

Langage Objet pour la RElativité NumériquE :

une bibliothèque à la disposition de tous

Jérôme Novak

LUTH : Laboratoire de l'Univers et de ses THéories

CNRS / Observatoire de Paris

F-92195 Meudon Cedex, France

<http://www.luth.obspm.fr/>

Forum ASSNA, le 16 décembre 2003

Composition de l'équipe

- Silvano Bonazzola (chercheur)
- Dorota Gondek-Rosińska (post-doc)
- Éricourgoulhon (chercheur)
- Philippe Grandclément (associé, Université de Tours)
- Pawel Haensel (associé, Institut Copernic, Pologne)
- José-Luis Jaramillo (post-doc)
- François Limousin (thésitif)
- Jérôme Novak (chercheur)
- Loïc Villain (associé, Université de Valence, Espagne)

1. Contexte scientifique : ondes gravitationnelles et astres compacts
2. Modélisation physique
3. Méthodes numériques
4. Implémentation
5. Quelques résultats
6. Perspectives...

Sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles

- Mise en marche des détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles

VIRGO



(CNRS/INFN, à
Pise)



LIGO (NSF, à Livingston
et Hanford)



Nécessité des calculs des formes d'onde

- nette amélioration de la probabilité de détection (filtrage “optimal”),
- exploitation des données : comparaison du signal avec le modèle physique.

Les principales sources astrophysiques mettent en jeu des astres compacts asymétriques (ondes quadrupolaires) :

systèmes binaires composés de deux astres compacts (étoiles à neutrons ou trous noirs), le système perd du moment cinétique par l'émission d'ondes gravitationnelles (Cf. PSR1913+16) et finit par fusionner ;

pulsars déformés/instables les étoiles à neutrons en rotation rapide peuvent être déformées (champ magnétique, écorce) ou sujettes à des modes d'oscillation instables (*r*-modes)

supernovæ formation d'une étoile à neutrons, beaucoup d'énergie disponible mais incertitudes sur l'efficacité d'émission des ondes gravitationnelles.

Structure interne des astres compacts

- Étoile à neutrons : cœur composé essentiellement de matière n, p, e à l'équilibre bêta. Équilibre entre gravité et interaction nucléaire forte.
- Étoile de quarks : presque (sauf une fine écorce) entièrement composée de quarks u, d, s déconfinés. Liée par l'interaction forte.
- Trou noir : toute la matière formant l'astre a disparu derrière un horizon, d'où aucune information ne peut s'échapper.

Résultats de l'évolution d'étoiles massives par l'intermédiaire d'effondrements gravitationnels.

Astres compacts : $M/R \gtrsim 0.2$ très loin des conditions physiques accessibles dans les expériences terrestres.

Excellentes sources de rayonnement gravitationnel, mais aussi liés aux émissions en X et radio (pulsars).

⇒ informations sur la matière dense, le champ gravitationnel intense, ...

Modèles physiques

- champ gravitationnel : théorie de la relativité générale ;
- champ électromagnétique couplé au champ gravitationnel : équations d'Einstein-Maxwell ;
- matière : fluide(s) parfait(s), mais de nombreuses équations d'état de la matière dense sont utilisées (éventuellement prise en compte de la superfluidité) + conducteur parfait

L'essentiel des hypothèses porte sur la partie gravitationnelle :

symétries les étoiles isolées sont supposées invariantes par rotation autour de leur axe (éventuellement perturbations),

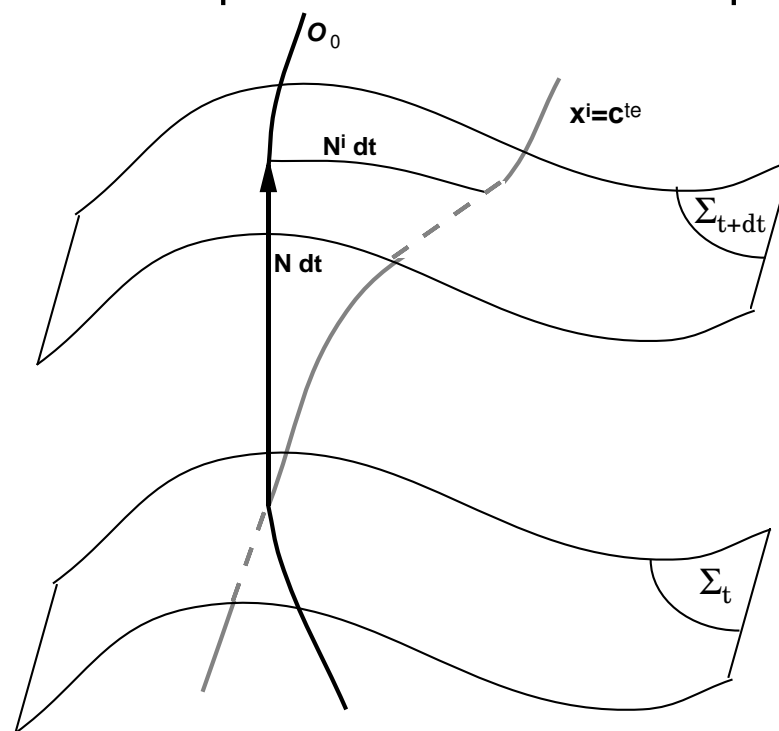
quasi-stationnarité la perte de moment cinétiques par les binaires est supposée se produire sur un temps caractéristique bien plus long que la période orbitale (néglige les ondes gravitationnelles).

Formulation des équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

⇒ système de 10 EDP d'ordre 2, non-linéaires et couplées,
 ⇒ le champ $g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$ décrit la métrique de l'espace-temps, vu comme variété de dimension 4.

Utilisation du formalisme "3+1" pour se ramener à un problème de Cauchy :



Choix de jauge

Le système “3+1” est un système hyperbolique avec contraintes. D’autres formulations ont été proposées pour rendre les équations d’Einstein complètement hyperboliques (problème à la limite classique).

Il existe aussi beaucoup de liberté sur le choix du système de coordonnées sur la variété :

⇒ recherche de variables et coordonnées telles, que le système soit maximale-ment contraint (2 degrés de liberté pour les ondes gravitationnelles).

Dans les cas (quasi-)stationnaires, système purement elliptique : 4 équations (étoiles isolées en rotation) ou 5 (système binaire avec l’approximation IWM).

⇒ Calcul des *conditions initiales* pour l’évolution dynamique.

Méthodes numériques

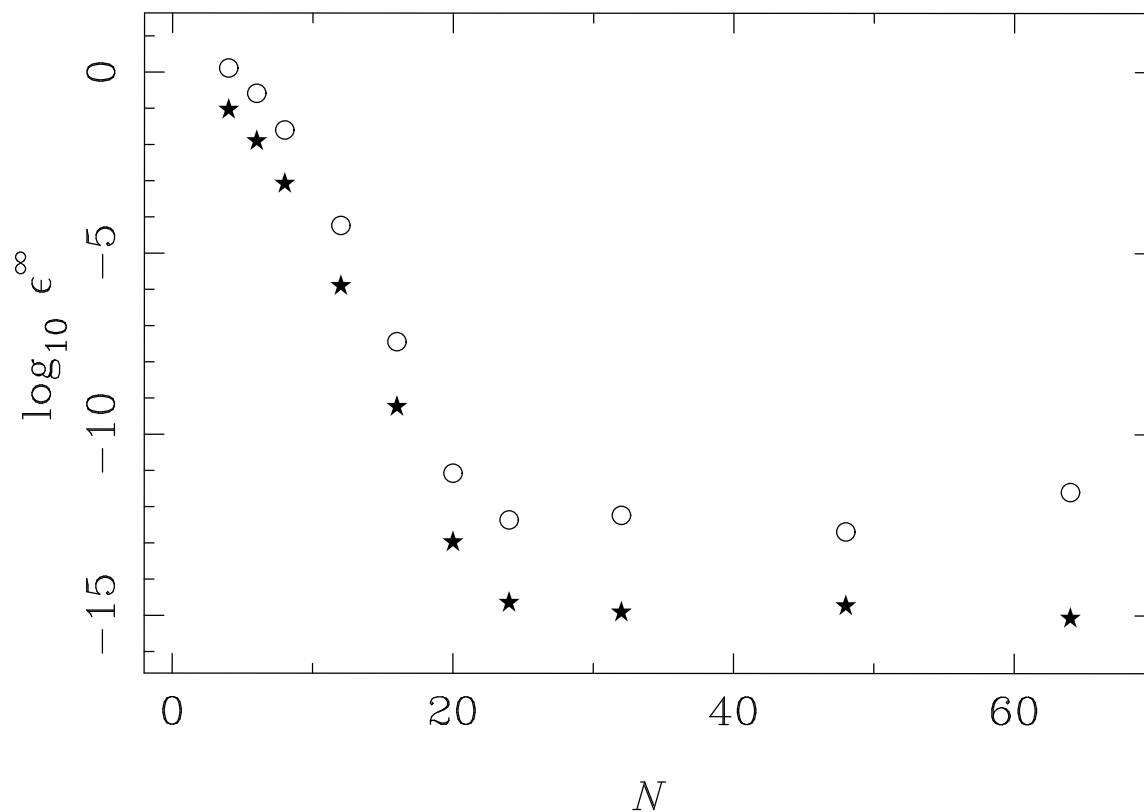
Caractéristiques en relativité numérique :

- contrairement aux champs liés à la matière, le champ gravitationnel est toujours continu ;
- problèmes intéressants sont 3D...
- étude d'objets de type stellaire et isolés.
- ⇒ méthodes spectrales (décomposition des champs sur des bases de fonctions) ;
- ⇒ coordonnées et composantes sphériques ;
- ⇒ changement de variable de type $u = 1/r$ pour les équations elliptiques (conditions aux bords bien définies à l'infini...).

Ces méthodes ont commencé à être appliquées aux simulations astrophysiques par Silvano Bonazzola et Jean-Alain Marck au milieu des années 1980, à l'Observatoire de Meudon.

Précision

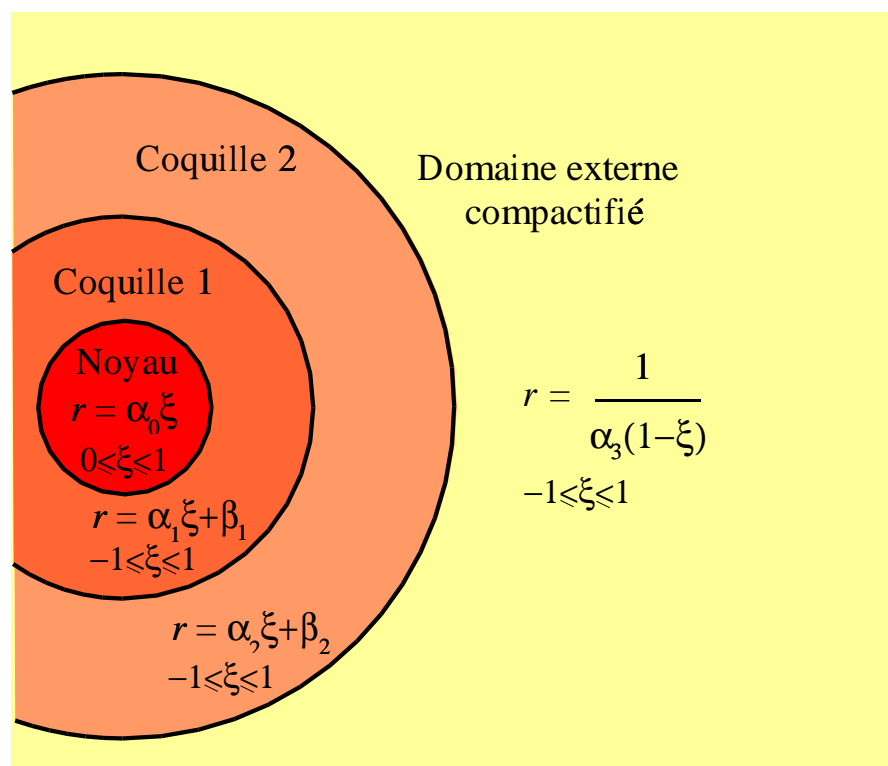
$f(x) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{8}(x+1)^3$ sur $[-1; 1]$, représentée par une série de N polynômes de Tchebychev ($T_n(x) = \cos(n \arccos x)$)



Décroissance en e^{-N} ; pour comparaison : plus de 10^5 points nécessaires avec un schéma d'ordre 3 en différences finies...

Méthodes multidomaines

Méthodes spectrales multigrille + coordonnées sphériques :



Décomposition :
 Polynômes de Tchebychev en ξ ,
 Fourier ou Y_l^m pour la partie
 angulaire (θ, ϕ) ,
 + utilisation des symétries
 et conditions de régularité
 des champs en coordonnées
 sphériques.

Résolution d'EDP : équations de Poisson et de d'Alembert

$$\Delta\phi = \sigma$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm}(r) = \sigma_{lm}(r)$$

Erreur minimale $\sim 10^{-11}$.

$$\square\phi = \sigma$$

$$\left[1 - \frac{\delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] \phi_{lm}^{J+1} = \sigma_{lm}^J$$

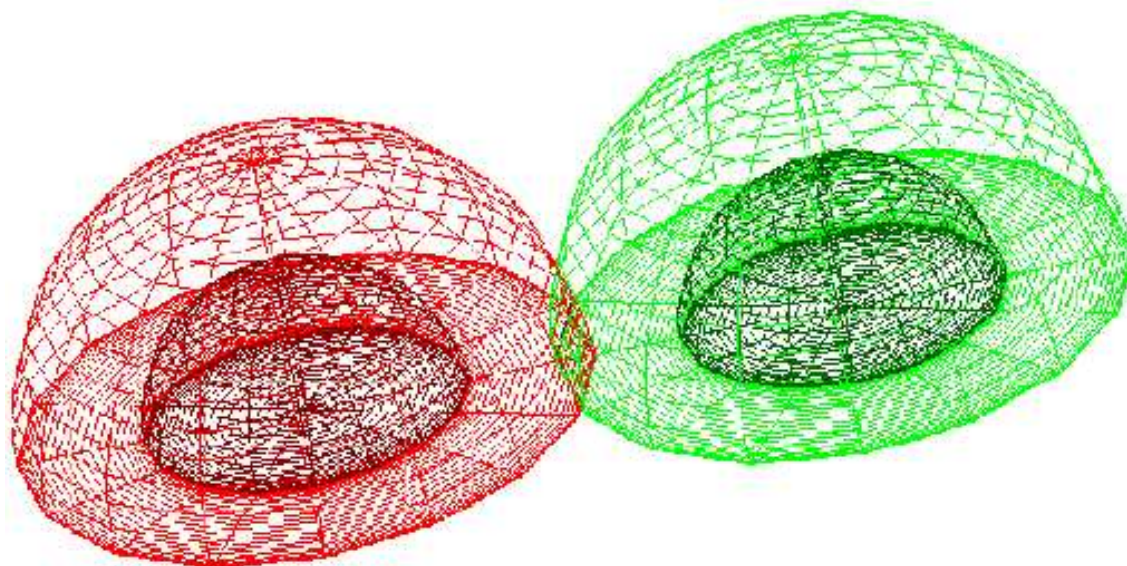
Erreur $\sim 10^{-10}$ (différences finies).

Inversion des opérateurs \iff inversion de matrices $\sim 30 \times 30$

Les parties non-linéaires sont évaluées dans l'espace physique et contribuent aux sources des équations.

\Rightarrow équations de Poisson vectorielle et tensorielle en composantes sphériques.

Ensemble de domaines pour décrire un système binaire



Possibilité d'adapter les grilles à la surface des étoiles par le mapping suivant :

$$r = \alpha[\xi + A(\xi)F(\theta', \varphi') + B(\xi)G(\theta', \varphi')] + \beta, \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'$$

Utilisation avec d'autres méthodes numériques

L'évolution hydrodynamique du système (en relativité générale) peut se faire avec des méthodes spectrales,

mais limitation lorsque présence de chocs ou de discontinuités (phénomène de Gibbs).

Les méthodes spectrales ont été employées pour modéliser le champ gravitationnel, en collaboration avec d'autres méthodes numériques :

- méthodes SPH, pour l'évolution d'un système binaire d'étoiles à neutrons (P.Grandclément & J.Faber, Northwestern university) ;
- différences finies, pour la détermination des modes d'oscillation des étoiles à neutrons (E.Gourgoulhon & I.Jones, university of Southampton)
- méthodes de Godunov – capture de chocs (en relativité générale), pour la simulation des supernovæ (J.Novak & H.Dimmelmeier, Max-Planck-Institut für Astrophysik)

Implémentation

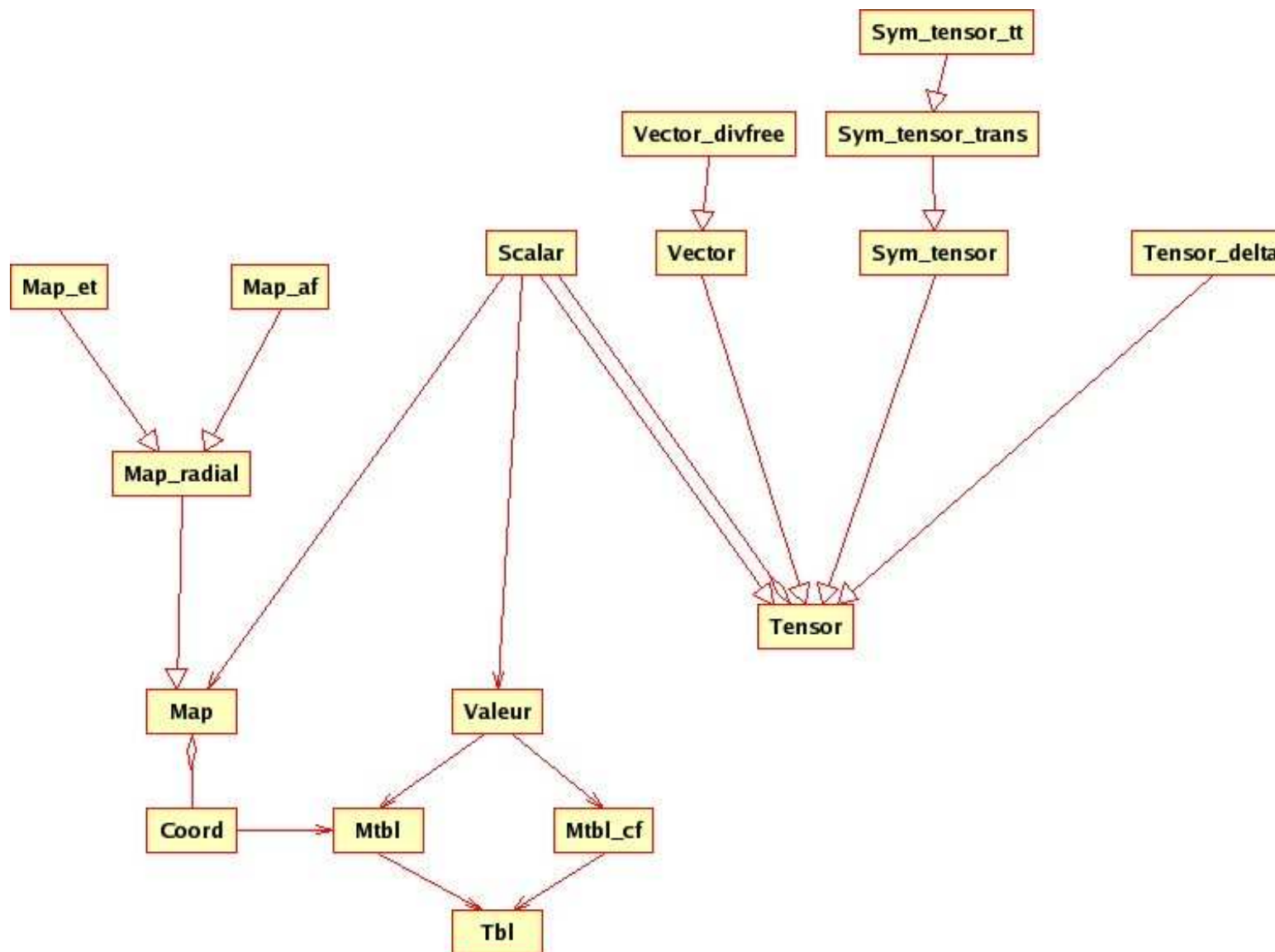
Langage Objet pour la RElativite NumeriquE

Une bibliothèque de classes C++ utilisant les méthodes spectrales multi-domaines, en coordonnées sphériques.

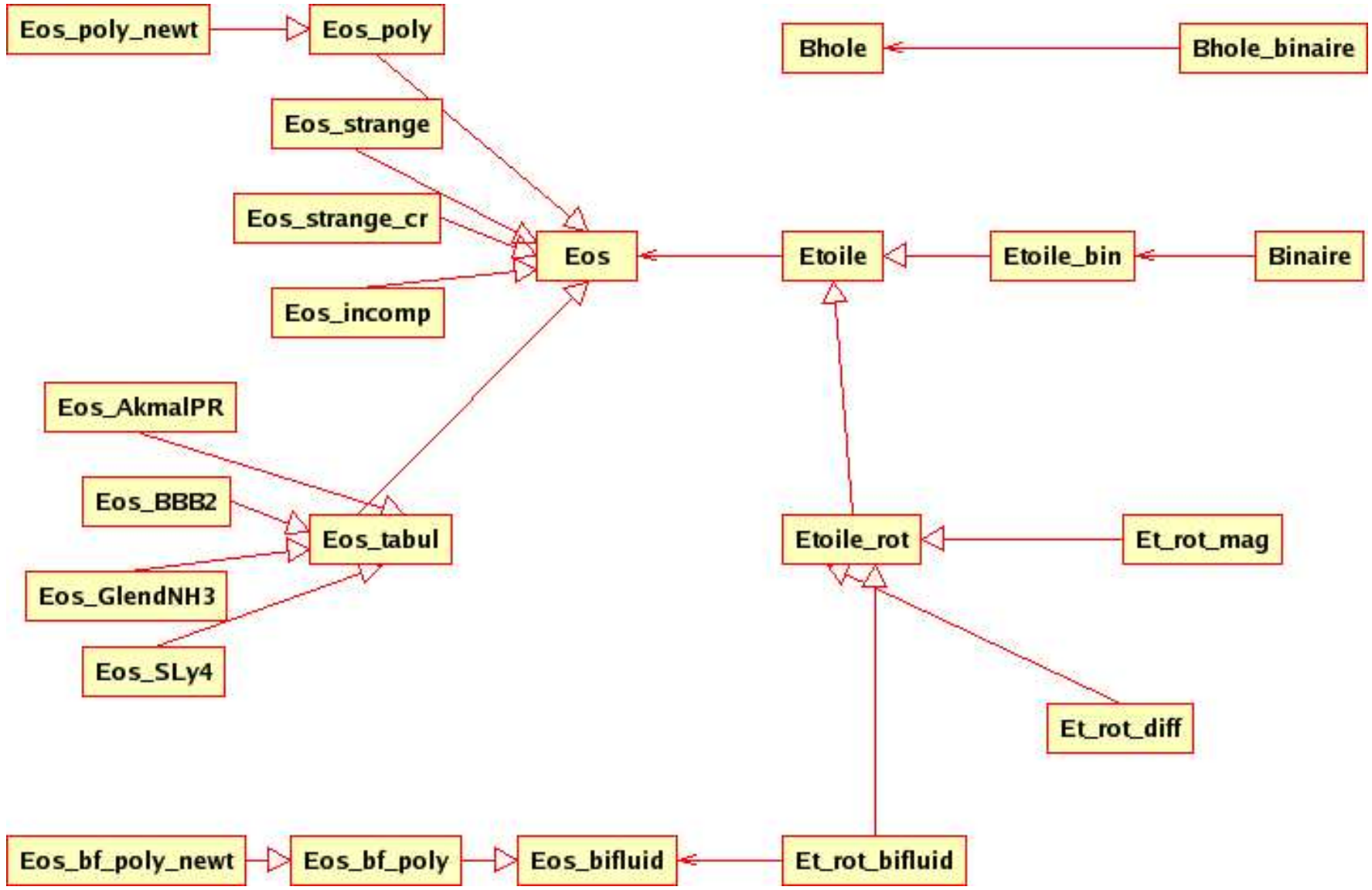
⇒ documentée (doc++) et portable (Linux/gcc, SGI-IRIX, HP-UX, IBM-AIX, DEC, Mac-OSX).

- 1997 : Début de LORENE
- 1999 : Modèles précis d'étoiles de quarks étranges en rotation rapide
- 1999 : Binaires d'étoiles à neutrons en orbites circulaires (approximation IWM de la relativité générale)
- 2001 : Domaine public (GPL) et page web : <http://www.lorene.obspm.fr>
- 2001 : Binaires de trous noirs en orbites circulaires (approximation IWM de la RG)
- 2002 : Équation d'onde 3D avec conditions aux contours absorbantes
- 2003 : Mise en ligne des résultats de simulations.

Objets "numériques" dans LORENE



Objets "astrophysiques" dans LORENE



```
int main() {

    // Setup of a multi-domain grid (Lorene class Mg3d)
    // -----
    int nz = 3 ; // Number of domains
    int nr = 7 ; // Number of collocation points in r in each domain
    int nt = 5 ; // Number of collocation points in theta in each domain
    int np = 8 ; // Number of collocation points in phi in each domain
    int symmetry_theta = SYM ; // symmetry with respect to the equatorial plane
    int symmetry_phi = NONSYM ; // no symmetry in phi
    bool compact = true ; // external domain is compactified

    // Multi-domain grid construction:
    Mg3d mgrid(nz, nr, nt, np, symmetry_theta, symmetry_phi, compact) ;

    // radial boundaries of each domain:
    double r_limits[] = {0., 2., 3., __infinity} ;
    assert( nz == 3 ) ; // since the above array described only 3 domains

    // Setup of an affine mapping : grid --> physical space (Lorene class Map_af)
    // -----
    Map_af map(mgrid, r_limits) ; // Mapping construction

    // Denomination of various coordinates associated with the mapping
    // -----
```

```
const Coord& r = map.r ;           // r field
const Coord& th = map.tet ;        // theta field
const Coord& phi = map.phi ;       // phi field
const Coord& x = map.x ;           // x field
const Coord& y = map.y ;           // y field
const Coord& z = map.z ;           // z field

// Setup of a scalar field (source of the Poisson equation)
// -----
Scalar source(map) ; // construction of an object of Lorene class Scalar
source = exp( - r*r ) * (1 + x + x*y) ;
source.annule_domain(nz-1) ; // The source is set to zero in the last domain
source.std_spectral_base() ; // sets the bases for the spectral expansions
                             // to the standard ones for a scalar field

// Resolution of a Poisson equation
// -----
Scalar pot = source.poisson() ;

cout << "Solution of the Poisson equation : " << endl ;
cout << pot << endl ;

return EXIT_SUCCESS ;
}
```

Mise à disposition

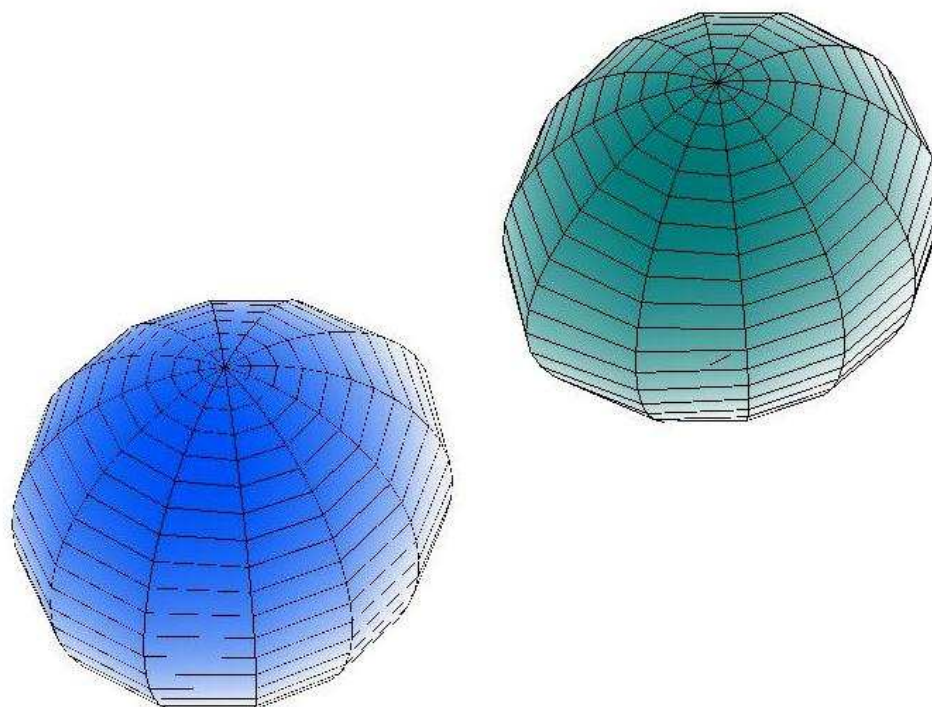
Toute la bibliothèque est téléchargeable anonymement depuis un serveur CVS ; les instructions sont sur la page web : <http://www.lorene.obspm.fr>.

Les équipes / personnes suivantes ont utilisé ou utilisent LORENE :

- Z.Meliani et Ch.Sauty (LUTh, MHD),
- labo. de mathématiques et physique théorique (université de Tours),
- CESR (J-P Chabbert),
- SAp (M. Forot),
- Departamento de Astronomía y Astrofísica, université de Valencia (Espagne),
- Max-Planck-Institut für Astrophysik, Garching (Allemagne),
- Albert-Einstein-Institut für Gravitationphysik, Potsdam (Allemagne),
- Institut für Astronomie und Astrophysik, université de Tübingen (Allemagne),
- Relativity Group, université de Southampton (Royaume-Uni),
- Institut Copernic à Varsovie (Pologne),
- SISSA à Trieste (Italie),
- Northwestern university à Chicago (États-Unis),
- Dép. d'astronomie et des sciences de la terre, université de Tokyo (Japon)...

Étoiles à neutrons binaires

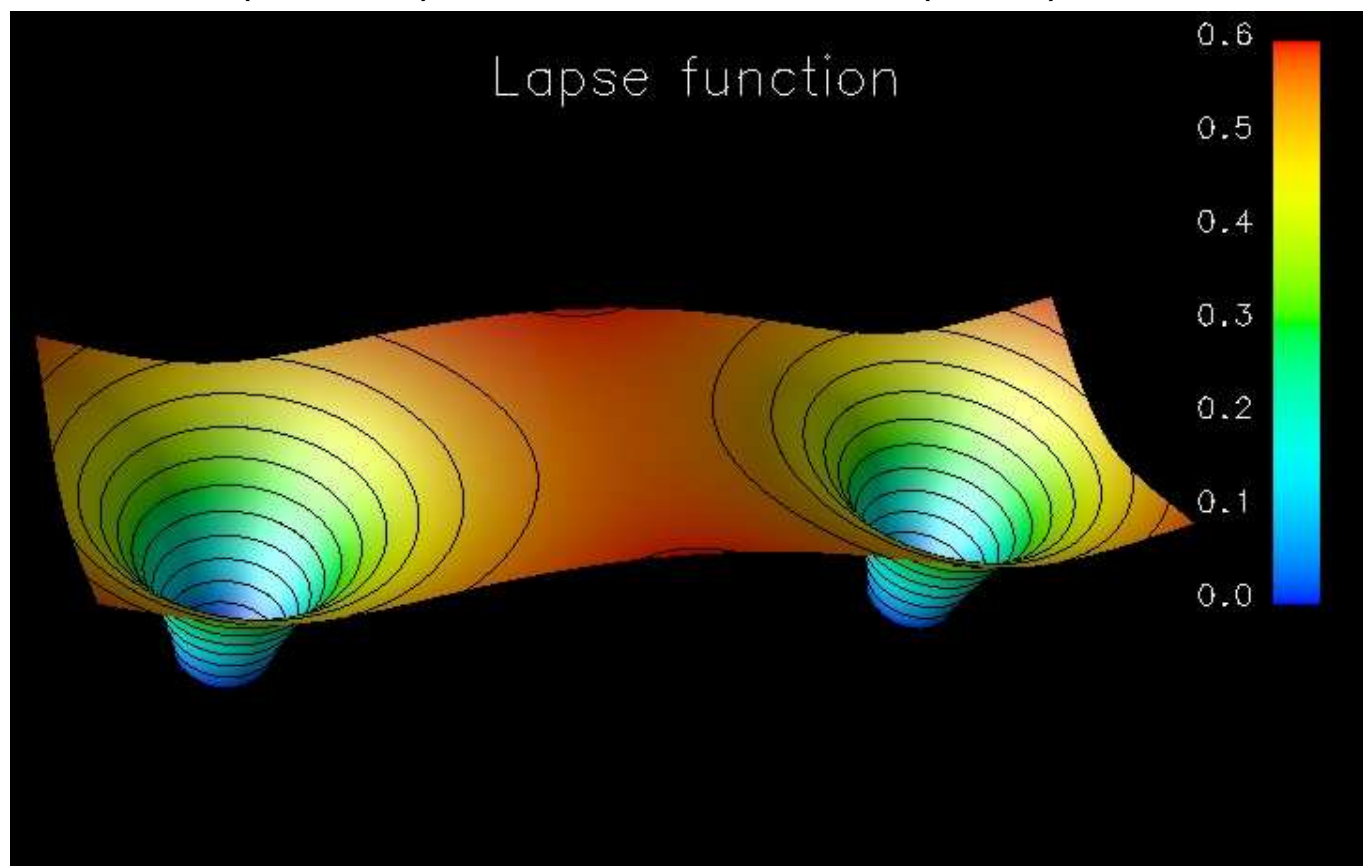
Observation de pulsars binaires → les ondes gravitationnelles existent !



- Hypothèses d'irrotationalité et de quasi-stationnarité
- 5 équations d'Einstein résolues / 10
- Pas d'ondes gravitationnelles, mais informations sur l'évolution du système.

Trous noirs binaires

Trous noirs stellaires (VIRGO) comme galactiques (LISA) sont intéressants.



- Première simulation “réaliste”
- Bon accord avec les calculs post-newtoniens
- Localisation de la dernière orbite stable primordiale pour le traitement du signal.

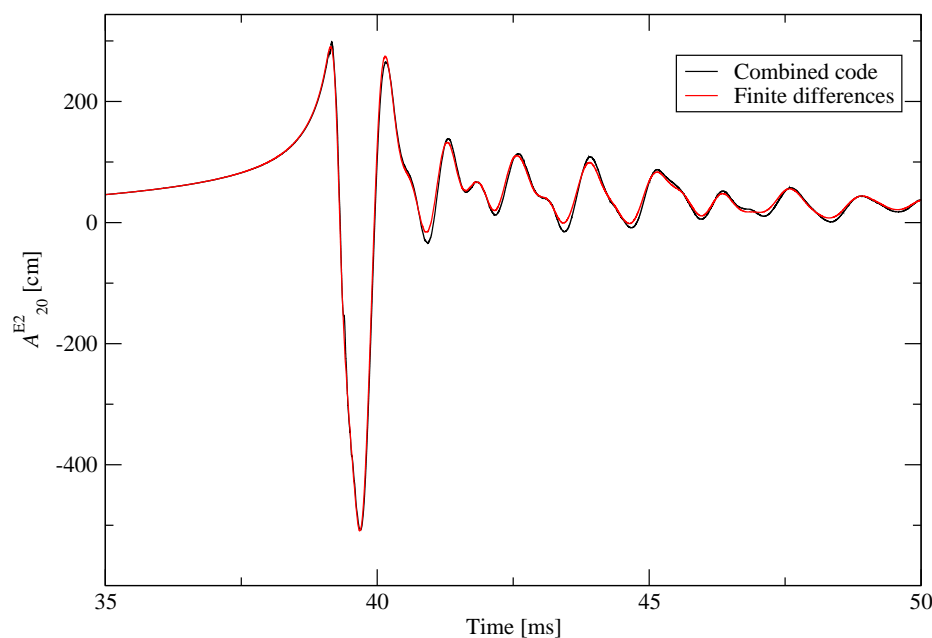
Effondrements stellaires

Modèle physique très riche et trop complexe...

Commence par modélisation hydro + champ gravitationnel relativiste (Einstein) :

- méthodes spectrales pour modéliser la gravité (faibles besoins informatiques),
- méthodes de type Godunov (capture de chocs) pour traiter les discontinuités hydrodynamiques.

Quadrupole amplitude



Comparaison des formes d'ondes gravitationnelles émises dans le cas axisymétrique (code mixte / code différences finies). Le code 3D est actuellement opérationnel...

Enjeux

- physiques : étude de l'évolution dynamiques des systèmes, définition des conditions aux bords sur l'horizon des trous noirs, choix des approximations...
- numériques : conditions aux bords absorbantes (bords externes), combinaison avec d'autres méthodes numériques,
- informatiques : visualisation, stockage et mise à disposition des résultats sur un serveur web/ftp (conditions initiales pour l'évolution dynamique par d'autres groupes, traitement des données VIRGO/LIGO, ...)