

# Modélisation de sources astrophysiques d'ondes gravitationnelles

Jérôme Novak

*LUTH* : Laboratoire de l'Univers et de ses THéories

CNRS / Observatoire de Paris

F-92195 Meudon Cedex, France

<http://www.luth.obspm.fr/>

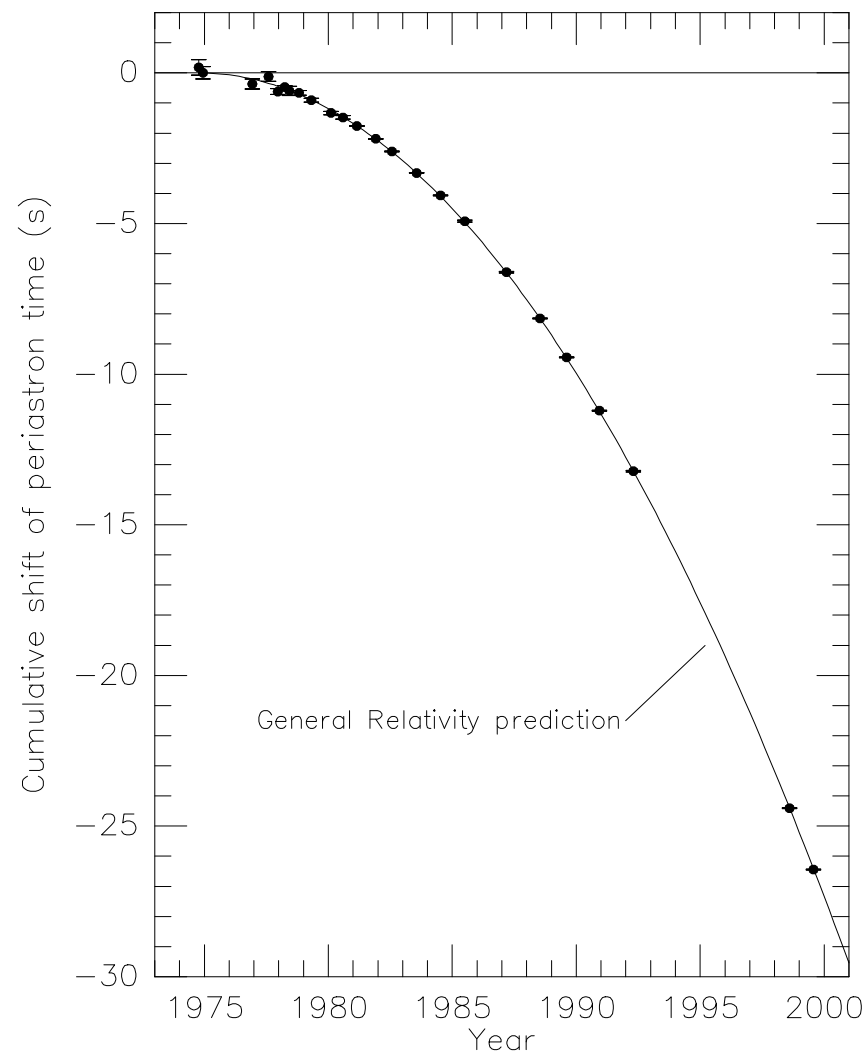
*Au sein de l'équipe "relativité numérique" : Silvano Bonazzola, Éric Gourgoulhon,  
Philippe Grandclément...*

CESR, 24 février 2005

## Contexte scientifique

Intérêt des ondes gravitationnelles :

1. test de la théorie de la gravitation (Relativité Générale), mais déjà fait de manière indirecte (pulsars binaires)
2. nouveau vecteur d'informations pour l'astrophysique, orthogonal aux photons  $\Rightarrow$  *astrophysique gravitationnelle*



## Détecteurs interférométriques d'ondes gravitationnelles au sol

VIRGO



(CNRS/INFN, à  
Pise)

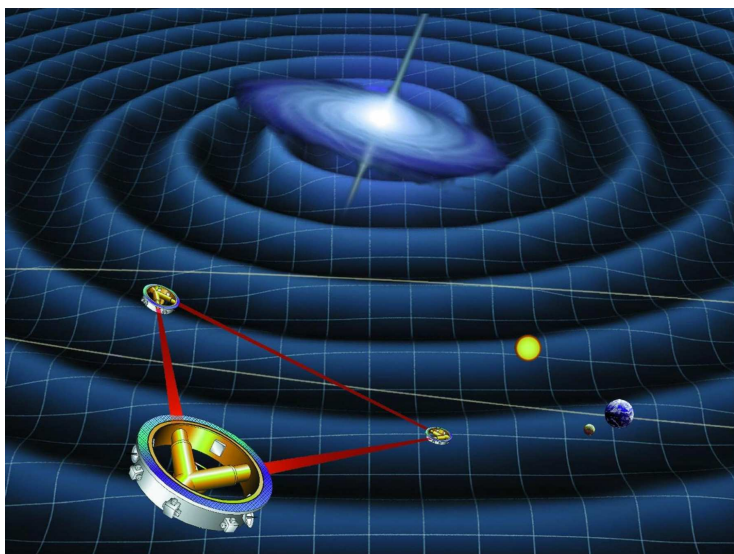


LIGO (NSF, à Livingston  
et Hanford)

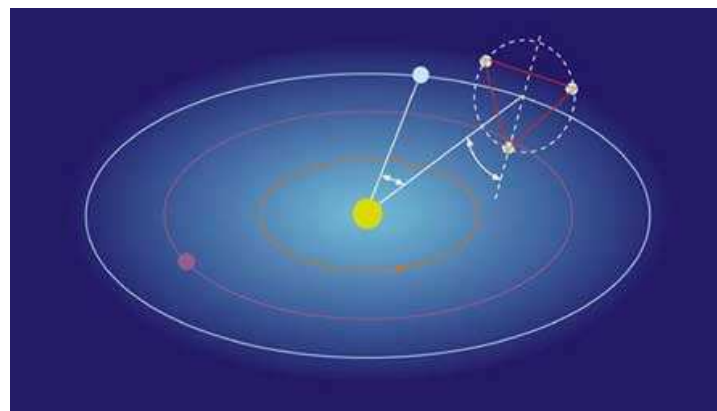


Sensibilité entre 10 Hz (100 Hz pour LIGO) et 10 kHz  $\Rightarrow$  hautes fréquences  
(correspondent à la fréquence *mécanique* du système émetteur).

## Projet de détecteur interférométrique dans l'espace : LISA



3 satellites en triangle de 5 millions de km, orbite héliocentrique, 20 jours derrière la Terre



ESA/NASA, prévu pour un lancement pour 2013.

Sensibilité entre  $10^{-4}$  Hz et 1 Hz  $\Rightarrow$  basses fréquences.

## Estimations de l'émission

En utilisant les équations d'Einstein linéarisées :

- au premier ordre  $h \sim \ddot{Q}$  (moment quadrupolaire de la source), ou encore  $h \sim \frac{G}{c^4} \frac{E^{NS}}{r}$  ;
- l'effet d'une onde gravitationnelle sur deux particules de masses négligeables est la variation de leur distance au cours du temps  $\Delta l/l \simeq h$  ;
- le flux reçu à une fréquence  $f$  est

$$F = 0.3 \left( \frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left( \frac{h}{10^{-21}} \right)^2 \text{ Wm}^{-2}.$$

- la puissance (ou luminosité) gravitationnelle rayonnée par une source est

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4.$$

## Sources astrophysiques

$$L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left( \frac{R_S}{R} \right)^2 \left( \frac{v}{c} \right)^6 .$$

⇒ Objets *compacts* en mouvement relativiste et non sphériques.

Pour les **hautes fréquences** (10 Hz → 10 kHz) :

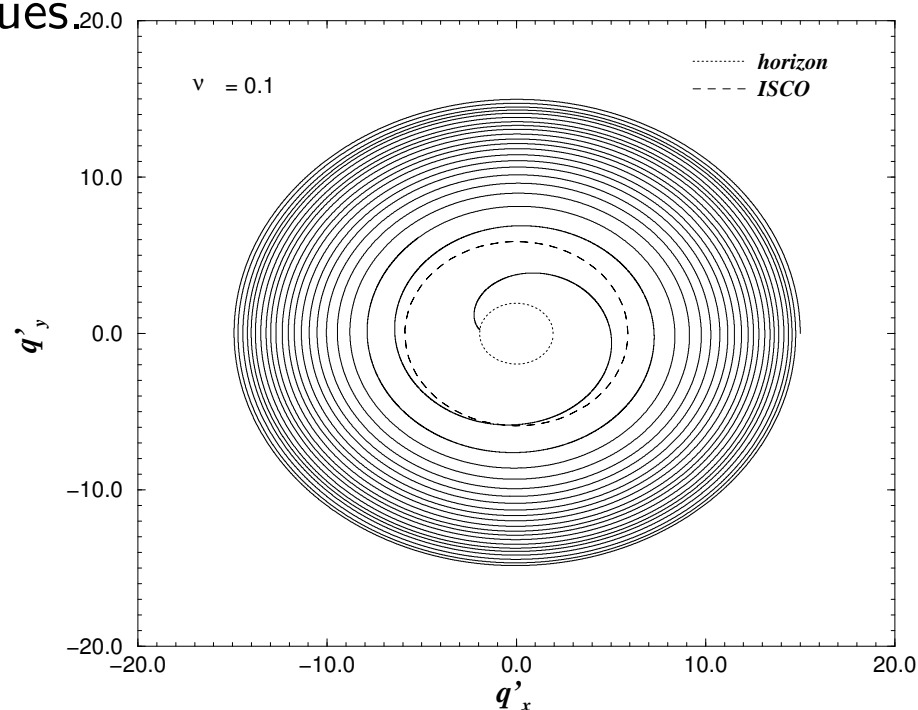
- systèmes binaires d'astres compacts en coalescence (étoiles à neutrons ou trous noirs), issus de l'évolution d'étoiles binaires massives ;
- instabilités et déformations des (proto)-étoiles à neutrons (glitches, champ magnétique, astérosismologie,...) ⇒ intégration du signal sur de nombreuses périodes ;
- *supernovæ* (??)

Pour les **basses fréquences** ( $10^{-4}$  Hz → 1 Hz)

- binaires de trous noirs massifs (galactiques) ;
- binaires de naines blanches / binaires serrées ;
- astres compacts capturés par un trou noir galactique ;
- fond diffu (???)

## Systemes binaires d'astres compacts

Ce sont des systèmes relativistes, avec un champ gravitationnel intense et fortement asymétriques.



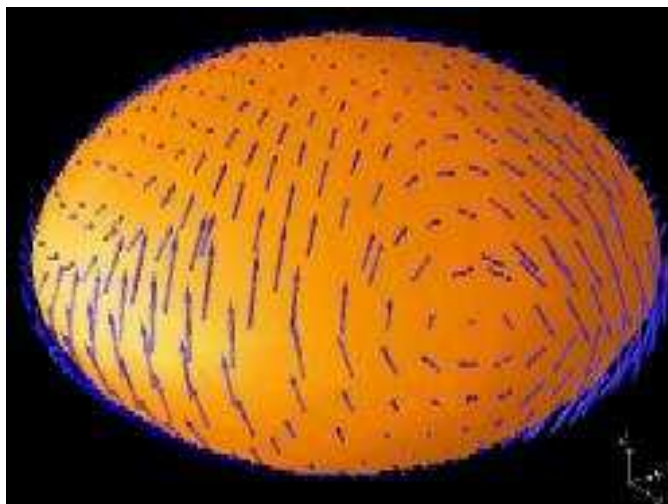
Calculs post-newtoniens supposent des masses ponctuelles.

La dernière étape (fortement dynamique) devrait émettre le plus d'ondes détectables.

⇒ données initiales (quasi-stationnaires) puis évolution dynamique.



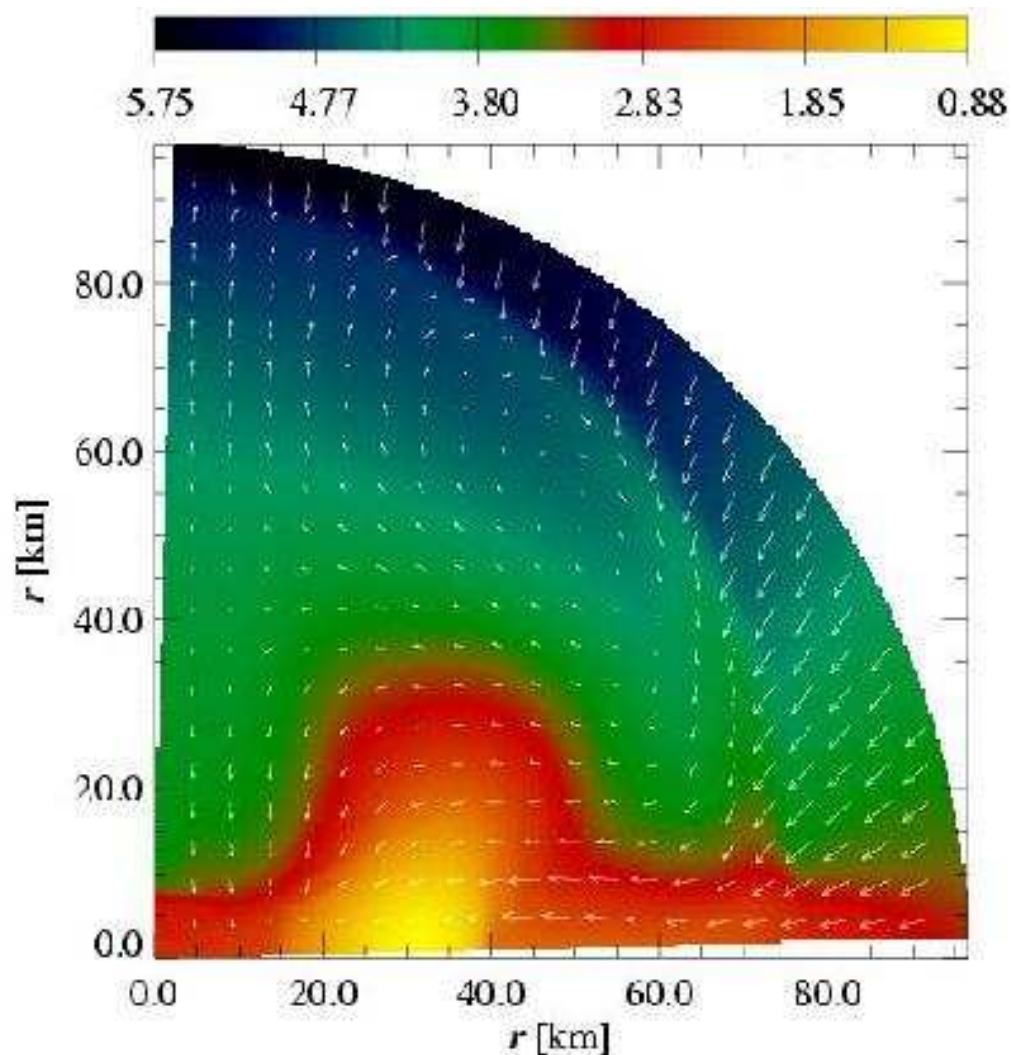
## Étoiles à neutrons en rotation



Déformations produites par :

- Le **champ magnétique** (qqg GT) : dans les modèles de pulsars, le moment magnétique n'est pas aligné avec l'axe de rotation.
  - **Instabilités** du cœur : la perte de moment cinétique par émission d'ondes gravitationnelles induit la croissance de certains modes oscillatoires pour les étoiles en rotation (modes  $r$ ).
  - Réarrangements de l'écorce (phénomènes de **glitch**).
- ⇒ Recherche du **spectre** d'oscillation suivant les équations d'état (quarks  $s$ , superfluidité, ...) ou de l'amplitude des déformations.



*supernovæ*

Les ondes gravitationnelles ne sont pas absorbées par la matière, elles peuvent donc arriver depuis le cœur dense des *supernovæ*.

Première source étudiée car l'énergie libérée  $\sim 0.1M_{\odot}c^2$  (essentiellement sous forme de neutrinos).

⇒ modèles *effectifs* d'effondrements pour estimer les ondes gravitationnelles (et non modéliser le phénomène de *supernova*).

## Modèles physiques

- champ gravitationnel : théorie de la relativité générale ;
- champ électromagnétique couplé au champ gravitationnel : équations d'Einstein-Maxwell ;
- matière : fluide(s) parfait(s), mais de nombreuses équations d'état de la matière dense sont utilisées (éventuellement prise en compte de la superfluidité) + conducteur parfait

Lors de études passées, les hypothèses sur la partie physique ont été :

**symétries** les étoiles isolées sont supposées invariantes par rotation autour de leur axe (éventuellement perturbations),

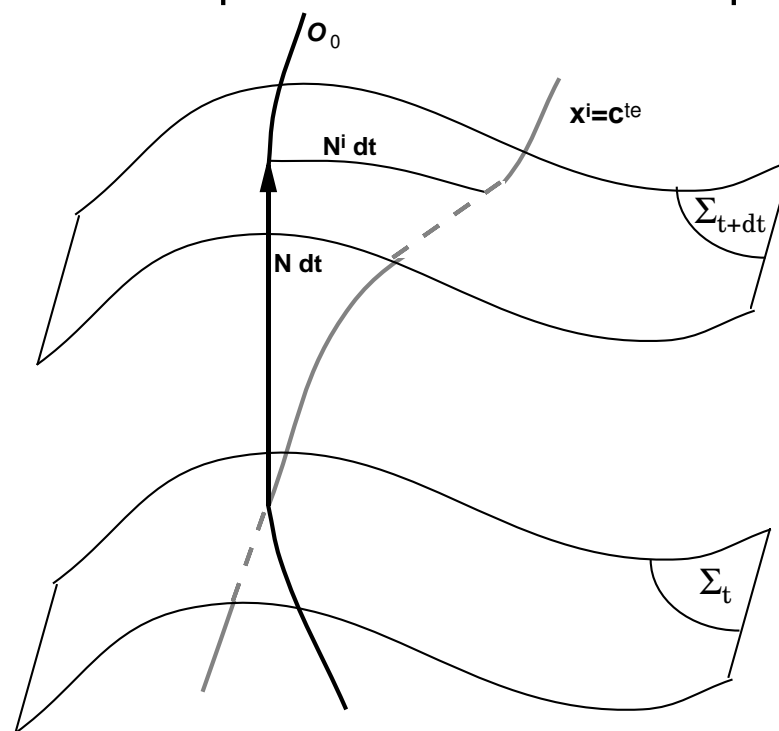
**quasi-stationnarité** la perte de moment cinétiques par les binaires est supposée se produire sur un temps caractéristique bien plus long que la période orbitale (néglige les ondes gravitationnelles).

## Formulation des équations d'Einstein

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T_{\mu\nu}$$

⇒ système de 10 EDP d'ordre 2, non-linéaires et couplées,  
 ⇒ le champ  $g_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)$  décrit la métrique de l'espace-temps, vu comme variété de dimension 4.

Utilisation du formalisme "3+1" pour se ramener à un problème de Cauchy :



## Choix de jauge

Dans les cas (quasi-)stationnaires, système purement elliptique : 4 équations (étoiles isolées en rotation) ou 5 (système binaire avec l'approximation IWM).

⇒ Calcul des *conditions initiales* pour l'évolution dynamique.

En général, le système "3+1" est un système hyperbolique avec contraintes. D'autres formulations ont été proposées pour rendre les équations d'Einstein complètement hyperboliques (eventuels problèmes à la limite classique).

Il existe aussi beaucoup de liberté sur le choix du système de coordonnées sur la variété :

⇒ recherche de variables et coordonnées telles, que le système soit maximale-ment *contraint* (2 degrés de liberté pour les ondes gravitationnelles). *S.Bonazzola, E.Gourgoulhon, P.Grandclément et J.N., Phys. Rev. D 70 (2004).*

## Méthodes numériques

Caractéristiques en relativité numérique :

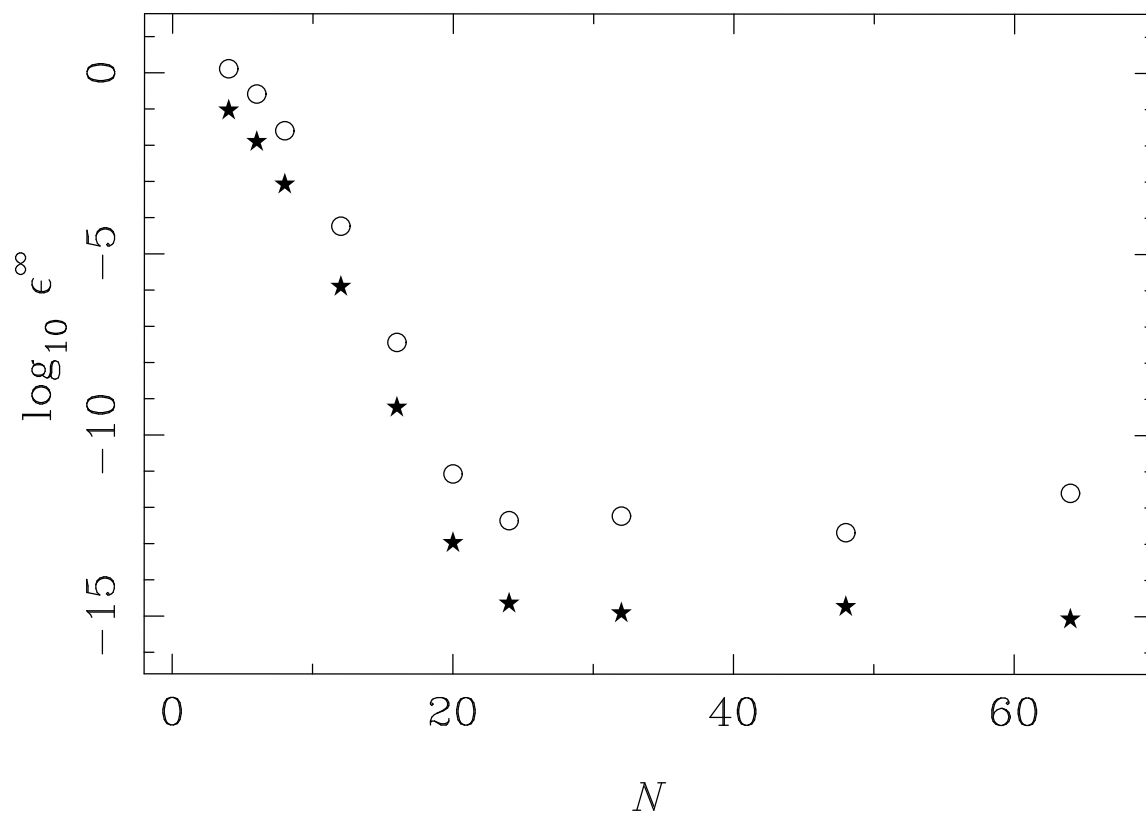
- contrairement aux champs liés à la matière, le champ gravitationnel est toujours continu ;
  - problèmes intéressants sont 3D...
  - étude d'objets de type stellaire et isolés.
- ⇒ méthodes spectrales (décomposition des champs sur des bases de fonctions) ;
- ⇒ coordonnées et composantes sphériques ;
- ⇒ changement de variable de type  $u = 1/r$  pour les équations elliptiques (conditions aux bords bien définies à l'infini...).

Ces méthodes ont commencé à être appliquées aux simulations astrophysiques par Silvano Bonazzola et Jean-Alain Marck au milieu des années 1980, à l'Observatoire de Meudon.

Aujourd'hui : bibliothèque **LORENE** : <http://www.lorene.obspm.fr>.

## Précision

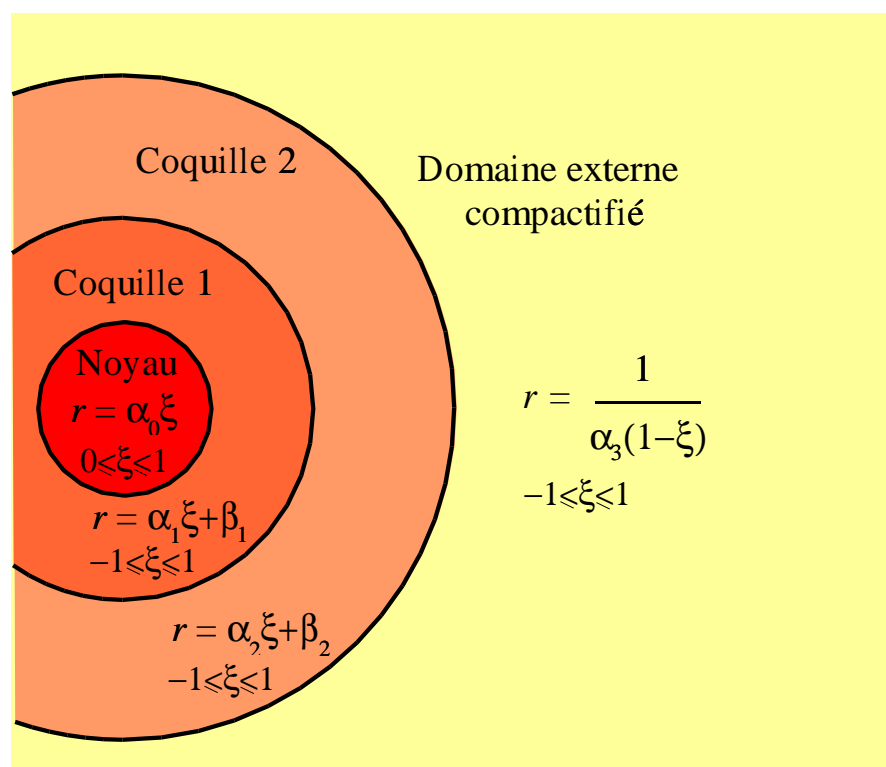
$f(x) = \cos^3\left(\frac{\pi}{2}x\right) - \frac{1}{8}(x+1)^3$  sur  $[-1; 1]$ , représentée par une série de  $N$  polynômes de Tchebychev ( $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$ )



Décroissance en  $e^{-N}$  ; pour comparaison : plus de  $10^5$  points nécessaires avec un schéma d'ordre 3 en différences finies...

## Décomposition multidomaine

Méthodes spectrales multigrille + coordonnées sphériques :



Décomposition :  
 Polynômes de Tchebychev en  $\xi$ ,  
 Fourier ou  $Y_l^m$  pour la partie  
 angulaire  $(\theta, \phi)$ ,  
 + utilisation des symétries  
 et conditions de régularité  
 des champs en coordonnées  
 sphériques.



## Résolution d'EDP : équations de Poisson et de d'Alembert

$$\Delta\phi = \sigma$$

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \phi_{lm}(r) = \sigma_{lm}(r)$$

Erreur minimale  $\sim 10^{-14}$ .

$$\square\phi = \sigma$$

$$\left[ 1 - \frac{\delta t^2}{2} \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) \right] \phi_{lm}^{J+1} = \sigma_{lm}^J$$

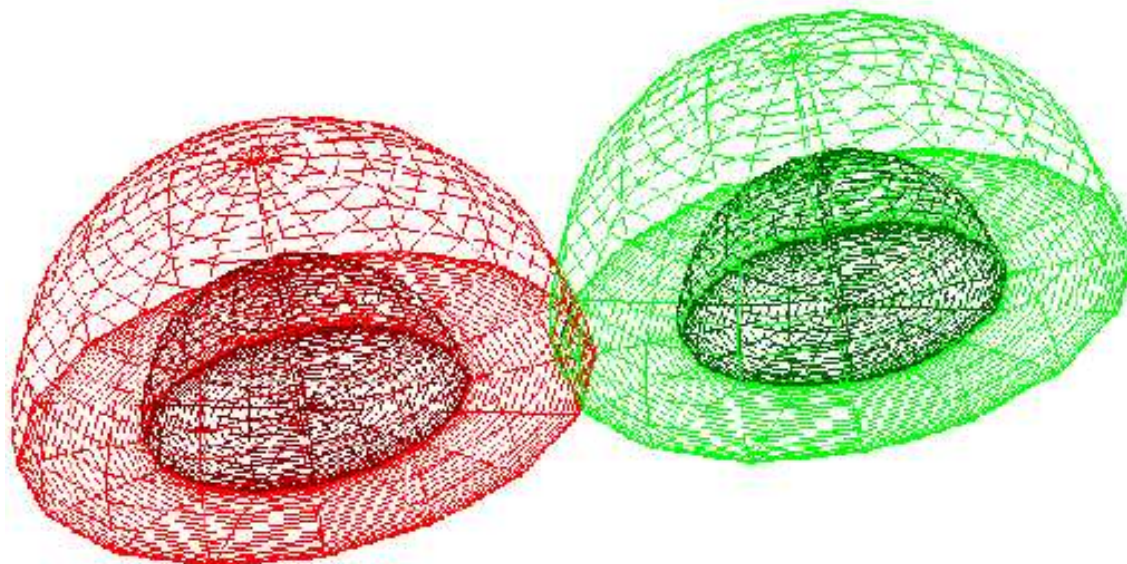
Erreur  $\sim 10^{-10}$  (différences finies).

Inversion des opérateurs  $\iff$  inversion de matrices  $\sim 30 \times 30$

Les parties non-linéaires sont évaluées dans l'espace physique et contribuent aux sources des équations.

$\Rightarrow$  équations de Poisson vectorielle et tensorielle en composantes sphériques.

## Ensemble de domaines pour décrire un système binaire



Possibilité d'adapter les grilles à la surface des étoiles par le mapping suivant :

$$r = \alpha[\xi + A(\xi)F(\theta', \varphi') + B(\xi)G(\theta', \varphi')] + \beta, \quad \theta = \theta', \quad \varphi = \varphi'$$

## Utilisation avec d'autres méthodes numériques

L'évolution hydrodynamique du système (en relativité générale) peut se faire avec des méthodes spectrales,

*mais* limitation lorsque présence de chocs ou de discontinuités (phénomène de Gibbs).

Les méthodes spectrales ont été employées pour modéliser le champ gravitationnel, en collaboration avec d'autres méthodes numériques :

- méthodes SPH, pour l'évolution d'un système binaire d'étoiles à neutrons (P.Grandclément & J.Faber, Northwestern university) ;
- différences finies, pour la détermination des modes d'oscillation des étoiles à neutrons (E.Gourgoulhon & I.Jones, university of Southampton)
- méthodes de Godunov – capture de chocs (en relativité générale), pour la simulation des supernovæ (J.Novak & H.Dimmelmeier, Max-Planck-Institut für Astrophysik)

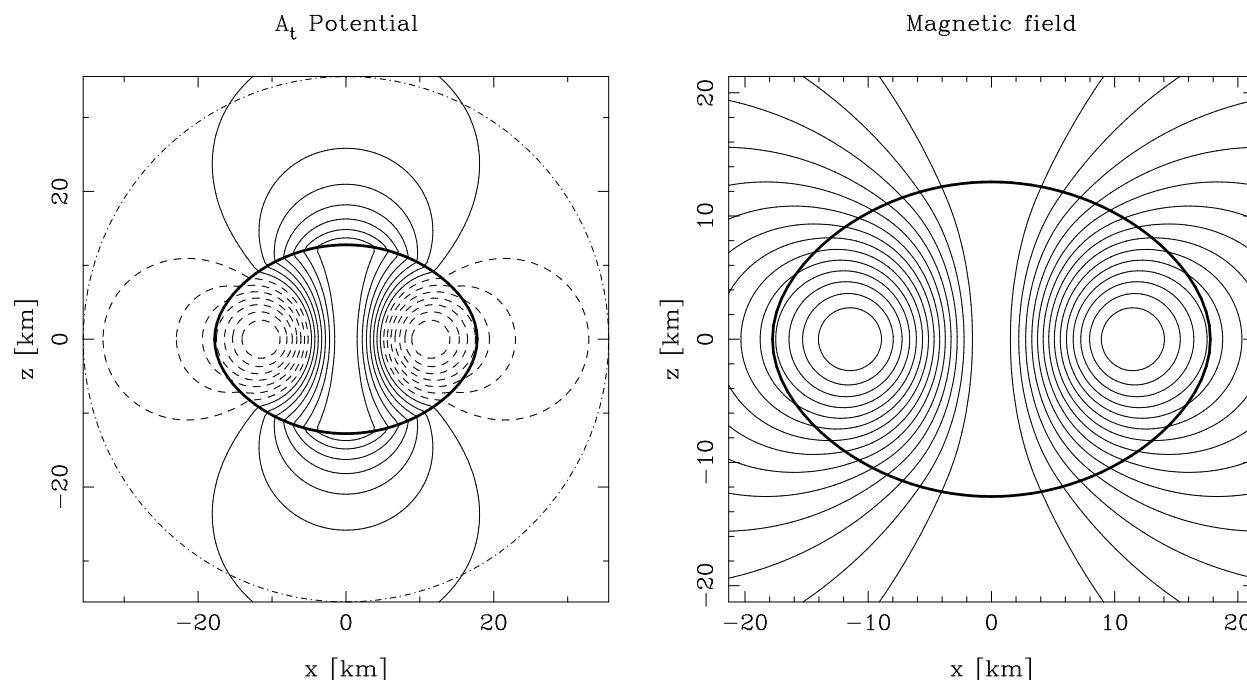
Résultats :

ondes gravitationnelles et astres  
compacts

## Champ magnétique, magnétars

Champ magnétique des magnétars  $\rightarrow 10^{13}$  T.

Modèles stationnaires d'étoiles en rotation rapide + axe magnétique aligné



Déformation due à la pression magnétique importante que dans le cas des magnétars :

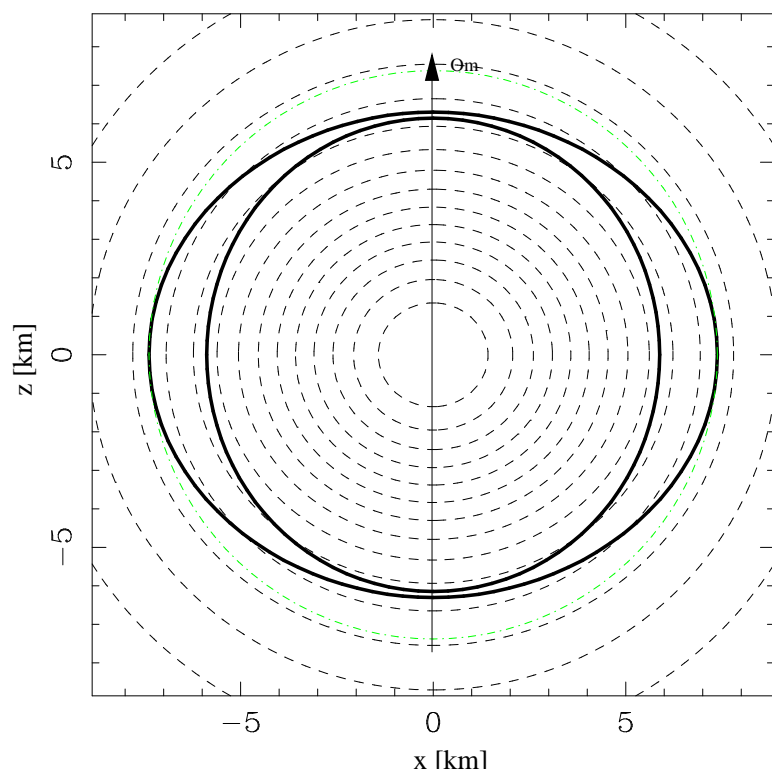
*M.Bocquet, S.Bonazzola, E.Gourgoulhon et J.N., Astron. & Astrophys. 301,(1995).*

Possibilité d'émission d'ondes gravitationnelles : *S.Bonazzola et E.Gourgoulhon, Astron. & Astrophys. 312,(1996).*

Rapport gyromagnétique : *J.N. et E.Marcq, Class. Quant. Grav. 20, (2003).*

## Superfluidité dans les étoiles à neutrons

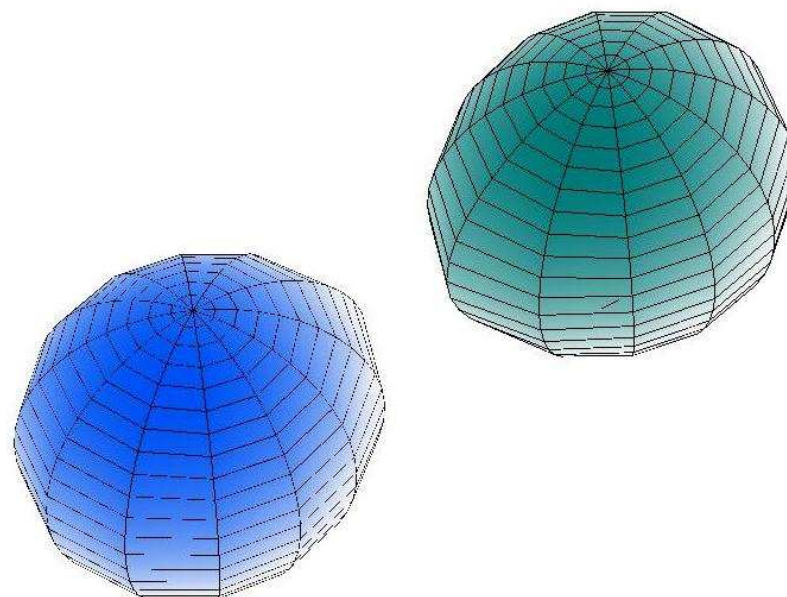
- Modèles à deux fluides : les neutrons (superfluides) et le reste (normal) avec un **entraînement superfluide**,
- Recherche de solutions stationnaires avec une équation d'état simplifiée (double polytrophe)
- Données initiales pour la recherche d'instabilités de type deux-fluides (plasmas)



Comparaisons avec des solutions “exactes” dans le cas de rotation lente et en gravité newtonienne.

*R.Prix, J.N., G.Comer, t, Phys. Rev. D, sous presse.*

## Étoiles à neutrons / étoiles de quarks binaires



- Hypothèses d'irrotationalité et de quasi-stationnarité
- 5 équations d'Einstein résolues / 10
- Pas d'ondes gravitationnelles, mais informations sur l'évolution du système.

*K.Taniguchi et E.Gourgoulhon, Phys. Rev. D* **66** (2002).

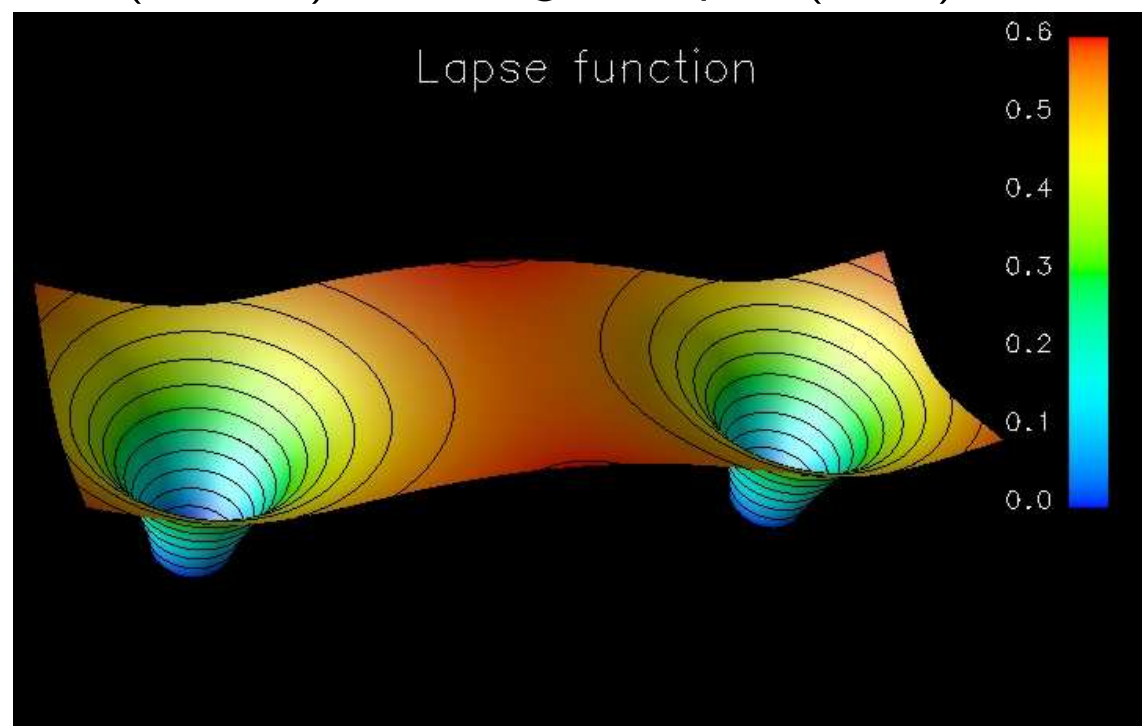
*F.Limousin, D.Gondek-Rosinska et E.Gourgoulhon, Phys. Rev. D, soumis*

Utilisation d'équations d'état réalistes ainsi que possibilité d'étoiles de quarks.



## Trous noirs binaires

Trous noirs stellaires (VIRGO) comme galactiques (LISA) sont intéressants.



- Première simulation “réaliste”
- Bon accord avec les calculs post-newtoniens
- Localisation de la dernière orbite stable primordiale pour le traitement du signal.

*P.Grandclément, E.Gourgoulhon et S.Bonazzola, Phys. Rev. D 65 (2002).*

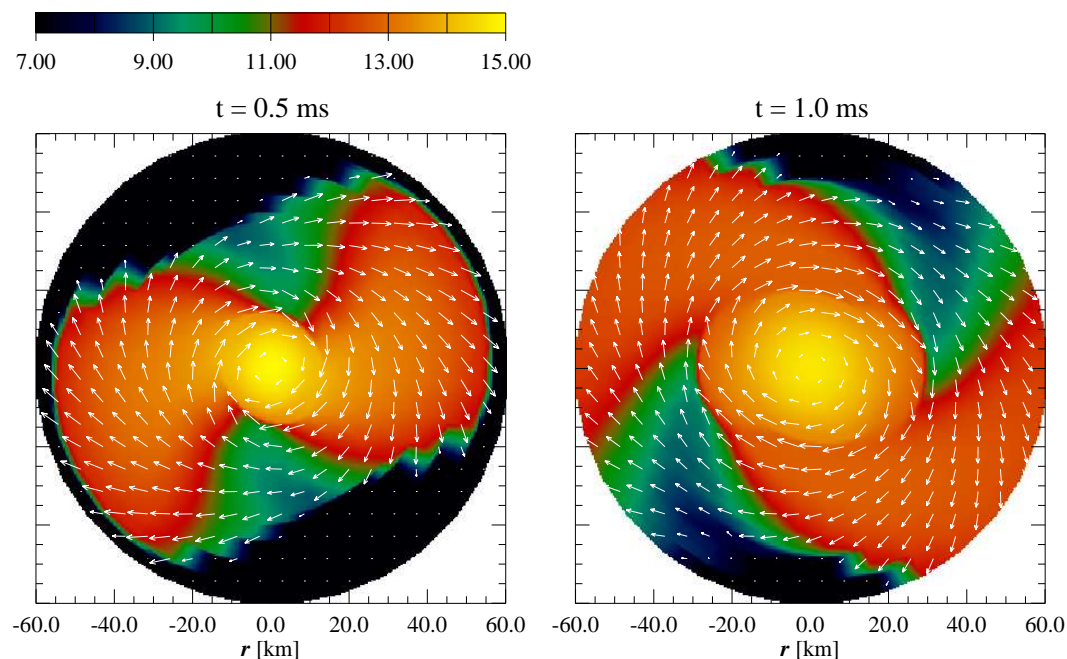
*T.Damour, E.Gourgoulhon et P.Grandclément, Phys. Rev. D 66 (2002).*

## Effondrements stellaires

Modèle physique très riche et trop complexe...

Commence par modélisation hydro + champ gravitationnel relativiste (Einstein) :

- méthodes spectrales pour modéliser la gravité (faibles besoins informatiques),
- méthodes de type Godunov (capture de chocs) pour traiter les discontinuités hydrodynamiques.



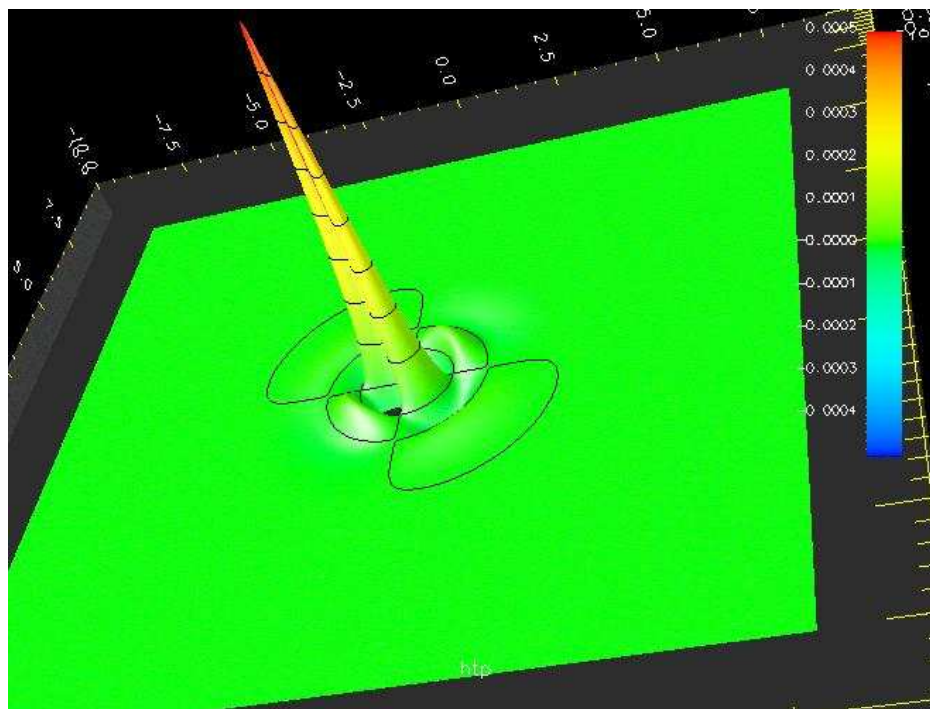
Le code 3D est actuellement opérationnel... étude des instabilités rotationnelles en cours.

*H. Dimmelmeier, J.N., J.A. Font-Roda, J.M. Ibañez et E. Müller, Phys. Rev. D, soumis.*

## Onde gravitationnelle seule

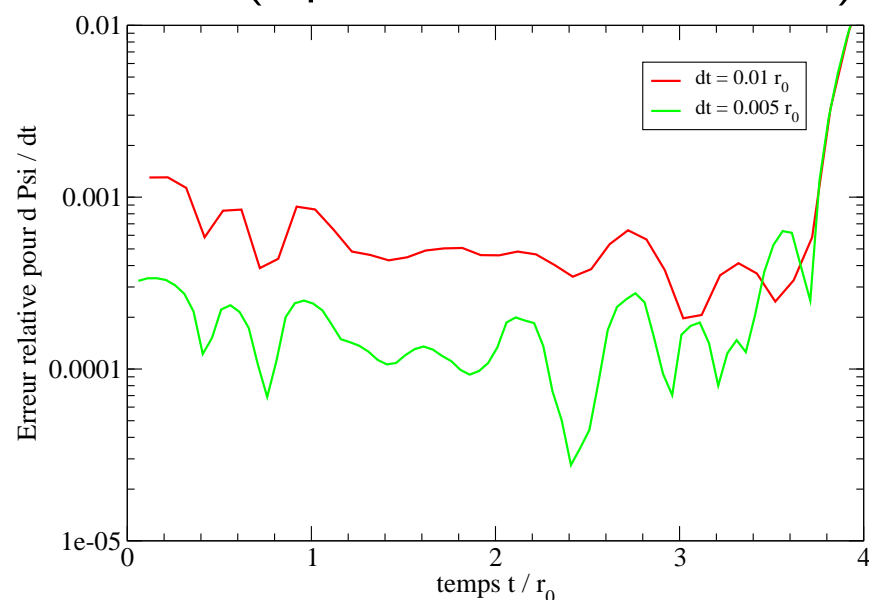
Conditions initiales :  $h$  est donné par ses deux degrés de liberté pour le mode  $l = m = 2$ . En prenant  $\dot{h} = 0$ , on peut résoudre les contraintes au pas de temps initial.

⇒ évolution des équations complètes par le schéma contraint en 3D (symétrie par rapport au plan équatorial).

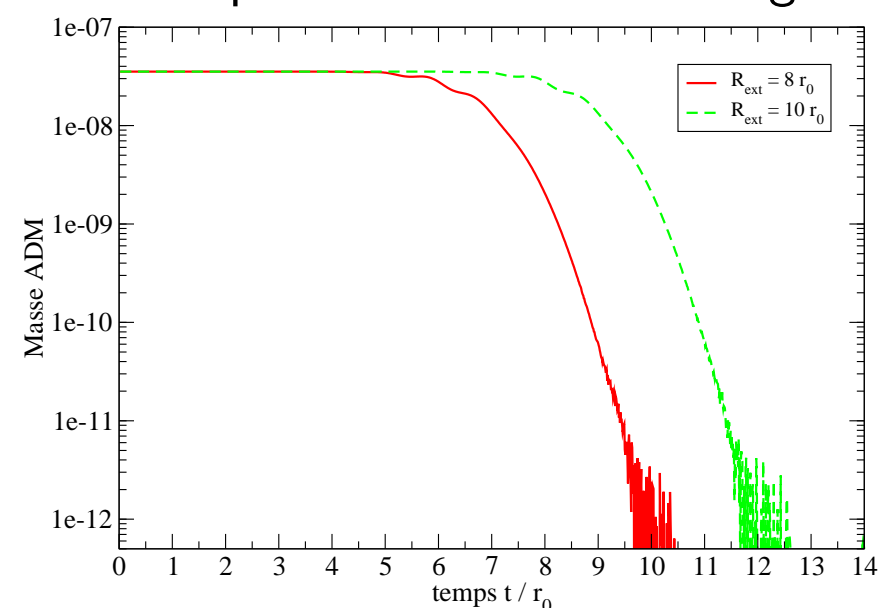


## Simulation dynamique : estimation de la précision

Erreur relative sur l'évolution de  $\Psi$  (équation non résolue).



Évolution de la masse de l'onde présente dans la grille



⇒ les équations de contraintes sont bien résolues (!), mais aussi les équations d'évolution qui ne sont pas imposées numériquement.

⇒ l'onde quitte la grille sans interférences avec le bord. *J.N. et S.Bonazzola, J. Comp. Phys. 197 (2004).*

## Conclusions/perspectives

- modèles très complets d'*étoiles relativistes en rotation rapide*, afin de servir de points de départ aux simulations dynamiques et estimer les déformations ;
  - calculs de *modèles quasi-stationnaires de binaires* (étoiles à neutrons / quarks ou trous noirs) ;
  - formalisme et premières simulations "*complètes*" ...
- ⇒ simulation de phénomènes dynamiques (instationnaires) afin d'estimer le rayonnement gravitationnel : améliorer la partie métrique (excision de la singularité centrale des trous noirs) et développer l'hydrodynamique relativiste.

+ champ magnétique (?)

Intéressés par de multiples problèmes astrophysiques, pas uniquement à la recherche d'ondes gravitationnelles.

LIGO opérationnel, VIRGO presque ... il faut être prêt !