{01}) + \mathcal{L}(A_{01} A_1) + \mathcal{L}(A_1 A_{11}) + \mathcal{L}(A_{11} A_\Omega) > \mathcal{L}_1 > \mathcal{L}_0$ . Par iteration on construit finalement des approximations successives de la fonction  $f(x)$  recherchée,  $f_0, f_1, \dots, f_n$  dont les longueurs  $\mathcal{L}_0, \mathcal{L}_1, \dots, \mathcal{L}_n$  augmentent de manière monotone quand l'intervalle de résolution  $\varepsilon \approx (x_\Omega - x_0) \times 2^{-n}$  tend vers zéro. En d'autres mots, la continuité et la nondifférentiabilité impliquent une dépendance d'échelle monotone de  $f$  en fonction de la résolution  $\varepsilon$ .

Cependant la fonction  $\mathcal{L}(\varepsilon)$  pourrait être croissante mais converger quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Il n'en est rien : la deuxième étape de la démonstration, qui établit la divergence de  $\mathcal{L}(\varepsilon)$ , est une conséquence du théorème de Lebesgue (1903). Celui-ci énonce en effet qu' *une courbe de longueur finie est presque partout différentiable* (voir par exemple [38]). En conséquence, une courbe nondifférentiable est nécessairement infinie.

Ces deux résultats pris ensemble établissent le théorème ci-dessus sur la divergence d'échelle des fonctions continues non-différentiables. Une démonstration directe utilisant l'analyse non-standard a été donnée dans ([15], p.82). Ce théorème se généralise aisément à des courbes, des surfaces, etc... puis des espaces.

Qu'en est-il de la proposition inverse ? Une fonction continue dont la longueur est divergente d'échelle entre n'importe quel couple de point tel que  $x_A - x_B$  soit fini (i.e., partout ou presque partout divergente d'échelle) est-elle non-différentiable ? La réponse est la suivante:

(i) Si la longueur diverge aussi vite [ $\mathcal{L}(\varepsilon) \propto (\lambda/\varepsilon)^\delta$ ] ou plus vite qu'une loi de puissance (par exemple, divergence exponentielle  $\mathcal{L}(\varepsilon) \propto \exp(\lambda/\varepsilon)$ , etc...), alors la fonction est certainement nondifférentiable. Ainsi le comportement fractal le plus simple (invariant d'échelle, self-similaire, à dimension fractale constante) joue bel et bien un rôle critique dans ce théorème: il définit la limite au delà de laquelle la non-différentiabilité est assurée.

(ii) Dans le domaine intermédiaire des divergences lentes (par exemple, divergences logarithmiques  $\mathcal{L}(\varepsilon) \propto \ln(\lambda/\varepsilon), \ln(\ln(\lambda/\varepsilon))$ , etc...), la fonction peut être soit différentiable soit non-différentiable.

Ceci peut être démontré en examinant la manière dont augmente la longueur

de la courbe et dont change la pente dans des zooms successifs par un facteur constant  $\rho$ . Dans le cas d'une loi de puissance, la longueur augmente régulièrement quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ ,  $\mathcal{L}(\rho\varepsilon) = \mu\mathcal{L}(\varepsilon)$ , ce qui implique un changement continu de pente, donc la non-différentiabilité. Une divergence plus rapide qu'une loi de puissance ne pourra qu'amplifier cet effet.

Par contre, pour les divergences plus lentes qu'une loi de puissance, deux exemples suffisent à montrer que les deux situations sont possibles. Il est possible que dans des zooms successifs il finisse toujours par apparaître de nouvelles structures à des échelles arbitrairement petites, mais ceci de manière très rare. Dans ce cas la divergence peut être arbitrairement lente alors que la pente ne serait pas définie à la limite. Inversement, certaines courbes peuvent montrer des changements de pente continus dans les zooms successifs, mais décroissant avec l'échelle de manière telle qu'à la limite la pente soit définie. On a alors des objets qu'on peut considérer comme fractals d'après la définition générale de Mandelbrot (montrant des structures à toutes les échelles) mais qui restent néanmoins différentiables. Ainsi le théorème inverse n'est pas vrai: "fractal  $\not\Rightarrow$  nondifférentiable".

### 3.3 Description de processus nondifférentiables par des équations différentielles

Ce résultat est une clé pour permettre la description de processus non-différentiables à l'aide d'équations différentielles. Il mène en effet à introduire les résolutions de manière explicite dans l'expression des diverses quantités physiques ainsi que dans les équations fondamentales de la physique. Ceci signifie qu'une grandeur physique  $f$ , qui dépend ordinairement des variables spatio-temporelles  $x$ , i.e.,  $f = f(x)$ , doit maintenant être décrite comme dépendant aussi de la résolution,  $f = f(x, \varepsilon)$ . Autrement dit, au lieu de ne prendre en compte que l'objet mathématique limite nondifférentiable  $f(x)$ , on travaillera avec toutes ses "approximations" obtenues en le lissant avec des boules de résolution  $\varepsilon$ :

$$f(x, \varepsilon) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi(x, y, \varepsilon) f(x + y) dy. \quad (2)$$

Ici  $\Phi(x, y, \varepsilon)$  est une fonction de lissage centrée sur  $x$ , par exemple une gaussienne de dispersion  $\approx \varepsilon$ . Plus généralement, on peut utiliser des transformations par ondelettes, basées sur un filtre qui n'est pas nécessairement conservatif.

Un tel point de vue est particulièrement bien adapté aux applications en physique: en effet, toute mesure effective est toujours effectuée à une résolution finie (voir [15] pour des commentaires supplémentaires sur ce point). Dans ce cadre,  $f(x)$  s'identifie à la limite quand  $\varepsilon \rightarrow 0$  de la famille de fonctions  $f(x, \varepsilon)$ , ou, dit autrement, de la fonction à deux variables  $f(x, \varepsilon)$ . Mais alors que  $f(x, 0)$  est nondifférentiable au sens où la limite quand  $dx$  tend vers zéro de  $df/dx$  n'existe pas, par contre  $f(x, \varepsilon)$ , qui est ce qu'on a appelé 'fonction fractale' (et qui est en fait définie via une classe d'équivalence qui prend en compte le fait que  $\varepsilon$  est une résolution, voir [15]), est maintenant différentiable pour tout  $\varepsilon \neq 0$ .

Le problème de la description physique de tous les processus où intervient une telle fonction  $f$  est maintenant posé autrement. Dans la physique différentiable standard, il s'agit de trouver les équations différentielles qui mettent en oeuvre les dérivées de  $f$  par rapport aux coordonnées spatio-temporelles  $x$ , c'est-à-dire  $\partial f/\partial x$ ,  $\partial^2 f/\partial x^2$ , dérivées qui vont intervenir dans les lois du déplacement et du mouvement. La méthode intégr-différentielle consiste à effectuer une telle description locale des déplacements spatio-temporels élémentaires, puis de leurs effets sur les quantités physiques, puis enfin à intégrer pour obtenir les propriétés à grande échelle du système considéré. Une telle méthode a pu être taxée de "réductionniste": elle est effectivement adaptée aux problèmes classiques dans lesquelles aucune information nouvelle n'apparaît quand on change d'échelle.

La situation est complètement différente en ce qui concerne les systèmes caractérisés par une géométrie fractale et/ou par la non-différentiabilité. On trouve de tels comportements vers les très petites et très grandes échelles, mais aussi plus généralement dans des systèmes chaotiques ou turbulents, et probablement dans pratiquement tous les systèmes biologiques.

Dans de tels cas, une information nouvelle apparaît quand on change d'échelle, et le projet consistant à vouloir réduire le comportement du système à une échelle (en général à grande échelle) à partir de la description faite à une autre échelle (en général, la plus petite échelle possible,  $\delta x \rightarrow 0$ ) semble perdre tout sens et devenir sans espoir. La proposition faite en relativité d'échelle consiste précisément à renoncer à cet espoir et à introduire un nouveau cadre de pensée dans lequel toutes les échelles coexistent à l'intérieur d'un espace relatif des échelles, et sont reliées entre elles à travers des équations différentielles d'échelle.

En effet, en physique non-différentiable,  $\partial f(x)/\partial x = \partial f(x,0)/\partial x$  n'existe plus. Mais la physique d'un processus donné sera complètement décrite si l'on parvient à connaître  $f(x, \varepsilon)$ , qui reste différentiable (en  $x$  et en  $\varepsilon$ ) pour toutes les valeurs finies de  $\varepsilon$ . Une telle fonction à deux variables (qui s'écrit plus précisément, pour être complet,  $f(x(\varepsilon), \varepsilon)$ ) peut être solution d'une équation différentielle impliquant  $\partial f(x, \varepsilon)/\partial x$  mais aussi  $\partial f(x, \varepsilon)/\partial \ln \varepsilon$ . Plus généralement, on sera amené à prendre en compte des lois non-linéaires, si bien que l'on s'attend à voir les équations de la physique prendre la forme d'équations aux dérivées partielles du deuxième ordre, qui contiendront donc, en plus des dérivées premières, des opérateurs tels que  $\partial^2/\partial x^2$  (lois du mouvement),  $\partial^2/\partial (\ln \varepsilon)^2$  (lois d'échelle), mais aussi  $\partial^2/\partial x \partial \ln \varepsilon$ , qui décriront le couplage entre échelle et mouvement (voir plus loin).

Quelle est la signification physique de la différentielle  $\partial f(x, \varepsilon)/\partial \ln \varepsilon$ ? Ce n'est rien d'autre que la variation de la grandeur physique  $f$  sous une transformation d'échelle infinitésimale, c'est-à-dire sous une dilatation de résolution. Plus précisément, considérons la longueur d'une courbe non-différentiable  $\mathcal{L}(\varepsilon)$ , qui peut représenter plus généralement une coordonnée curviligne fractale  $\mathcal{L}(x, \varepsilon)$ . Une telle coordonnée généralise à un espace-temps fractal et non-différentiable le concept de coordonnée curviligne introduite en relativité générale d'Einstein pour les espace-temps courbes riemanniens [13].

### 3.4 Opérateur différentiel de dilatation

Appliquons une dilatation infinitésimale  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon' = \varepsilon(1+d\rho)$  à la résolution. Dans ce qui suit, on omet la dépendance en  $x$  pour simplifier les notations, sachant que nous nous intéressons pour le moment à de pures transformations d'échelle. On obtient:

$$\mathcal{L}(\varepsilon') = \mathcal{L}(\varepsilon + \varepsilon d\rho) = \mathcal{L}(\varepsilon) + \frac{\partial \mathcal{L}(\varepsilon)}{\partial \varepsilon} \varepsilon d\rho = (1 + \tilde{D}d\rho)\mathcal{L}(\varepsilon) \quad (3)$$

où  $\tilde{D}$  est par définition l'opérateur de dilatation. La comparaison des deux derniers membres de cette équation donne:

$$\tilde{D} = \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} = \frac{\partial}{\partial \ln \varepsilon}. \quad (4)$$

Cette forme bien connue de l'opérateur infinitésimal de dilatation, obtenue ici par l'application de la méthode de Gell-Mann-Levy (voir par exemple [1]) démontre définitivement que la variable "naturelle" en ce qui concerne les changements de résolution est  $\ln \varepsilon$ . Aussi les équations différentielles d'échelle à construire vont bien impliquer des expressions telles que  $\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon) / \partial \ln \varepsilon$ .

Quelle forme vont prendre de telles équations ? En fait, des équations décrivant la dépendance en échelle de grandeurs physiques ont déjà été introduites en physique: ce sont les équations du groupe de renormalisation, développées en particulier dans l'approche "multiples échelles de longueur" de K. Wilson [39]. Dans sa forme la plus simple, une équation du type 'groupe de renormalisation' pour une grandeur comme  $\mathcal{L}$  peut être interprétée comme exprimant que la variation de  $\mathcal{L}$  sous une transformation d'échelle infinitésimale  $d \ln \varepsilon$  ne dépend que de  $\mathcal{L}$  lui-même. Autrement dit,  $\mathcal{L}$  détermine le comportement physique entier, y compris sous les transformations d'échelle. Ceci s'écrit:

$$\frac{\partial \mathcal{L}(x, \varepsilon)}{\partial \ln \varepsilon} = \beta(\mathcal{L}). \quad (5)$$

Une telle équation (et ses généralisations), dont nous allons analyser plus à fond le comportement dans ce qui suit, n'est rien d'autre que l'équivalent différentiel de ce que sont les générateurs dans le cas des objets fractals construits par itérations (comme par exemple la courbe de von Koch). Mais au lieu de passer d'une étape à la suivante de la construction à l'aide de dilatations finies discrètes (des facteurs 3 successifs dans le cas de la courbe de von Koch), on passe de  $\ln \varepsilon$  à  $\ln \varepsilon + d \ln \varepsilon$ . En d'autres termes, le calcul différentiel effectué dans l'espace des échelles permet de décrire un comportement non-différentiable (à la limite) par des équations différentielles.

## 4 Relativité et covariance d'échelle

Il s'agit ainsi de compléter notre description actuelle, qui est faite en terme d'espace (de positions), d'espace-temps ou d'espace des phases, par un espace

des échelles. De même que les vitesses caractérisent l'état de mouvement du système de coordonnées, on considérera que les résolutions caractérisent son état d'échelle. La nature relative des intervalles de résolution temporel et spatiaux s'impose d'elle-même: seul un rapport d'intervalles de longueur ou de temps peut être défini, jamais leur valeur absolue, comme en témoigne la nécessité d'avoir toujours recours à des unités.

Cette relativité des échelles permet de postuler un principe de relativité d'échelle, selon lequel les lois fondamentales de la nature doivent s'appliquer quel que soit l'état d'échelle du système de référence.

Dans ce cadre, on appellera covariance d'échelle l'invariance de forme des équations de la physique sous les transformations des résolutions spatio-temporelles. (Noter que cette expression a été introduite par d'autres auteurs en un sens légèrement différent, comme généralisation de l'invariance d'échelle). Il faut prendre garde également au fait qu'une multiple covariance devra être mise en oeuvre dans une telle tentative, car il faudra combiner celle qui concerne le mouvement, la nouvelle covariance d'échelle, ainsi que les couplages entre les deux. Nous serons ainsi amenés à définir plusieurs types différents de dérivation covariante qu'il s'agira de bien distinguer: l'une strictement sur les échelles, une autre qui décrit les effets induits sur la dynamique par les structures internes en échelle (que nous avons appelée "dérivée covariante d'échelle" par abus de langage dans des publications antérieures, et qui transforme la mécanique classique en une mécanique de type quantique), enfin une dérivée covariante qui s'identifie à celle des théories de jauge et qui décrit des effets non-linéaires de couplage échelle-mouvement.

## 5 Equations différentielles d'échelle

Nous pouvons maintenant passer à l'étape suivante, et construire des équations différentielles d'échelle ayant une signification physique, puis chercher leurs solutions. Pour ce faire, nous serons guidés par l'analogie avec les lois du mouvement et par la contrainte que de telles équations doivent satisfaire au principe de relativité d'échelle.

Nous retrouverons dans un premier temps le comportement fractal auto-similaire à dimension constante. Dans une transformation d'échelle, une telle loi possède la structure mathématique du groupe de Galilée, et satisfait donc, de manière simple, au principe de relativité.

L'analogie avec le mouvement peut être poussée plus loin. On sait, d'une part, que le groupe de Galilée n'est qu'une approximation du groupe de Lorentz (correspondant à la limite  $c \rightarrow \infty$ ), d'autre part que tous deux restent une description d'un comportement inertiel, alors que c'est avec la dynamique que la physique du mouvement trouve toute sa complexité.

Il en est de même du point de vue des lois d'échelle. Les fractals de dimension constante sont l'équivalent pour les échelles de ce qu'est l'inertie galiléenne pour le mouvement. On peut alors proposer de généraliser les lois de dilatation et de contraction usuelles de deux manières.

(i) L'une consiste à introduire un groupe de Lorentz de transformation d'échelle [14]. Il y apparait une échelle de résolution finie, minimale ou maximale, invariante sous les dilatations, qui remplace le zéro ou l'infini tout en gardant les propriétés physiques de ceux-ci. Nous avons proposé d'identifier ces échelles respectivement à la longueur de Planck et à l'échelle de la constante cosmologique [14] [15] [17]. Cette situation correspond cependant toujours à une transformation d'échelle linéaire sur les résolutions.

(ii) L'autre consiste à prendre en compte des transformations d'échelle non-linéaire, c'est-à-dire à passer à une "dynamique d'échelle" [19] et, si possible, à une relativité généralisée d'échelle. Ce sont des exemples de telles lois généralisées que nous allons considérer dans ce qui suit, après avoir retrouvé le comportement fractal standard invariant d'échelle (et la brisure de cette symétrie) comme solution des équations différentielles d'échelles les plus simples possibles (du premier ordre).

## 5.1 Dimension fractale constante: relativité d'échelle "galiléenne"

Les lois de puissance rencontrées dans les comportements fractals auto-similaires peuvent être identifiées comme les plus simples des lois recherchées. Considérons la plus simple des équations d'échelle possible, qui s'écrit comme une équation aux valeurs propres de l'opérateur de dilatation:

$$\tilde{D}\mathcal{L} = b\mathcal{L}. \quad (6)$$

Sa solution est une loi fractale divergente standard:

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\lambda_0/\varepsilon)^\delta, \quad (7)$$

où  $\delta = -b = D - D_T$ ,  $D$  étant la dimension fractale, supposée constante et  $D_T$  la dimension topologique. Il peut s'agir par exemple de la longueur mesurée sur une courbe fractale, (qui décrira en particulier une coordonnée dans un système de référence fractal).

Une telle loi correspond en ce qui concerne les échelles à ce qu'est l'inertie du point de vue du mouvement. On peut s'en assurer facilement en lui appliquant une transformation de résolution. Sous une telle transformation  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ , on obtient:

$$\ln(\mathcal{L}'/\lambda) = \ln(\mathcal{L}/\lambda) + \delta \ln(\varepsilon/\varepsilon') \quad ; \quad \delta' = \delta, \quad (8)$$

où l'on reconnaît la structure mathématique du groupe de transformation de Galilée entre systèmes inertiels: la substitution (mouvement  $\rightarrow$  échelle) se traduit par les correspondances  $x \rightarrow \ln(\mathcal{L}/\lambda), t \rightarrow \delta, v \rightarrow \ln(\varepsilon/\varepsilon')$ . Noter la manifestation de la relativité des résolutions du point de vue mathématique: elles n'interviennent que par leurs rapports et l'échelle de référence  $\lambda_0$  a disparu dans la relation (8).

En accord avec l'analyse précédente du statut des résolutions en physique, la dimension d'échelle joue pour les échelles le rôle joué par le temps en ce qui concerne le mouvement, et le logarithme du rapport des résolutions celui de la

vitesse. La loi de composition des dilatations écrite sous forme logarithmique confirme cette identification avec le groupe de Galilée:

$$\ln(\varepsilon''/\varepsilon) = \ln(\varepsilon''/\varepsilon') + \ln(\varepsilon'/\varepsilon), \quad (9)$$

formellement identique à la composition galiléenne des vitesses,  $w = u + v$ .

## 5.2 Brisure de l'invariance d'échelle: échelles de transition

L'expression (7) est invariante d'échelle. Cette invariance est spontanément brisée par l'existence du déplacement et du mouvement. Changeons en effet l'origine du système de coordonnées. Nous obtenons

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\lambda_0/\varepsilon)^\delta + \mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1[1 + (\lambda_1/\varepsilon)^\delta] \quad (10)$$

où  $\lambda_1 = \lambda_0(\mathcal{L}_0/\mathcal{L}_1)^{1/\delta}$ . Alors que l'échelle  $\lambda_0$  restait arbitraire, l'échelle  $\lambda_1$  (qui reste relative du point de vue de l'espace-temps) prend le sens d'une échelle de brisure de symétrie d'échelle (autrement dit, de transition fractal-non fractal dans l'espace des échelles). En effet, il est aisé de constater que pour  $\varepsilon \gg \lambda_1$ ,  $\mathcal{L} \approx \mathcal{L}_1$  et ne dépend plus de la résolution, tandis que pour  $\varepsilon \ll \lambda_1$ , on récupère la dépendance en échelle donnée par l'Eq. 7, asymptotiquement invariante d'échelle.

Or ce comportement (Eq.10), qui satisfait donc au double principe de relativité du mouvement et d'échelle, est précisément obtenu comme solution de la plus simple des équations différentielle en échelle qu'on puisse écrire (équation du premier ordre, ne dépendant que de  $\mathcal{L}$  lui-même, cette dépendance étant développable en série de Taylor: le cas précédent correspond à la simplification  $a = 0$ ):

$$d\mathcal{L}/d\ln \varepsilon = \beta(\mathcal{L}) = a + b\mathcal{L} + \dots \quad (11)$$

La solution de l' Eq. 11 est effectivement donnée par l'expression (10), avec  $\delta = -b$ ,  $\mathcal{L}_1 = -a/b$ , sachant que  $\lambda_1$  est une constante d'intégration.

Noter que si l'on pousse plus loin le développement limité, on obtient des solutions montrant plusieurs échelles de transition, en accord avec le comportement observé de nombreux objets fractals naturels [11]. En particulier, en allant jusqu'au deuxième ordre, on trouve des structures fractales avec un cut-off inférieur et un cut-off supérieur. On peut également obtenir des comportements dépendant d'échelle vers les petites et les grandes échelles, mais qui en sont indépendants aux échelles intermédiaires.

## 5.3 Lois d'échelle non-linéaires : équations du deuxième ordre, invariance d'échelle discrète, lois log-périodiques

Parmi les corrections à l'invariance d'échelle (caractérisée par des lois de puissance), l'une d'entre elles est amenée à jouer un rôle potentiellement important dans de nombreux domaines qui ne se réduisent pas à la seule physique. Il s'agit des lois log-périodiques, qui peuvent être définies par l'apparition d'exposants d'échelle ou de dimensions fractales complexes.

Sornette et al. (voir [35] [36] et les références incluses) ont montré qu'un tel comportement fournit une description satisfaisante et potentiellement prédictive de nombreux phénomènes de crise temporelle, incluant tremblements de terre et krachs boursiers. Chaline et al. [3] ont utilisé de telles lois d'échelle comme modèle de la chronologie des sauts évolutifs majeurs dans l'évolution des espèces, et Nottale et al. [29] ont montré qu'elles s'appliquaient aussi à la chronologie des grandes crises économiques depuis le Néolithique (voir pour plus de détails [27]). Il s'agit là d'une première étape vers la description d'un type de comportement de crises temporelles qui pourrait se révéler très général, d'autant que des travaux récents ont validé ces premiers résultats [37]. Un modèle d'intermittence en a récemment été proposé [34].

Nous allons rappeler ici comment on peut obtenir une correction log-périodique à une loi de puissance [20] à partir de l'exigence de covariance d'échelle [13], c'est-à-dire de conservation de la forme des équations dépendantes d'échelle (voir aussi [32]).

Considérons une variable explicitement dépendante de la résolution,  $\Phi(\varepsilon)$ . Dans les applications considérées, la variable  $\varepsilon$  sera identifiée à l'intervalle de temps  $T - T_c$ , où  $T_c$  est la date critique. Supposons que  $\Phi$  satisfasse à une équation différentielle du premier ordre du type groupe de renormalisation,

$$\frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} - D\Phi = 0, \quad (12)$$

dont la solution est une loi de puissance,  $\Phi(\varepsilon) \propto \varepsilon^D$ .

Dans la recherche de corrections d'ordre suivant à cette loi, on remarquera qu'introduire directement un exposant complexe n'est pas satisfaisant: cela conduirait à des fluctuations log-périodiques de grande ampleur plutôt qu'à une correction à la loi de puissance pouvant rester petite. Nous allons donc, dans une deuxième étape, faire l'hypothèse que l'annulation de la différence (Eq.12) n'était qu'approximative, et que le deuxième membre de cette équation est en fait non nul:

$$\frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} - D\Phi = \chi. \quad (13)$$

Nous exigerons alors que la nouvelle fonction  $\chi$  soit solution d'une équation qui garde la même forme que l'équation initiale:

$$\frac{d\chi}{d \ln \varepsilon} - D'\chi = 0. \quad (14)$$

En posant  $D' = D + \delta$ , on trouve alors que  $\Phi$  est solution d'une équation générale du deuxième ordre

$$\frac{d^2\Phi}{(d \ln \varepsilon)^2} - B \frac{d\Phi}{d \ln \varepsilon} + C\Phi = 0. \quad (15)$$

où  $B = 2D + \delta$  et  $C = D(D + \delta)$ . Cette solution s'écrit  $\Phi(\varepsilon) = a\varepsilon^D(1 + b\varepsilon^\delta)$ , où  $b$  peut maintenant être arbitrairement petit. Finalement, le choix d'un exposant imaginaire  $\delta = i\omega$  mène à une solution dont la partie réelle inclut une correction log-périodique:

$$\Phi(\varepsilon) = a\varepsilon^D[1 + b \cos(\omega \ln \varepsilon)]. \quad (16)$$

Des fluctuations log-périodiques ont également été obtenues dans le cadre relativiste d'échelle à travers la ré-interprétation de l'invariance de jauge et de la nature de l'électromagnétisme qui peut y être proposée (voir plus loin et [17]).

#### 5.4 Dimension fractale variable: équations d'Euler-Lagrange en échelle

Considérons maintenant le cas de la “dynamique d'échelle”. Comme nous l'indiquons dans ce qui précède, le comportement strictement invariant d'échelle à dimension fractale constante correspond à un comportement libre du point de vue de la physique d'échelle. Aussi, de même qu'il existe des forces qui impliquent un écart au mouvement inertiel, on s'attend également à voir les systèmes fractals naturels présenter des distorsions par rapport au comportement auto-similaire. Par analogie, de telles distorsions peuvent, dans une première étape, être attribuées à l'effet d'une “force d'échelle” ou encore d'un “champ d'échelle”.

Avant d'introduire ce concept, rappelons le renversement de signification qui doit être effectué en ce qui concerne les variables d'échelle, en comparaison avec la description usuelle des objets fractals. Ce renversement est parallèle, en ce qui concerne les échelles, à celui qui fut opéré pour les lois du mouvement dans le passage de lois “aristotéliennes” aux lois galiléennes.

Du point de vue aristotélien, le temps est la mesure du mouvement: il se définit donc à partir de l'espace et de la vitesse. De même, la dimension fractale est définie en général à partir de la mesure de l'objet fractal (par exemple la longueur d'une courbe, l'aire d'une surface, etc...) et de la résolution:

$$“t = x/v” \leftrightarrow \delta = D - D_T = d \ln \mathcal{L} / d \ln(\lambda/\varepsilon). \quad (17)$$

Avec Galilée, le temps devient une variable primaire et la vitesse se déduit de l'espace et du temps, qui se retrouvent sur un même plan, sous forme d'un espace-temps (qui reste cependant dégénéré car la vitesse limite  $c$  y est implicitement infinie). Ceci implique le caractère vectoriel de la vitesse et son aspect local (finalement mis en oeuvre par sa définition comme dérivée de la position par rapport au temps).

Le même renversement peut s'appliquer aux échelles. La dimension d'échelle  $\delta$  devient elle-même variable primaire, traitée sur le même plan que l'espace et le temps, et les résolutions sont alors définies comme dérivées à partir de la coordonnée fractale et de  $\delta$  (c'est-à-dire comme “vitesses d'échelle”):

$$V = \ln \frac{\lambda}{\varepsilon} = d \ln \mathcal{L} / d\delta. \quad (18)$$

Ce sens nouveau et fondamental donné à la dimension d'échelle, traitée maintenant comme une variable, rend nécessaire de lui attribuer un nouveau nom. Nous l'appellerons “djinn” dans la suite (dans des articles précédents, nous avons proposé le terme “zoom”, mais celui-ci est déjà connoté et s'applique plus naturellement aux transformations d'échelles elles-mêmes,  $\ln(\varepsilon'/\varepsilon)$ ). Il

s'agit donc de travailler dans un espace-temps-djinn à cinq dimensions. Le caractère vectoriel des zooms est alors apparent, car les quatre résolutions spatio-temporelles peuvent maintenant se définir à partir des quatre coordonnées d'espace-temps et du djinn:

$$v^i = dx^i/dt \leftrightarrow \ln \frac{\lambda^\mu}{\varepsilon^\mu} = d \ln \mathcal{L}^\mu / d\delta. \quad (19)$$

On pourrait objecter que du point de vue des mesures, c'est à  $\mathcal{L}$  et  $\varepsilon$  que l'on a accès et que le djinn  $\delta$  s'en déduit. Mais on remarquera qu'il en est de même de la variable temporelle, qui reste toujours mesurée de manière indirecte.

Un dernier avantage de ce renversement apparaîtra dans la suite, dans les tentatives de construction d'une relativité d'échelle généralisée. Il permet en effet la définition d'un concept nouveau, celui de l'accélération d'échelle,  $\Gamma^\mu = d^2 \ln \mathcal{L}^\mu / d\delta^2$ , nécessaire au passage à des lois d'échelle non linéaires et à une "dynamique" d'échelle.

L'introduction de ce concept permet de renforcer encore l'identification des fractals à dimension constante à une "inertie d'échelle". En effet, l'équation "du vide" en échelle doit s'écrire (à une dimension pour simplifier l'écriture):

$$\Gamma = d^2 \ln \mathcal{L} / d\delta^2 = 0. \quad (20)$$

Elle s'intègre comme

$$d \ln \mathcal{L} / d\delta = \ln \frac{\lambda}{\varepsilon} = \text{constante}. \quad (21)$$

La constance de la résolution signifie ici son indépendance en fonction du djinn  $\delta$ . La solution prend finalement la forme attendue,  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\lambda/\varepsilon)^\delta$ .

Plus généralement, on peut alors faire l'hypothèse que les lois d'échelle peuvent être construites à partir d'un principe de moindre action. On introduit une fonction de Lagrange d'échelle,  $L(\ln \mathcal{L}, V, \delta)$ , où  $V = \ln(\lambda/\varepsilon)$ , puis une action d'échelle:

$$S = \int_{\delta_1}^{\delta_2} L(\ln \mathcal{L}, V, \delta) d\delta. \quad (22)$$

Le principe d'action stationnaire conduit alors à des équations d'Euler-Lagrange d'échelle:

$$\frac{d}{d\delta} \frac{\partial L}{\partial V} = \frac{\partial L}{\partial \ln \mathcal{L}}. \quad (23)$$

## 5.5 Dynamique d'échelle et force d'échelle

La forme la plus simple de ces équations est celle où le deuxième membre s'annule (absence de force d'échelle) et où la fonction de Lagrange prend la forme newtonienne  $L \propto V^2$ . On retrouve là, par cette autre voie, le comportement d'"inertie d'échelle" en loi de puissance. En effet, l'équation de Lagrange s'écrit dans ce cas:

$$\frac{dV}{d\delta} = 0 \Rightarrow V = \text{cst}. \quad (24)$$

La constance de  $V = \ln(\lambda/\varepsilon)$  signifie ici, comme nous l'avons déjà remarqué, qu'elle est indépendante de  $\delta$ . L'équation (23) s'intègre alors suivant la forme usuelle  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\lambda/\varepsilon)^\delta$ .

Mais l'avantage principal de cette représentation est qu'elle permet de passer à l'ordre suivant, c'est-à-dire à des comportements non-linéaires de dynamique d'échelle. On considère que la résolution  $\varepsilon$  peut maintenant devenir une fonction du djinn  $\delta$ . Le fait d'avoir identifié la résolution à une vitesse d'échelle,  $V = \ln(\lambda/\varepsilon)$ , conduit alors naturellement à définir une accélération d'échelle,

$$\Gamma = d^2 \ln \mathcal{L} / d\delta^2 = d \ln(\lambda/\varepsilon) / d\delta. \quad (25)$$

L'introduction d'une force d'échelle permet ensuite d'écrire une version appliquée aux lois d'échelle de l'équation de la dynamique de Newton (qui n'est rien d'autre que l'équation de Lagrange précédente (23)):

$$F = \mu \Gamma = \mu \frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2}, \quad (26)$$

où  $\mu$  est une "masse d'échelle", qui mesure comment le système résiste à la force d'échelle.

### 5.5.1 Force d'échelle constante

Considérons tout d'abord le cas d'une force constante. Celle-ci dérive d'un "potentiel d'échelle"  $\varphi = F \ln \mathcal{L}$ . On peut écrire l'équation (26) sous la forme

$$\frac{d^2 \ln \mathcal{L}}{d\delta^2} = G, \quad (27)$$

où  $G = F/\mu = \text{cste}$ . Il s'agit là de l'équivalent pour les échelles de ce qu'est la chute des corps en gravité constante. Sa solution est un comportement parabolique:

$$V = V_0 + G\delta \quad ; \quad \ln \mathcal{L} = \ln \mathcal{L}_0 + V_0\delta + \frac{1}{2}G\delta^2. \quad (28)$$

Sous cette forme, la signification physique de ce résultat n'apparaît pas clairement. En effet, du point de vue expérimental, c'est en fonction de la résolution que s'observent les variations de  $\ln \mathcal{L}$  et éventuellement  $\delta$ . Après redéfinition des constantes d'intégration, cette solution se ré-exprime sous la forme:

$$\delta = \delta_0 + \frac{1}{G} \ln\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) \quad ; \quad \ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \frac{1}{2G} \ln^2\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right). \quad (29)$$

Ainsi la dimension fractale, ordinairement constante, est devenue une fonction linéaire de la log-résolution, et le logarithme de la longueur varie maintenant, non plus linéairement, mais de manière parabolique.

Ce résultat est potentiellement applicable à de nombreuses situations, dans tous les domaines où prévaut l'analyse fractale (physique, chimie, biologie, médecine...). En effet il est fréquent qu'après analyse soignée de la dépendance

d'échelle d'une grandeur, le modèle en loi de puissance soit rejeté pour cause de variation de la pente dans le plan  $(\log \mathcal{L}, \log \varepsilon)$ . Dans de tels cas, la conclusion que le phénomène considéré n'est pas fractal pourrait s'avérer prématurée. Il pourrait au contraire s'agir d'un comportement fractal non-linéaire relevant d'une dynamique d'échelle, auquel cas l'identification et l'étude de la force d'échelle responsable de la distorsion se révélerait du plus haut intérêt.

### 5.5.2 Oscillateur harmonique d'échelle

Un autre cas intéressant de potentiel d'échelle est celui de l'oscillateur harmonique. Dans le cas où il est "attractif", l'équation d'échelle s'écrit:

$$\ln \mathcal{L}'' + \alpha^2 \ln \mathcal{L} = 0. \quad (30)$$

où "''" désigne la dérivée seconde par rapport à la variable  $\delta$ . En posant  $\alpha = \ln(\lambda/\Lambda)$ , on trouve que la solution s'écrit:

$$\ln \mathcal{L} = [1 - \ln^2(\lambda/\varepsilon) / \ln^2(\lambda/\Lambda)]^{1/2}. \quad (31)$$

Il apparaît ainsi une échelle minimale ou maximale  $\Lambda$  pour le système considéré, tandis que la pente  $d \ln \mathcal{L} / d \ln \varepsilon$  (à ne plus confondre avec le "djinn"  $\delta$  dans cette situation non linéaire) varie entre zéro et l'infini dans le domaine de résolutions permis entre  $\lambda$  et  $\Lambda$ .

Plus intéressant encore est le cas "répulsif", correspondant à un potentiel qu'on peut écrire sous la forme  $\varphi = -(\ln \mathcal{L} / \delta_0)^2 / 2$ . La solution s'écrit:

$$\ln \frac{\mathcal{L}}{\mathcal{L}_0} = \delta_0 \sqrt{\ln^2\left(\frac{\lambda}{\varepsilon}\right) - \delta_0^{-2}}. \quad (32)$$

L'intérêt de cette solution est qu'elle redonne comme comportement asymptotique des très grandes ou très petites échelles ( $\varepsilon \ll \lambda$  ou  $\varepsilon \gg \lambda$ ) la solution usuelle  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0(\lambda/\varepsilon)^{\delta_0}$ , de dimension fractale constante  $D = 1 + \delta_0$ . Par contre, ce comportement rencontre des distorsions croissantes quand la résolution se rapproche d'une échelle maximale  $\lambda_{max} = \lambda e^{-1/\delta_0}$ , pour laquelle la pente (qu'on peut identifier à une dimension fractale effective moins la dimension topologique) devient infinie. En physique, nous avons suggéré qu'un tel comportement pourrait apporter un éclairage nouveau sur le confinement des quarks: en effet, dans le cadre de la ré-interprétation des symétries de jauge comme symétries sur les résolutions spatio-temporelles (voir plus loin), le groupe de jauge de la chromodynamique quantique est  $SU(3)$ , qui est précisément le groupe de symétrie dynamique de l'oscillateur harmonique.

Des solutions de ce type pourraient également présenter de l'intérêt dans le domaine biologique, car on peut interpréter l'existence d'une échelle maximale où la dimension fractale effective devient infinie comme celle d'une paroi, ce qui pourrait fournir des modèles par exemple de parois cellulaires. A des échelles inférieures à cette échelle maximale (pour les petits constituants qui évoluent à l'intérieur du système considéré), on tend soit vers l'indépendance d'échelle

(pente nulle) dans le premier cas, soit vers le comportement fractal “libre” à pente constante dans le deuxième, ce qui est là encore en accord avec cette interprétation.

## 5.6 Relativité restreinte d'échelle : lois de dilatation log-lorentziennes, échelle limite invariante sous les dilatations

C'est avec la relativité restreinte d'échelle que le concept d'“espace-temps-djinn” prend tout son sens. Cependant, celle-ci n'a été développée, jusqu'à maintenant, qu'à deux dimensions, une dimension d'espace-temps et le djinn. Un traitement complet à cinq dimensions reste à faire.

La remarque précédente suivant laquelle les lois fractales standard (à dimension fractale constante) ont la structure du groupe de Galilée implique aussitôt une possibilité de généralisation de ces lois. En effet, on sait depuis les travaux de Poincaré [33] et Einstein [6] que, en ce qui concerne le mouvement, ce groupe n'est qu'un cas très particulier et dégénéré du groupe de Lorentz. Or on peut montrer [14] [15] qu'à deux dimensions, sur les seules hypothèses que la loi de transformation recherchée soit linéaire, interne et invariante par réflexion (hypothèse déductibles du seul principe de relativité restreinte), on trouve comme unique solution physiquement admissible le groupe de Lorentz: celui-ci correspond à une métrique minkowskienne (l'autre solution possible est la métrique euclidienne, exclue pour cause de contradictions physiques).

Désignons par  $\mathcal{L}$  dans ce qui suit la partie asymptotique de la coordonnée fractale, qui correspond à une différence du type  $\mathcal{L} - \mathcal{L}_0$  dans ce qui précède (ce qui permet de prendre en compte automatiquement la transition fractal-non fractal  $\lambda$ ). La nouvelle transformation d'échelle log-lorentzienne s'écrit, en fonction du rapport de dilatation  $\varrho$  entre échelles de résolutions  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$  [14]:

$$\ln(\mathcal{L}'/\mathcal{L}_0) = \frac{\ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) + \delta \ln \varrho}{\sqrt{1 - \ln^2 \varrho / \ln^2(\lambda/\Lambda)}}, \quad (33)$$

$$\delta' = \frac{\delta + \ln \varrho \ln(\mathcal{L}/\mathcal{L}_0) / \ln^2(\lambda/\Lambda)}{\sqrt{1 - \ln^2 \varrho / \ln^2(\lambda/\Lambda)}}. \quad (34)$$

La loi de composition des dilatations prend la forme:

$$\ln \frac{\varepsilon'}{\lambda} = \frac{\ln(\varepsilon/\lambda) + \ln \varrho}{1 + \frac{\ln \varrho \ln(\varepsilon/\lambda)}{\ln^2(\lambda/\Lambda)}}. \quad (35)$$

Précisons que ces lois ne sont valables qu'en deçà de l'échelle de transition  $\lambda$  (resp. au delà de cette échelle de transition dans l'application de cette loi vers les très grandes échelles). Comme on peut le constater sur ces formules, l'échelle  $\Lambda$  est une échelle de résolution invariante sous les dilatations, inatteignable (il faudrait une dilatation infinie à partir de toute échelle finie pour l'atteindre) et

indépassable. Nous avons proposé de l’identifier, vers les très petites échelles, à l’échelle d’espace et de temps de Planck,  $l_P = (\hbar G/c^3)^{1/2} = 1.61605(10) \times 10^{-35}$  m et  $t_P = l_P/c$ , qui posséderait alors les propriétés physiques du point zéro tout en restant finie. Dans le cas macroscopique, on l’identifie à l’échelle de longueur cosmique donnée par l’inverse de la racine de la constante cosmologique [15] [17]. Ce type de loi “log-lorentzienne” a également été utilisée par Dubrulle et Graner [5] dans des modèles de turbulence, mais avec une interprétation différente des variables.

En quoi cette nouvelle loi de dilatation change-t-elle notre vision de l’espace-temps ? A un certain niveau, elle implique une complication, en raison de la nécessité d’introduire une cinquième dimension. Ainsi la métrique d’échelle s’écrit à deux variables:

$$d\sigma^2 = d\delta^2 - (d \ln \mathcal{L})^2 / C_0^2, \text{ avec } C_0 = \ln \left( \frac{\lambda_0}{\Lambda} \right). \quad (36)$$

L’invariant  $d\sigma$  définit un “djinn propre”, ce qui signifie que, bien que la dimension fractale effective soit devenue variable ( $D' = 1 + \delta'$  suivant l’Eq. 34), la dimension fractale dans le repère propre (“entraîné” avec le système considéré du point de vue de l’état d’échelle) est restée constante.

Mais on peut également remarquer que la dimension fractale tend maintenant vers l’infini quand l’intervalle de résolution tend vers l’échelle de Planck. En allant à des résolutions de plus en plus petites, la dimension fractale passera donc successivement par les valeurs 2, 3, 4, ce qui permettrait de couvrir une surface, puis l’espace, puis l’espace-temps à l’aide d’une unique coordonnée. Il est donc possible de définir un espace-temps-djinn minkowskien nécessitant, dans des repères fractals adéquats, seulement deux dimensions aux très petites échelles. En allant vers les grandes résolutions, l’espace-temps-djinn, de métrique  $(+, -, -, -)$ , voit sa cinquième dimension varier de moins en moins vite pour devenir presque constante aux échelles actuellement accessible par les accélérateurs (voir fig. 4 dans [17]), et finalement s’évanouir au delà de l’échelle de Compton du système considéré, qui s’identifie à la transition fractal-non fractal dans le référentiel de repos, et à laquelle le coefficient de métrique temporelle change également de signe), ce qui génère l’espace-temps minkowskien classique, de métrique  $(+, -, -, -)$ .

## 5.7 Relativité d’échelle généralisée et couplage échelle-mouvement

Il s’agit là d’un vaste champ d’étude. Nous avons vu comment l’on pouvait introduire des transformations d’échelle non-linéaires et une dynamique d’échelle. Cette approche n’est cependant qu’un premier pas vers un niveau plus profond “tout géométrique”, dans lequel les forces d’échelle ne sont plus elles-mêmes que des manifestations de la géométrie fractale et non-différentiable. Ce niveau implique aussi la prise en compte de résolutions qui dépendraient elle-mêmes des variables d’espace et de temps. Le premier volet mène au concept nouveau de champ d’échelle, qui correspond à une distorsion dans l’espace des échelles

par rapport aux lois auto-similaires usuelles [20], ce qui peut également être représenté en termes d'espace d'échelle courbe. Cette approche sera développée plus en détail dans une autre contribution.

Le deuxième volet, dont nous rappelons dans ce qui suit certains des principaux résultats, conduit à une nouvelle interprétation de l'invariance de jauge, et donc des champs de jauge eux-mêmes. Celle-ci mène à la démonstration de l'existence de relations générales entre échelles de masse et constantes de couplage (charges généralisées) en physique des particules [17]. L'une de ces relations permet, comme nous le verrons, de prédire théoriquement la masse de l'électron, (considérée dans cette approche comme essentiellement d'origine électromagnétique), en fonction de sa charge.

Enfin signalons pour être complet que même ces deux niveaux ne sont que des étapes transitoires du point de vue de la théorie à construire. Une version plus complète consistera à traiter sur un même plan mouvement et échelles, et voir ainsi principe de relativité d'échelle et principe de relativité du mouvement s'unifier en un principe unique. Ceci se fera en se plaçant dans un espace-temps-djinn à cinq dimensions muni d'une métrique, dans lequel toutes les transformations entre repères s'identifient à des rotations: dans les plans  $(xy, yz, zx)$  ce sont les rotations ordinaires de l'espace tri-dimensionnel; dans les plans  $(xt, yt, zt)$  ce sont les effets du mouvement (qui se ramènent aux "boosts" de Lorentz quand l'espace-temps-djinn se restreint à l'espace-temps quadridimensionnel aux échelles macroscopiques); enfin les quatre rotations dans les plans  $(x\delta, y\delta, z\delta, t\delta)$  s'identifient aux changements de résolutions spatio-temporelles.

### 5.7.1 Rappel sur l'invariance de jauge

Rappelons tout d'abord brièvement la nature du problème posé par l'invariance de jauge dans la physique actuelle. Ce problème apparait déjà en théorie classique de l'électromagnétisme. Cette théorie, à partir de contraintes expérimentales, est amenée à introduire un potentiel de nature quadrivectorielle,  $A_\mu$ , puis un champ tensoriel donné par les dérivées du potentiel,  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ . Mais les équation du champ de Maxwell (contrairement à ce qui se passe en relativité générale d'Einstein pour le mouvement dans un champ de gravitation) ne suffisent pas à caractériser le mouvement d'une charge dans un champ électromagnétique. Il faut leur ajouter l'expression de la force de Lorentz, qui s'écrit sous forme quadridimensionnelle  $f^\mu = (e/c)F^{\mu\nu}u_\nu$  où  $u_\nu$  est la quadrivitesse. On voit que seuls les champs interviennent dans celle-ci et non les potentiels. Ceci implique que ce mouvement sera in affecté par toute transformation des potentiels qui laisse les champs invariants. C'est évidemment le cas si on ajoute au quadripotentiel le gradient d'une fonction quelconque des coordonnées:  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(x, y, z, t)$ . Cette transformation est appelée, à la suite de Weyl, transformation de jauge, et la loi d'invariance qui en résulte, invariance de jauge.

Ce qui n'était apparemment qu'une simple latitude laissée dans le choix des potentiels prend, dans le cadre de la mécanique quantique, une signification plus profonde. En effet, l'invariance de jauge en électrodynamique quantique

devient une invariance sur les transformations des phases des fonctions d'onde et se trouve reliée à la conservation du courant via le théorème de Noether. On sait que ce théorème relie les symétries fondamentales à l'apparition de quantités conservatives qui sont des manifestations de ces symétries (c'est ainsi que l'existence de l'énergie résulte de l'uniformité du temps, celle de l'impulsion de l'homogénéité de l'espace, etc...). Dans le cas de l'électrodynamique, il apparaît que l'existence même de la charge électrique résulte de la symétrie de jauge. Ce fait est apparent dans l'écriture du lagrangien qui décrit un champ électronique de Dirac couplé à un champ électromagnétique. Ce lagrangien n'est pas invariant dans la transformation de jauge du champ électromagnétique  $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(x)$ , mais le devient si on complète celle-ci par une transformation de jauge locale sur la phase de la fonction d'onde de l'électron,  $\psi \rightarrow e^{-ie\chi(x)}\psi$ . On peut interpréter ce résultat en disant que l'existence du champ électromagnétique (et de sa symétrie de jauge) implique celle de la charge électrique.

Pendant, bien qu'impressionnant (en particulier par sa capacité de généralisation aux théories de jauge non-abéliennes qui ont englobé les champs faibles et forts et permis la description du champ électrofaible), ce progrès dans la compréhension de la nature du champ électromagnétique et de la charge reste, à notre avis, incomplet. En effet la transformation de jauge garde un caractère d'arbitraire. Le point essentiel est qu'aucun sens physique explicite n'est attribué à la fonction  $\chi(x)$ : or celle-ci est la variable conjuguée de la charge dans la phase de l'électron (de même que l'énergie est conjuguée au temps et l'impulsion à l'espace), si bien que c'est de la compréhension de sa nature que pourrait surgir une compréhension authentique de la nature de la charge. De plus, la quantification de la charge reste incomprise dans le cadre de la théorie actuelle. Or, là encore, sa variable conjuguée détient la clé de ce problème. L'exemple du moment cinétique est clair à cet égard: ses grandeurs conjuguées sont les angles, si bien que sa conservation résulte de l'isotropie de l'espace. De plus, le fait que les variations des angles ne puissent dépasser  $2\pi$  implique que les différences de moment cinétique soient quantifiées en unités de  $\hbar$ . De même, on peut s'attendre à ce que l'existence d'une limitation sur la variable  $\chi(x)$ , une fois la nature de celle-ci élucidée, implique la quantification de la charge et mène à des résultats quantitatifs nouveaux. Comme on va le voir, la relativité d'échelle permet effectivement de faire des propositions en ce sens.

### 5.7.2 Nature des champs de jauge

Considérons un électron ou n'importe quelle autre particule chargée. En relativité d'échelle, ce qu'on appelle "particule" est identifié aux géodésiques d'un espace-temps fractal. Ces trajectoires possèdent des structures internes fractales (en deçà de l'échelle de Compton  $\lambda_c = \hbar/mc$  de la particule). Considérons maintenant l'une quelconque de ces structures, située à une résolution  $\varepsilon < \lambda_c$  (laquelle n'est définie que de manière relative). Puis prenons en compte un déplacement de l'électron. Le principe de relativité des échelles lui-même va impliquer l'apparition d'un champ induit par ce déplacement.

Pour le comprendre, nous pouvons prendre comme modèle un aspect de la

construction de la théorie de la gravitation d'Einstein à partir du principe de relativité générale du mouvement. Dans cette théorie le phénomène de gravitation est identifié aux manifestations de la courbure de l'espace-temps, courbure qui se traduit par une rotation des vecteurs d'origine géométrique. Or cette rotation générale de n'importe quel vecteur au cours d'une translation peut se déduire simplement de la seule relativité généralisée du mouvement. En effet, en raison du caractère non-absolu de l'espace-temps, un vecteur  $V^\mu$  soumis à un déplacement  $dx^\rho$  ne peut rester identique à lui-même (sinon, ceci signifierait précisément que l'espace serait absolu). Il subira donc une rotation qui s'écrit, en utilisant la notation d'Einstein de sommation sur les indices communs haut et bas,  $\delta V^\mu = \Gamma_{\nu\rho}^\mu V^\nu dx^\rho$ . Les symboles de Christoffel  $\Gamma_{\nu\rho}^\mu$  apparus naturellement dans cette transformation peuvent ensuite se calculer, dans la suite de la construction, en fonction des dérivées des potentiels de métrique  $g_{\mu\nu}$ , ce qui permet de les considérer comme composantes du champ de gravitation généralisant la force newtonienne.

De même, dans le cas de la structuration fractale de l'électron, on s'attend à ce qu'une structure qui se trouvait initialement à une certaine échelle se retrouve à une autre échelle après déplacement de l'électron (dans le cas contraire, l'espace des échelles serait absolu, ce qui serait en contradiction avec le principe de relativité d'échelle). Il doit donc apparaître un champ de dilatation des résolutions induit par les translations, ce qui s'écrit:

$$e \frac{\delta \varepsilon}{\varepsilon} = -A_\mu \delta x^\mu. \quad (37)$$

Cet effet peut se traduire en terme de l'utilisation d'une dérivée covariante:

$$e D_\mu \ln(\lambda/\varepsilon) = e \partial_\mu \ln(\lambda/\varepsilon) + A_\mu. \quad (38)$$

Ce champ de dilatation doit pouvoir être défini quelle que soit l'échelle dont on est parti, c'est-à-dire quelle que soit la sous-structure considérée. En partant donc d'une autre échelle  $\varepsilon' = \varrho \varepsilon$  (on ne prend en compte que la relativité d'échelle galiléenne dans un premier temps), on obtient à la suite de la même translation:

$$e \frac{\delta \varepsilon'}{\varepsilon'} = -A'_\mu \delta x^\mu. \quad (39)$$

Les deux expressions du potentiel  $A_\mu$  sont alors connectées par la relation:

$$A'_\mu = A_\mu + e \partial_\mu \ln \varrho, \quad (40)$$

où  $V = \ln \varrho = \ln(\varepsilon/\varepsilon')$  caractérise bien un état d'échelle relatif (il ne dépend que du rapport entre résolutions  $\varepsilon$  et  $\varepsilon'$ ), qui dépend maintenant explicitement des coordonnées. C'est en ce sens que nous sommes bien déjà ici dans le cadre de la relativité générale d'échelle et de transformations non-linéaires d'échelle, car la "vitesse d'échelle" a été redéfinie comme dérivée première,  $\ln \varrho = d \ln \mathcal{L} / d\delta$ , si bien que l'équation 40 fait intervenir une dérivée seconde de la coordonnée fractale,  $d^2 \ln \mathcal{L} / dx^\mu d\delta$ .

Si l'on considère maintenant une translation suivant deux coordonnées différentes (ou d'une manière équivalente un déplacement sur un trajet fermé), on peut écrire une relation de commutation:

$$e(\partial_\mu D_\nu - \partial_\nu D_\mu) \ln \varrho = (\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu). \quad (41)$$

Cette relation définit un champ tensoriel  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$  qui, contrairement à  $A_\mu$ , est indépendant de l'échelle initiale dont on est parti.

On reconnaît dans  $F_{\mu\nu}$  l'analogue d'un champ électromagnétique, en  $A_\mu$  celui d'un potentiel électromagnétique, en  $e$  celui de la charge électrique, et en l'Eq. 40 la propriété d'invariance de jauge qui, en accord avec les idées initiales de Weyl et leur développement par Dirac [4], retrouve son statut initial d'invariance d'échelle. Cependant, l'Eq. 40 représente un progrès comparé à ces anciennes tentatives et au statut de l'invariance de jauge dans la physique actuelle. En effet, la fonction de jauge  $\chi(x, y, z, t)$  qui intervient dans la formulation ordinaire de l'invariance de jauge,  $A'_\mu = A_\mu + e\partial_\mu\chi$ , et qui a, jusqu'à présent, été considérée comme arbitraire, est maintenant identifiée au logarithme des résolutions internes,  $\chi = \ln \rho(x, y, z, t)$ .

Un autre avantage par rapport à la théorie de Weyl est que nous sommes maintenant autorisés à définir quatre dilatations différentes et indépendantes sur les quatre résolutions spatio-temporelles au lieu d'une seule dilatation globale. De ce fait, on s'attend alors à ce que le champ ci-dessus (qui correspond à un groupe U(1) du type du champ électromagnétique) soit plongé dans un champ plus large, en accord avec la théorie électrofaible et les tentatives de grande unification. De même, on s'attend à ce que la charge  $e$  soit un élément d'une charge, "vectorielle", plus complexe. Les premières tentatives de développement de cette approche généralisée ont permis de suggérer une version plus complètement unifiée de la théorie électrofaible [22], dans laquelle la masse du boson de Higgs peut être prédite théoriquement (on trouve  $m_H = \sqrt{2}m_W = 113.73 \pm 0.06$  GeV, où  $m_W$  est la masse du boson de jauge W).

Du reste, notre interprétation de l'invariance de jauge apporte un point de vue nouveau sur la nature de la charge électrique. Combinée avec la structure lorentzienne des dilatations de la relativité d'échelle restreinte, elle permet d'obtenir de nouvelles relations entre les charges et les masses des particules élémentaires [16] [17], comme on le rappelle dans la suite.

### 5.7.3 Nature des charges

Dans une transformation de jauge  $A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu\chi$ , la fonction d'onde d'un électron de charge  $e$  devient:

$$\psi' = \psi e^{ie\chi}. \quad (42)$$

Dans cette expression, le rôle essentiel joué par la fonction de jauge est clair. C'est la variable conjuguée de la charge électrique, de la même manière que la position, le temps et l'angle sont les variables conjuguées respectivement de l'impulsion, de l'énergie et du moment angulaire dans les expressions de l'action et/ou de la phase quantique d'une particule libre,  $\theta = i(px - Et + \sigma\varphi)/\hbar$ . Comme

nous le rappelions précédemment, notre connaissance de ce que sont l'impulsion, l'énergie, et le moment angulaire vient de notre compréhension de la nature de l'espace et du temps, ainsi que de leurs symétries (translations et rotations), via le théorème de Noether. Inversement, le fait que nous ne sachions toujours pas réellement ce qu'est la charge électrique en dépit de tout le développement des théories de gauge, vient, du point de vue développé ici, du fait que la fonction de gauge  $\chi$  reste considérée comme dénuée de signification physique.

Nous avons réinterprété dans le paragraphe précédent la transformation de gauge comme une transformation d'échelle de résolution,  $\varepsilon \rightarrow \varepsilon'$ ,  $\ln \varrho = \ln(\varepsilon/\varepsilon')$ . Dans une telle interprétation, la propriété spécifique qui caractérise une particule chargée est la dépendance d'échelle explicite de son action, donc de sa fonction d'onde, en fonction de la résolution. Le résultat est que la fonction d'onde de l'électron s'écrit

$$\psi' = \psi e^{i\frac{e^2}{\hbar c} \ln \varrho}. \quad (43)$$

Puisque, par définition (dans le système d'unités où la permittivité du vide est 1),

$$e^2 = 4\pi\alpha\hbar c, \quad (44)$$

l'Eq. (43) devient,

$$\psi' = \psi e^{i4\pi\alpha \ln \varrho}. \quad (45)$$

Considérant maintenant la fonction d'onde de l'électron comme une fonction explicitement dépendante des rapports de résolution, nous pouvons écrire l'équation différentielle d'échelle dont  $\psi$  est solution sous la forme:

$$-i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial (\frac{\varepsilon}{c} \ln \varrho)} = e\psi. \quad (46)$$

Nous reconnaissons en  $\tilde{D} = -i\hbar \partial / \partial (\frac{\varepsilon}{c} \ln \varrho)$  un opérateur de dilatation. L'équation (46) peut alors être lue comme une équation aux valeurs propres:

$$\tilde{D}\psi = e\psi. \quad (47)$$

Dans un tel cadre, la charge électrique est comprise comme la quantité conservative qui vient de la nouvelle symétrie d'échelle, à savoir, de l'uniformité de la variable de résolution  $\ln \varepsilon$ .

#### 5.7.4 Relations masse-charge

Dans le paragraphe précédent, nous avons écrit la fonction d'onde d'une particule chargée sous la forme:

$$\psi' = \psi e^{i4\pi\alpha \ln \varrho}. \quad (48)$$

Dans le cas des lois galiléennes d'échelle, une telle relation ne conduit à aucun nouveau résultat, puisque  $\ln \varrho$  est illimité. Mais dans le cadre de la relativité d'échelle restreinte (voir paragraphe 5.6 précédent), les lois d'échelle deviennent lorentziennes au dessous de l'échelle de Compton  $\lambda_c$  de la particule, si bien que  $\ln \varrho$  devient limité par la constante fondamentale  $C = \ln(\lambda_c/l_P)$ , qui caractérise

la particule considérée, (où  $l_P = (G\hbar/c^3)^{1/2}$  désigne l'échelle de longueur de Planck). Cela implique une quantification de la charge qui équivaut à la relation  $4\pi\alpha C = 2k\pi$ , c'est-à-dire:

$$\alpha C = \frac{k}{2}. \quad (49)$$

où  $k$  est entier. Cette équation n'est rien d'autre qu'une relation générale entre masses et charges (constantes de couplage) des particules élémentaires.

Par exemple, dans le cas de l'électron, le rapport de sa longueur de Compton  $\hbar/m_e c$  sur la longueur de Planck est égal au rapport de la masse de Planck ( $m_P = (\hbar c/G)^{1/2}$ ) sur la masse de l'électron. De plus, dans le cadre de la théorie électrofaible, il apparaît que la constante de couplage de l'électrodynamique à basse énergie (c'est-à-dire la constante de structure fine) résulte d'un couplage électrofaible dépendant de l'échelle d'énergie. Celui-ci est diminué d'un facteur  $3/8$  du fait que les bosons de jauge  $W$  et  $Z$  deviennent massifs et ne contribuent plus à l'interaction aux énergies inférieures à leur énergie de masse. On s'attend ainsi à une relation entre masse et charge de l'électron qui s'écrit:

$$\frac{8}{3}\alpha \ln \frac{m_P}{m_e} = 1. \quad (50)$$

Cette relation théorique est bien vérifiée par les données expérimentales, qui conduisent à une valeur 1.0027 pour ce produit, lequel devient 1.00014 en tenant compte des effets de seuil à la transition de Compton..

Une telle relation permet également de rendre compte de nombreuses autres structures observées en physique des particules, et de suggérer des solutions aux questions de l'origine des masses de certaines particules, des valeurs des couplages ainsi qu'au problème de hiérarchie entre échelle de grande unification et échelle électrofaible [17] [22] [23].

## 6 Dynamique induite de type quantique

### 6.1 Equation de Schrödinger généralisée

Comme nous l'avons vu, on est conduit, en relativité d'échelle, à généraliser une nouvelle fois le concept d'espace-temps et à travailler dans le cadre d'un espace-temps fractal. On prend alors en compte des systèmes de coordonnées (et des trajectoires, en particulier les géodésiques de l'espace fractal) eux-mêmes fractals, c'est-à-dire possédant une structure interne. Nous nous sommes concentrés, dans les paragraphes précédents, sur les descriptions possibles d'une telle structure, qui porte sur l'espace des échelles. Nous allons maintenant considérer brièvement, pour finir, ses effets induits sur les déplacements dans l'espace ordinaire. La combinaison entre eux de ces effets conduit à l'introduction d'un outil de description du type de celui de la mécanique quantique. On y abandonne la description classique en terme de conditions initiales et de trajectoires individuelles déterministes, au bénéfice d'une description statistique en terme d'amplitudes de probabilité.

Rappelons l'essence de la méthode utilisée dans le cadre de la relativité d'échelle pour passer d'une dynamique classique à une dynamique de type quantique.

Les trois conditions minimales qui permettent de transformer l'équation fondamentale de la dynamique en une équation de Schrödinger sont les suivantes:

(i) Il existe un très grand nombre (à la limite, une infinité) de trajectoires potentielles; cette condition est une conséquence naturelle de la non-différentiabilité et de la fractalité de l'espace, dans le cas où les trajectoires peuvent être définies précisément comme géodésiques de cet espace.

(ii) Chacune de ces trajectoires est une courbe fractale (la dimension  $D = 2$ , qui correspond à une perte complète d'information sur les déplacements élémentaires, jouant ici un rôle particulier). Dans le cas d'un espace et de ses géodésiques, le caractère fractal de l'espace implique directement celui de ses géodésiques.

(iii) il y a irréversibilité au niveau infinitésimal, c'est-à-dire non-invariance dans la réflexion de l'élément différentiel de temps  $dt \rightarrow -dt$ . Là encore, cette condition est une conséquence immédiate de l'abandon de l'hypothèse de différentiabilité. En effet, rappelons que l'un des outils fondamentaux qui nous permettent de gérer la non-différentiabilité consiste en la réinterprétation des éléments différentiels comme variables. Ainsi la coordonnée dans l'espace devient une fonction fractale  $X(t, dt)$ , et sa vitesse, bien que n'existant plus à la limite  $dt \rightarrow 0$ , se définit maintenant aussi comme fonction fractale. Mais la nouveauté est qu'il y a deux définitions au lieu d'une (qui se transforment l'une dans l'autre par la réflexion  $dt \leftrightarrow -dt$ ), et donc que le concept de vitesse se dédouble:

$$V_+(t, dt) = \frac{X(t + dt, dt) - X(t, dt)}{dt} \quad (51)$$

$$V_-(t, dt) = \frac{X(t, dt) - X(t - dt, dt)}{dt} \quad (52)$$

La première condition conduit à adopter une description de type "fluide", où l'on ne considérera plus seulement la vitesse d'une trajectoire individuelle, mais le champ de vitesse moyen  $v[x(t), t]$  de toutes les trajectoires potentielles.

La deuxième condition nous ramène aux travaux précédents concernant les lois d'échelle satisfaisant au principe de relativité. Nous avons vu que, dans le cas le plus simple "galiléen d'échelle", la coordonnée (solution d'une équation différentielle d'échelle) se décomposait sous forme d'un terme classique indépendant d'échelle et d'un terme asymptotique fractal. C'est ce même résultat que nous allons utiliser ici, après avoir différentié la coordonnée. Ceci nous mène à décomposer les déplacements élémentaires  $dX = dx + d\xi$  sous forme d'une moyenne indépendante d'échelle,  $dx = vdt$ , et d'une fluctuation  $d\xi$ , caractérisée par une loi de comportement fractale,  $d\xi \propto dt^{1/D}$ .

La troisième condition a pour conséquence, comme nous l'avons vu, un dédoublement des vitesses. Celles-ci, définies par  $V = dX/dt = v + d\xi/dt$ , se décomposent donc, aussi bien en ce qui concerne  $V_+$  que pour  $V_-$ , en une composante  $v$  non fractale (donc dérivable au sens ordinaire) à laquelle s'ajoute

une composante fractale divergente  $d\xi/dt$ , nulle en moyenne. Sachant que la source de ce dédoublement se trouve au niveau de l'espace, et non seulement des trajectoires, il s'applique également au niveau des champs de vitesse moyens.

On est ainsi amené à introduire un double processus tridimensionnel

$$dX_{\pm}^i = dx_{\pm}^i + d\xi_{\pm}^i, \quad (53)$$

dans lequel  $dx_{\pm}^i = v_{\pm}^i dt$ ,  $\langle d\xi_{\pm}^i \rangle = 0$  et

$$\left\langle \frac{d\xi_{\pm}^i}{dt} \frac{d\xi_{\pm}^j}{dt} \right\rangle = \pm \delta^{ij} \left( \frac{2\mathcal{D}}{dt} \right)^{2-2/D}. \quad (54)$$

(On a fait ici  $c = 1$  pour simplifier l'écriture;  $\delta^{ij}$  représente le symbole de Kronecker).  $\mathcal{D}$  est un paramètre d'échelle fondamental qui caractérise le comportement fractal des trajectoires (ce n'est rien d'autre qu'une notation différente pour l'échelle de transition fractal-non fractal introduite précédemment). Ce paramètre détermine la transition essentielle qui apparaît dans un tel processus entre le comportement fractal à petite échelle (où les fluctuations dominent) et non fractal à grande échelle (où le mouvement classique moyen redevient dominant).

Une représentation naturelle du dédoublement de variables dû à l'irréversibilité consiste en l'utilisation de nombres complexes (on peut démontrer que ce choix est "covariant", au sens où il préserve la forme des équations). On définit un opérateur complexe de dérivation par rapport au temps (qui porte sur les quantités macroscopiques indépendantes d'échelle, donc dérivables au sens ordinaire),

$$\frac{d'}{dt} = \frac{1}{2} \left( \frac{d_+ + d_-}{dt} - i \frac{d_+ - d_-}{dt} \right), \quad (55)$$

puis une vitesse moyenne complexe qui résulte de l'action de cet opérateur sur la variable de position:

$$\mathcal{V}^i = \frac{d'}{dt} x^i = V^i - iU^i = \frac{v_+^i + v_-^i}{2} - i \frac{v_+^i - v_-^i}{2}. \quad (56)$$

Ainsi, à la limite classique où  $v_+^i = v_-^i$ , la partie réelle de cette vitesse complexe s'identifie à la vitesse classique tandis que la partie imaginaire disparaît. Après avoir défini les lois des déplacements élémentaires dans un tel processus fractal et localement irréversible, il nous faut maintenant analyser les effets de ces déplacements sur d'autres grandeurs physiques. Considérons une fonction dérivable  $f(X(t), t)$ . Sa dérivée totale par rapport au temps s'écrit:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla f \cdot \frac{dX}{dt} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial X^i \partial X^j} \frac{dX^i dX^j}{dt}. \quad (57)$$

On peut alors calculer les dérivées "avant" et "arrière" de  $f$ . Dans ce calcul, la valeur moyenne de  $dX/dt$  devient  $d_{\pm}x/dt = v_{\pm}$ , tandis que  $\langle dX^i dX^j \rangle$  se

réduit à  $\langle d\xi_{\pm}^i d\xi_{\pm}^j \rangle$ , si bien que le dernier terme de [57] se transforme en un Laplacien en raison de [54]. On obtient alors:

$$d_{\pm}f/dt = (\partial/\partial t + v_{\pm} \cdot \nabla \pm \mathcal{D}\Delta)f. \quad (58)$$

En combinant enfin ces deux dérivées, on obtient l'expression de l'opérateur complexe de dérivation par rapport au temps:

$$\frac{d'}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathcal{V} \cdot \nabla - i\mathcal{D}\Delta. \quad (59)$$

Il contient deux termes imaginaires supplémentaires,  $-iU \cdot \nabla$  et  $-i\mathcal{D}\Delta$ , en plus de l'opérateur de dérivation totale ordinaire,  $d/dt = \partial/\partial t + V \cdot \nabla$ .

Nous pouvons maintenant ré-écrire l'équation fondamentale de la dynamique en utilisant cet opérateur de dérivation: celle-ci prendra alors automatiquement en compte les nouveaux effets considérés. elle garde la forme newtonienne:

$$m \frac{d'^2}{dt^2} x = -\nabla \phi. \quad (60)$$

où  $\phi$  est un terme de potentiel. Dans le cas où le potentiel est nul ainsi que dans le cas où il s'agit d'un potentiel gravitationnel, cette équation n'est rien d'autre qu'une équation des géodésiques. On a ainsi mis en oeuvre un principe d'équivalence généralisé, grâce auquel le mouvement (gravitationnel et quantique) reste localement inertiel: en effet, comme on va le voir maintenant, cette équation s'intègre sous forme de l'équation de Schrödinger.

Plus généralement, on peut reprendre le déroulement de la construction de la mécanique lagrangienne avec ce nouvel outil (voir [15] [17] [19]). Le caractère complexe de la vitesse  $\mathcal{V}$  implique celui de la fonction de Lagrange, donc de l'action  $S$ .

La fonction d'onde  $\psi$  s'introduit alors très simplement comme une ré-expression de cette action complexe:

$$\psi = e^{iS/2m\mathcal{D}}. \quad (61)$$

Elle est reliée à la vitesse complexe comme suit:

$$\mathcal{V} = -2i\mathcal{D}\nabla(\ln \psi). \quad (62)$$

Nous pouvons maintenant changer d'outil de description et écrire l'équation d'Euler-Newton ci-dessus (60) en fonction de cette fonction d'onde:

$$2im\mathcal{D} \frac{d'}{dt} (\nabla \ln \psi) = \nabla \phi. \quad (63)$$

Après quelques calculs, cette équation s'intègre sous forme d'une équation de Schrödinger [15]:

$$\mathcal{D}^2 \Delta \psi + i\mathcal{D} \frac{\partial}{\partial t} \psi - \frac{\phi}{2m} \psi = 0. \quad (64)$$

On retrouve l'équation de la mécanique quantique standard par le choix  $\mathcal{D} = \hbar/2m$ . En posant  $\psi\psi^\dagger = \rho$ , on trouve que la partie imaginaire de cette équation est l'équation de continuité,

$$\partial\rho/\partial t + \text{div}(\rho V) = 0, \quad (65)$$

ce qui justifie l'interprétation de  $\rho$  comme une densité de probabilité.

## 6.2 Application à la formation de structures gravitationnelles

La physique est depuis longtemps confrontée au problème de la répartition spatiale très inhomogène de la matière dans l'Univers. Cette répartition des structures spatiales est souvent hiérarchisée, que ce soit dans le domaine microscopique (quarks dans les nucléons, nucléons dans le noyau, noyau et électrons dans l'atome, atome dans la molécule, ...) ou macroscopique (étoiles et leur système planétaire, groupes et amas d'étoiles, se regroupant avec la matière interstellaire, elle-même fractale, en galaxies, celles-ci formant à leur tour des paires, des groupes et des amas de galaxies, qui appartiennent à des superamas de galaxies, eux-mêmes sous-ensembles des très grandes structures de l'Univers...). Ce qui frappe dans ces deux cas est que c'est le vide et non la matière qui domine, même à de très grandes échelles où l'on pensait auparavant trouver une distribution homogène.

La théorie de la relativité d'échelle a été construite précisément pour traiter des questions de structuration en échelle. On y prend en compte une intervention explicite des échelles d'observation (ce qui revient à travailler dans le cadre d'une géométrie fractale), ou plus généralement de celles qui sont caractéristiques des phénomènes étudiés, ainsi que des relations entre ces échelles, par l'introduction d'un espace des résolutions. Comme nous l'avons vu, une telle description de structures à toutes les échelles (ou sur une large gamme) induit une dynamique nouvelle dont le comportement devient du type quantique plutôt que classique.

Or les conditions sous lesquelles l'équation de Newton s'intègre sous forme d'une équation de Schrödinger (qui se ramènent à une perte d'information totale sur les trajectoires individuelles) ne se manifestent pas qu'aux échelles microscopiques. Certains systèmes macroscopiques, tels la nébuleuse protoplanétaire qui a donné naissance à notre Système Solaire, pourraient satisfaire à ces conditions et donc être décrits de manière statistique par une équation de type Schrödinger (mais avec, bien sûr, une interprétation différente de celle de la mécanique quantique standard). Une telle dynamique conduit naturellement à une "morphogénèse", étant génératrice de structures organisées de manière hiérarchiques, en rapport avec les conditions extérieures (forces et conditions aux limites).

Un bon exemple d'application d'une telle approche est celui des systèmes planétaires. Il est d'autant plus intéressant que les prédictions théoriques qui en sont issues ont pu être faites, puis validées sur notre propre système solaire, plusieurs années avant la découverte [40] [12] des premières planètes extrasolaires. On s'attend en effet à ce que la distribution des demi-grands axes des

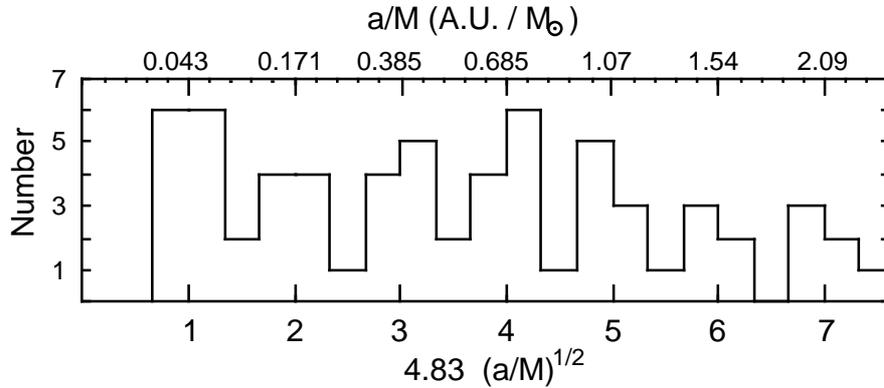


Figure 1: Histogramme de la distribution observée de la variable  $\tilde{n} = 4.83 (a/M)^{1/2}$  où  $a$  désigne le demi-grand axe et  $M$  la masse de l'étoile (en unités du Système Solaire, (Unité Astronomique U.A. et masse solaire  $M_{\odot}$ ), pour les candidats exoplanètes récemment découverts et les planètes de notre système solaire interne. On prévoit théoriquement des pics de probabilité pour les valeurs entières de la variable. La probabilité d'obtenir un tel accord par hasard est inférieure à  $4 \times 10^{-5}$ .

orbites planétaires montre des pics de probabilité pour des valeurs  $a/GM = (n/w_0)^2$ , où  $M$  est la masse de l'étoile, où  $w_0 = 144$  km/s est une constante fondamentale qui a pu être identifiée depuis les échelles planétaires jusqu'aux échelles extragalactiques, et où  $n$  est un nombre entier. On prévoit également que les excentricités montrent des pics de probabilité pour des valeurs  $e = k/n$ , où  $k$  est un entier compris entre 0 et  $n - 1$ . Depuis ce sont plus de soixante exoplanètes qui ont été découvertes, dont les distributions statistiques des demi-grands axes (figure 1) et des excentricités (figure 2) montre un accord statistiquement hautement significatif avec les distributions de probabilité attendues [18] [25] [28] [30].

## 7 Conclusion

La présente contribution s'est attachée à décrire principalement les développements théoriques de l'approche "relativiste d'échelle". Tous cependant n'ont pas été abordés. Par exemple la construction d'une équation de type Schrödinger à partir de l'abandon de la différentiabilité, démontrée ci-dessus dans le cas de l'équation fondamentale de la dynamique Newtonienne, peut se généraliser dans tous les cas où les équations de la physique classique ont pu être mise sous forme d'équations d'Euler-Lagrange. Ceci a été fait explicitement pour les équations du mouvement rotationnel d'un solide, de la dynamique avec fonction de dissipation, d'Euler et de Navier-Stokes, ou encore des équations d'un champ scalaire [19].

On peut citer aussi, dans les généralisations envisageables de la théorie, la

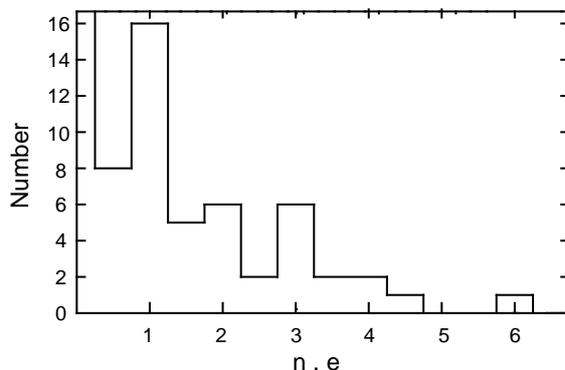


Figure 2: Histogramme de la distribution de  $\tilde{k} = n.e$ , où  $n$  est le nombre quantique principal (qui caractérise le demi-grand axe) et  $e$  l'excentricité, pour les exoplanètes et les planètes du système solaire interne. La théorie prévoit des pics de probabilité pour les valeurs entières de la variable. La probabilité d'obtenir un tel accord par hasard est inférieure à  $10^{-4}$ . La probabilité combinée d'obtenir par hasard les deux distributions (demi-grands axes et excentricités) est de  $3 \times 10^{-7}$ , soit un niveau de signification statistique atteignant  $5\sigma$ .

possibilité d'abandonner la différentiabilité, non seulement dans l'espace ordinaire (ce qui mène, comme nous l'avons vu, à l'introduction d'un espace des échelles régi par des équations différentielles portant sur les variables d'échelle, en particulier les résolutions spatio-temporelles) mais également dans l'espace des échelles lui-même. Toute la construction précédente peut encore s'appliquer à ce niveau de description plus profond, ce qui conduit à l'introduction d'une "mécanique quantique d'échelle". Dans ce cadre, qui définit une sorte de "troisième quantification", des "objets" fractals d'un type nouveau peuvent être définis: plutôt que de posséder des structures à des échelles bien définies (cas des objets fractals ordinaires), ou encore de voir les rapports entre échelles, bien que variables, définis par des lois classiques (cas des fractals "relativistes d'échelle" évoqués dans cette contribution), ils ne sont plus caractérisés que par une amplitude de probabilité de rapports entre échelle (fractals "quantiques")...

En ce qui concerne les applications de cette approche, nous n'en avons donné que deux exemples, concernant la masse de l'électron et les systèmes planétaires. Rappelons néanmoins, pour finir, qu'elle a pu être appliquée avec succès à un grand nombre de problèmes de la physique et de l'astrophysique, non résolus avec les méthodes usuelles, et qu'elle a également permis la prédiction théorique de structures et de relations nouvelles [17]. Ainsi, la transformation de l'équation fondamentale de la dynamique en une équation de Schrödinger sous des conditions très générales (perte d'information sur les trajectoires individuelles et irréversibilité) mène à une compréhension renouvelée de la formation et de l'évolution des structures gravitationnelles. Cette méthode, en plus des demi-

grands axes et excentricités des planètes découvertes autour d'étoiles de type solaire, rapidement évoqués ci-dessus, a été appliquée également avec succès aux trois planètes observées autour du pulsar PSR 1257+12 [18], aux obliquités et inclinaisons des planètes et satellites du système solaire [21], aux satellites des planètes géantes [9], aux étoiles doubles, aux galaxies doubles, à la distribution des galaxies à grande échelle ainsi qu'à d'autres structures gravitationnelles [26] [17].

## References

- [1] Aitchison I., 1982, "An informal introduction to gauge field theories", Cambridge University Press, Cambridge
- [2] Ben Adda F. et Cresson J., 2000, C.R.Acad.Sci. Paris, Serie I, 330, 261
- [3] Chaline J., Nottale L. & Grou P., 1999, C. R. Acad. Sci. Paris, 328, 717
- [4] Dirac P.A.M., 1973, Proc. Roy. Soc. Lond., A333, 403
- [5] Dubrulle, B., & Graner F., 1996, J. Phys. (Fr.), 6, 797
- [6] Einstein A., 1905, Annalen der Physik, 17, 891
- [7] Einstein A., 1916, Annalen der Physik, 49, 769
- [8] El Naschie M.S., Rossler O.E. et Prigogine I. (editors), 1995, "Quantum mechanics, Diffusion and Chaotic Fractals", Pergamon, Cambridge
- [9] Hermann R., Schumacher G., Guyard R., 1998, Astronomy and Astrophysics, 335, 281
- [10] Mandelbrot B., 1975, "Les Objets Fractals", Flammarion, Paris
- [11] Mandelbrot B., 1982, "The Fractal Geometry of Nature", Freeman, San Francisco
- [12] Mayor M. et Queloz D., 1995, Nature, 378, 355
- [13] Nottale L., 1989, Int. J. Mod. Phys., A4, 5047
- [14] Nottale L., 1992, Int. J. Mod. Phys., A7, 4899
- [15] Nottale L., 1993, "Fractal Space-Time and Microphysics: Towards a Theory of Scale Relativity", World Scientific, Singapore
- [16] Nottale L., 1994, "Scale Relativity: First Steps Toward a Field Theory", in "Relativity in General, E.R.E. 93", J. Diaz Alonso and M. Lorente Paramo eds., p. 121, Editions Frontières (Spanish Relativity Meetings)
- [17] Nottale L., 1996, Chaos, Solitons & Fractals, 7, 877

- [18] Nottale L., 1996, *Astronomy and Astrophysics Letters*, 315, L9
- [19] Nottale L., 1997, *Astronomy and Astrophysics*, 327, 867
- [20] Nottale L., 1997, “Scale Relativity”, in “Scale Invariance and Beyond”, B. Dubrulle, F. Graner & D. Sornette eds., p. 249, EDP Sciences / Springer (Les Houches Workshop)
- [21] Nottale L., 1998, *Chaos, Solitons & Fractals*, 9, 1035
- [22] Nottale L., 2000, “Scale relativity, fractal space-time and morphogenesis of structures”, in “Sciences of the Interface”, H. Diebner, T. Druckrey and P. Weibel eds., p. 38, Genista, Tübingen
- [23] Nottale L., 2000, “Scale relativity and non-differentiable fractal space-time”, in “Frontiers of Fundamental Physics 4”, B.G. Sidharth and M. Al-taisky eds., Kluwer Academic / Plenum Publishers, (International Symposia on Frontiers of Fundamental Physics)
- [24] Nottale L., & Schneider J., 1984, *J. Math. Phys.*, 25, 1296
- [25] Nottale L., Schumacher G., Gay J., 1997, *Astronomy and Astrophysics*, 322, 1018
- [26] Nottale L., Schumacher G., 1998, “Scale Relativity, Fractal Space-Time and Gravitational Structures”, in “Fractals and Beyond: Complexities in the Sciences”, M.M. Novak ed., p. 149, World Scientific
- [27] Nottale L., Chaline J., Grou P., 2000, “Les arbres de l’évolution”, Hachette, Paris
- [28] Nottale L., Schumacher G., Lefèvre E.T., 2000, *Astronomy and Astrophysics*, 361, 379
- [29] Nottale L., Chaline J., Grou P., 2001, “On the fractal structure of evolutionary trees”, in “Fractals in Biology and Medicine”, G. Losa ed., Birkhäuser Press (Mathematics and Biosciences in Interaction)
- [30] Nottale L., & Tran Minh N., 2001, *Astronomy and Astrophysics*, soumis pour publication
- [31] Ord G.N., 1983, *J. Phys. A: Math. Gen.*, 16, 1869
- [32] Pocheau A., 1997, “From Scale-Invariance to Scale Covariance”, in “Scale Invariance and Beyond”, B. Dubrulle, F. Graner & D. Sornette eds., p. 209, EDP Sciences / Springer (Les Houches Workshop)
- [33] Poincaré H., 1905, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 140, 1504
- [34] Queiros-Condé D., 2000, *C. R. Acad. Sci. Paris*, 330, 445

- [35] Sornette D., 1997, “Discrete Scale Invariance”, in “Scale Invariance and Beyond”, B. Dubrulle, F. Graner & D. Sornette eds., p. 235, EDP Sciences / Springer (Les Houches Workshop)
- [36] Sornette D., 1998, *Physics Reports*, 297, 239
- [37] Sornette D. and Johansen A., 2001, arXiv:cond-mat, 2075
- [38] Tricot C., 1993, “Courbes et dimensions fractales”, Springer-Verlag, Paris
- [39] Wilson K.G., 1983, *Am. J. Phys.*, 55, 583
- [40] Wolszczan A., 1994, *Science*, 264, 538