

RELATIVITÉ NUMÉRIQUE AVEC LORENE: ÉTUDE DE SOURCES D'ONDES GRAVITATIONNELLES

Jérôme Novak

Jerome.Novak(at)obspm.fr

Laboratoire de l'Univers et de ses Théories (LUTH)
CNRS / Observatoire de Paris, France

en collaboration avec
Éric Gourgoulhon, Philippe Grandclément,
& Lap-Ming Lin

30 juin 2005

Relativité
numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
gravitationnelles

Équations
d'Einstein

Décomposition
3+1

Formalisme
contraint

Méthodes
numériques

Méthodes
spectrales

Conditions aux
bords

LORENE

Résultats

Onde
gravitationnelle
seule

Effondrements
gravitationnels

Conclusions

1 INTRODUCTION

- Détecteurs d'ondes gravitationnelles
- Sources d'ondes gravitationnelles

2 ÉQUATIONS D'EINSTEIN

- Décomposition 3+1
- Formalisme contraint

3 MÉTHODES NUMÉRIQUES

- Méthodes spectrales
- Conditions aux bords
- LORENE

4 RÉSULTATS

- Onde gravitationnelle seule
- Effondrements gravitationnels

DÉTECTEURS INTERFÉROMÉTRIQUES D'ONDES GRAVITATIONNELLES

Relativité numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes gravitationnelles

Équations d'Einstein

Décomposition 3+1

Formalisme contraint

Méthodes numériques

Méthodes spectrales

Conditions aux bords

LORENE

Résultats

Onde gravitationnelle seule

Effondrements gravitationnels

Conclusions

VIRGO



(CNRS/INFN, à Pise)



LIGO (NSF, à Livingston et Hanford)



Sensibilité entre 10 Hz (100 Hz pour LIGO) et 10 kHz \Rightarrow hautes fréquences (correspondent à la fréquence **mécanique** du système émetteur); faible rapport signal / bruit \Rightarrow connaissance à l'avance des signaux.

QUELLES SONT LES BONNES SOURCES ?

Relativité
 numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
 gravitationnelles

Équations
 d'Einstein

Décomposition
 3+1

Formalisme
 contraint

Méthodes
 numériques

Méthodes
 spectrales

Conditions aux
 bords

LORENE

Résultats

Onde
 gravitationnelle
 seule

Effondrements
 gravitationnels

Conclusions

EN UTILISANT LES ÉQUATIONS D'EINSTEIN LINÉARISÉES :

- au premier ordre $h \sim \ddot{Q}$ (moment quadrupolaire de la source)
- l'effet d'une onde gravitationnelle sur deux particules de masses négligeables est la variation de leur distance au cours du temps

$$\Delta l/l \simeq h$$

- le flux reçu à une fréquence f est

$$F = 0.3 \left(\frac{f}{1 \text{ kHz}} \right)^2 \left(\frac{h}{10^{-21}} \right)^2 \text{ Wm}^{-2}$$

- la puissance (ou luminosité) gravitationnelle rayonnée par une source est

$$L \sim \frac{G}{c^5} s^2 \omega^6 M^2 R^4, \quad \text{ou encore } L \sim \frac{c^5}{G} s^2 \left(\frac{R_S}{R} \right)^2 \left(\frac{v}{c} \right)^6$$

⇒ **OBJETS COMPACTS** EN MOUVEMENT RELATIVISTE ET NON SPHÉRIQUES

Relativité
numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
gravitationnelles

Équations
d'Einstein

Décomposition
3+1

Formalisme
contraint

Méthodes
numériques

Méthodes
spectrales

Conditions aux
bords

LORENE

Résultats

Onde
gravitationnelle
seule

Effondrements
gravitationnels

Conclusions

BINAIRES D'ASTRES COMPACTS

- étoiles à neutrons / trous noirs
- sources très puissantes, mais combien d'événements ?

PULSARS / ÉTOILES À NEUTRONS EN ROTATION

- déformations / symétrie axiale (champ magnétique, instabilité hydro, écorce ...)
- sources nombreuses et possibilité d'intégrer sur une longue période (\Rightarrow augmentation du rapport signal / bruit).
- quelle efficacité ?

SUPERNOVAE

- phénomène relativiste, menant à la formation d'un objet compact et grande énergie libérée ($\sim 0.1M_{\odot}$)
- informations sur les régions très denses, mais très proche de la forme sphérique

DÉCOMPOSITION 3+1 DES ÉQUATIONS D'EINSTEIN $R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}T^{\mu\nu}$

Relativité numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes gravitationnelles

Équations d'Einstein

Décomposition 3+1

Formalisme contraint

Méthodes numériques

Méthodes spectrales

Conditions aux bords

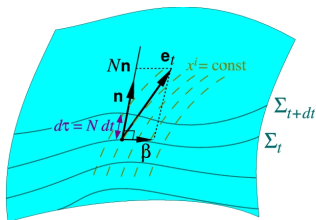
LORENE

Résultats

Onde gravitationnelle seule

Effondrements gravitationnels

Conclusions



ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION :

$$\begin{aligned} \frac{\partial K_{ij}}{\partial t} - \mathcal{L}_\beta K_{ij} = \\ -D_i D_j N + N R_{ij} - 2N K_{ik} K^k_j + \\ N [K K_{ij} + 4\pi((S - E)\gamma_{ij} - 2S_{ij})] \\ K^{ij} = \frac{1}{2N} \left(\frac{\partial \gamma^{ij}}{\partial t} + D^i \beta^j + D^j \beta^i \right). \end{aligned}$$

ÉQUATIONS DE CONTRAINTES :

$$\begin{aligned} R + K^2 - K_{ij} K^{ij} = 16\pi E, \\ D_j K^{ij} - D^i K = 8\pi J^i. \end{aligned}$$

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -N^2 dt^2 + \gamma_{ij} (dx^i + \beta^i dt) (dx^j + \beta^j dt)$$

⇒ problème de Cauchy sous contraintes (bien posé?)

Relativité
numérique

Jérôme Novak

Introduction
DéTECTEURS
Sources d'ondes
gravitationnelles

Équations
d'Einstein

Décomposition
3+1

Formalisme
contraint

Méthodes
numériques

Méthodes
spectrales

Conditions aux
bords

LORENE

Résultats

Onde
gravitationnelle
seule

Effondrements
gravitationnels

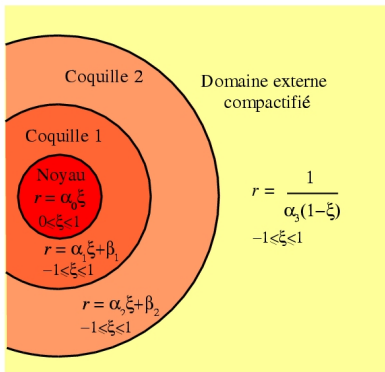
Conclusions

CONDITIONS INITIALES

Dans les cas (quasi-)stationnaires, système purement elliptique : 4 équations (étoiles isolées en rotation) ou 5 (système binaire avec l'approximation IWM).

ÉVOLUTION DYNAMIQUE

- système "3+1" = système hyperbolique avec contraintes. Formulations pour le rendre complètement hyperboliques (éventuels problèmes à la limite classique).
 - liberté sur le choix du système de coordonnées sur la variété
 - recherche de variables et coordonnées telles, que le système soit *maximalement contraint* (2 degrés de liberté pour les ondes gravitationnelles). *S.Bonazzola, E.Gourgoulhon, P.Grandclément et J.N., Phys. Rev. D 70 (2004)*
- ⇒ jauge de Dirac, feuilletage maximal ramènent à deux équations de type ondes + 5 de type Poisson



DÉCOMPOSITION SPECTRALE :

polynômes de Tchebychev en ξ ,
 Fourier ou Y_ℓ^m pour la partie
 angulaire (θ, ϕ) ,

- les propriétés de symétries et de régularité des champs à l'origine et sur l'axe sont bien prises en compte
- changement de coordonnée \Rightarrow les conditions à l'infini pour les EDP elliptiques sont bien imposées

Avantage : décroissance exponentielle de l'erreur
 Défaut : phénomène de Gibbs !

RÉSOLUTION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Relativité numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes gravitationnelles

Équations d'Einstein

Décomposition 3+1

Formalisme contraint

Méthodes numériques

Méthodes spectrales

Conditions aux bords

LORENE

Résultats

Onde gravitationnelle seule

Effondrements gravitationnels

Conclusions

Les harmoniques sphériques $Y_\ell^m(\theta, \varphi)$ sont fonctions propres de la partie angulaire de l'opérateur de Laplace

$$\Delta_{\theta\varphi} Y_\ell^m = -\ell(\ell+1)Y_\ell^m$$

$$\Delta\phi = \sigma$$

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \phi_{\ell m}(r) = \sigma_{\ell m}(r)$$

Précision sur la solution $\sim 10^{-13}$
 (pour ~ 30 polynômes/points)

$$\square\phi = \sigma$$

différences finies pour le temps : Crank-Nicholson d'ordre 2 (implicite)

$$\left[1 - \frac{\delta t^2}{2} \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\ell(\ell+1)}{r^2} \right) \right] \phi_{\ell m}^{J+1} = \sigma_{\ell m}^J$$

Précision sur la solution $\sim 10^{-10}$

$\forall(\ell, m)$ l'inversion de l'opérateur \iff inversion d'une matrice $\sim 30 \times 30$

Les parties non-linéaires sont évaluées dans l'espace physique et contribuent aux sources des équations.

\Rightarrow équations de Poisson vectorielle et tensorielle en composantes sphériques

POUR r "GRAND"

- équations de type elliptique $\Rightarrow u = 1/r$ permet d'imposer les conditions exactes à l'infini (espace asymptotiquement plat)
- équations d'ondes ne peuvent utiliser ce genre de compactification \Rightarrow conditions à distance finie **transparentes** pour $\ell \leq 2$ (*J.N. & S.Bonazzola, J. Comp. Phys. 197 (2004)*)

EXCISION DES TROUS NOIRS

- la singularité présente dans les modèles de trou noir ne peut être représentée numériquement
- on la retire (avec son voisinage) du domaine de calculs et remplace par des conditions au bord (par exemple, l'horizon apparent) (*E. Gourgoulhon & J.L. Jaramillo, Phys. Reports, soumis* [preprint : gr-qc/0503113])

Relativité
numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
gravitationnelles

Équations
d'Einstein

Décomposition
3+1

Formalisme
contraint

Méthodes
numériques

Méthodes
spectrales

Conditions aux
bords

LORENE

Résultats

Onde
gravitationnelle
seule

Effondrements
gravitationnels

Conclusions

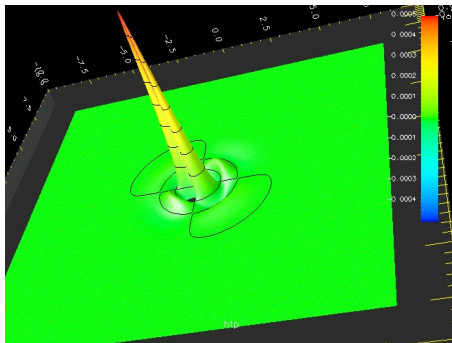
Débutée en 1997 par J.A.Marck et E.Gourgoulhon, aujourd'hui utilisée en France (Tours, Saclay) et à l'étranger (Espagne, Pologne, Allemagne, États-Unis, Italie, ...)

- calcul tensoriel et résolution d'EDP liées à la Relativité Générale et certains modèles de théorie des champs
- bibliothèque de classes C++ utilisant les méthodes spectrales multi-domaines, en coordonnées sphériques
- documentée (doxygen) et portable (Linux/gcc/icc/PGI, SGI-IRIX, HP-UX, IBM-AIX, DEC, Mac-OS X, ...)
- téléchargeable anonymement depuis un serveur CVS ; les instructions sont sur la page web :
<http://www.lorene.obspm.fr> ⇒ facilite les collaborations
- résultats et sources ouverts à tous ... avantages et inconvénients

École sur les méthodes spectrales, au CIAS de l'Observatoire de Meudon du 14 au 18 novembre 2005

<http://www.lorene.obspm.fr/school/>

- conditions initiales : h^{ij} est donné par ses deux degrés de liberté pour le mode $\ell = m = 2$. En prenant $\dot{h}^{ij} = 0$, on peut résoudre les contraintes au pas de temps initial
- évolution des équations complètes par le schéma contraint en 3D (symétrie par rapport au plan équatorial)



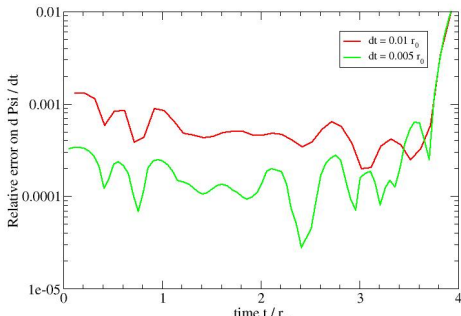
CONTRAINTES

- imposées numériquement à chaque pas de temps!
- précision dépend de la résolution spatiale (e^{-N}) et du pas de temps (second ordre)
- gardée à mieux que 10^{-6}

ÉQUATIONS D'ÉVOLUTION

- seules **deux** sur six sont résolues
- vérification pour les autres

$$\frac{\partial \Psi}{\partial t} = \beta^k \mathcal{D}_k \Psi + \frac{\Psi}{6} \mathcal{D}_k \beta^k$$



ÉVOLUTION DE LA MASSE ADM

LES CONDITIONS AUX BORDS SONT-ELLES EFFICACES ?

Relativité
 numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
 gravitationnelles

Équations
 d'Einstein

Décomposition
 3+1

Formalisme
 contraint

Méthodes
 numériques

Méthodes
 spectrales

Conditions aux
 bords

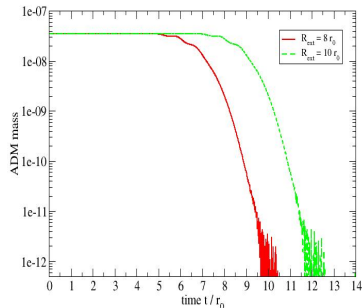
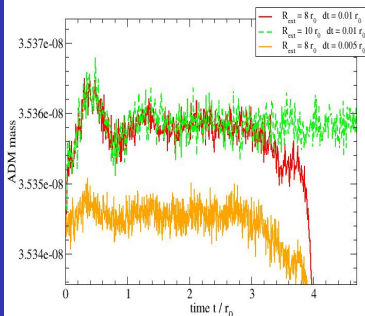
LORENE

Résultats

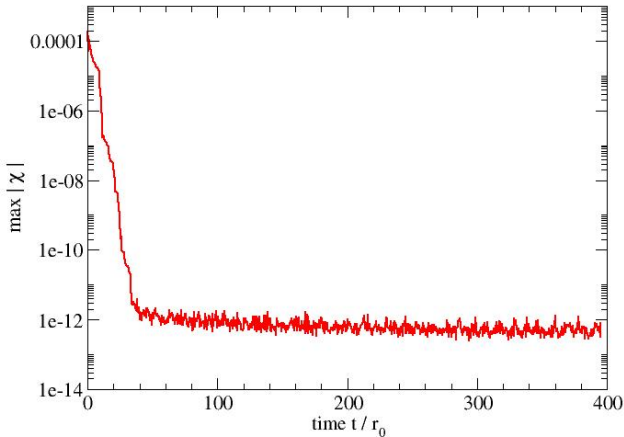
Onde
 gravitationnelle
 seule

Effondrements
 gravitationnels

Conclusions



- la masse ADM est conservée à mieux que 10^{-4}
- la principale source d'erreurs vient du schéma temporel
- l'onde sort à mieux que 10^{-4}



40000 pas de temps (implicite)

Relativité
 numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
 gravitationnelles

Équations
 d'Einstein

Décomposition
 3+1

Formalisme
 contraint

Méthodes
 numériques

Méthodes
 spectrales

Conditions aux
 bords

LORENE

Résultats

Onde
 gravitationnelle
 seule

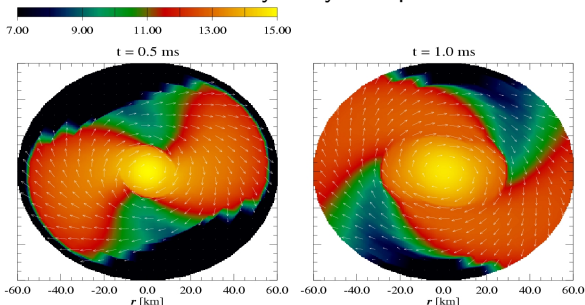
Effondrements
 gravitationnels

Conclusions

Modèle physique très riche et trop complexe...

Commence par modélisation hydro + champ gravitationnel relativiste (Einstein) :

- méthodes spectrales pour modéliser la gravité (faibles besoins informatiques),
- méthodes de type Godunov (capture de chocs) pour traiter les discontinuités hydrodynamiques.



Le code 3D est
 actuellement
 opérationnel... étude
 des instabilités
 rotationnelles en
 cours.

*H. Dimmelmeier, J.N., J.A. Font-Roda, J.M. Ibañez et E. Müller,
 Phys. Rev. D, 71 (2005)*

Relativité numérique

Jérôme Novak

Introduction

Détecteurs

Sources d'ondes
gravitationnelles

Équations d'Einstein

Décomposition
3+1

Formalisme
contraint

Méthodes numériques

Méthodes
spectrales

Conditions aux
bords

LORENE

Résultats

Onde
gravitationnelle
seule

Effondrements
gravitationnels

Conclusions

- LORENE a permis la simulation des conditions initiales (approximations stationnaires) correspondant à de nombreux systèmes émettant des ondes gravitationnelles (étoiles à neutrons, binaires)
- travail en cours pour les systèmes instationnaires : résolution des toutes les équations d'Einstein, problème des conditions au bord pour les trous noirs, supernovae
- inclusion de la (magnéto-)hydrodynamique subsonique ??
- extension à d'autres problèmes en dehors de la Relativité Générale (théories de Yang-Mills, ...)